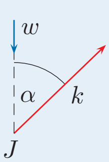
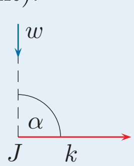
6 Planimetria

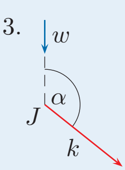
Jednym z pojęć omawianych w tym rozdziale jest pojęcie kąta. W żeglarstwie od kąta między kierunkiem wiatru a kursem jachtu zależy ustawienie żagli. Na poniższych rysunkach podano nazwy kursów jachtu względem wiatru (strzałka w oznacza kierunek wiatru, punkt J – położenie jachtu, a strzałka k – kurs obrany przez jacht).

1.


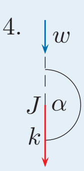
bajdewind

2.


półwiatr

3.


baksztag

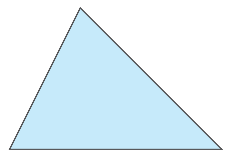
4.


fordewind

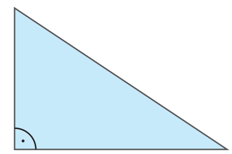
Uczeń:
- klasyfikuje trójkąty ze względu na miary ich kątów,
- stosuje twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta do rozwiązywania zadań,
- oblicza sumę miar kątów wewnętrznych n-kąta,
- wyznacza liczbę boków wielokąta, znając sumę miar jego kątów wewnętrznych,
- przeprowadza dowód twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie,
- przeprowadza dowód twierdzenia o mierze kąta zewnętrznego trójkąta.

6.1. Miary kątów w trójkącie

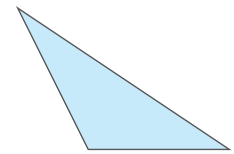
Trójkąt to figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z tych punktów jest wierzchołkiem trójkąta, a odcinki łączące wierzchołki nazywamy bokami. Trójkąty można klasyfikować ze względu na ich kąty.



Trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre.
(Kąt ostry to kąt o mierze mniejszej od 90°.)



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty.
(Kąt prosty to kąt o mierze równej 90°.)



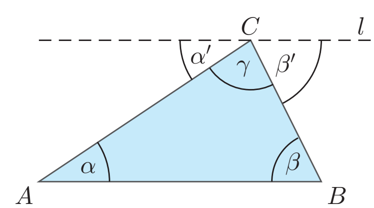
Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty.
(Kąt rozwarty to kąt o mierze większej od 90° i mniejszej od 180°.)

Twierdzenie

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt ABC (rysunek obok). Rysujemy pomocniczą prostą l równoległą do boku AB, przechodzącą przez wierzchołek C. Kąty α i α' są równe (są to kąty naprzemianległe). Również kąty β i β' są równe (jako kąty naprzemianległe). Zatem $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma$. $\alpha' + \beta' + \gamma = 180°$, więc również:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Zauważmy, że powyższe rozumowanie jest takie samo dla trójkąta rozwartokątnego czy prostokątnego. Udowodniliśmy w ten sposób, że suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest równa 180°.

Uwaga. Tam, gdzie nie powoduje to nieporozumień, będziemy zamiennie używać określeń „kąt” i „miara kąta”.

Ćwiczenie 1

D a) Wykaż, że trójkąt ABC, w którym kąt B jest dwa razy większy od kąta A, a kąt C jest trzy razy większy od kąta A, jest trójkątem prostokątnym.

b) Stosunek miar kątów trójkąta jest jak $1:4:5$. Podaj miary tych kątów.

Multi*teka*
- Rodzaje kątów
- Kąty odpowiadające i kąty naprzemianległe
- Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta
- Kąty wierzchołkowe i kąty przyległe

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 6.1

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 1

a) Z założenia mamy: $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = 2\alpha$, $\sphericalangle C = 3\alpha$.

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$$
$$\alpha = 30°$$

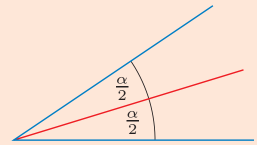
Zatem kąty trójkąta ABC są równe: 30°, 60°, 90°, czyli jest on prostokątny.

b) Kąty trójkąta są równe: α, 4α, 5α.

$$\alpha + 4\alpha + 5\alpha = 180°$$
$$\alpha = 18°$$

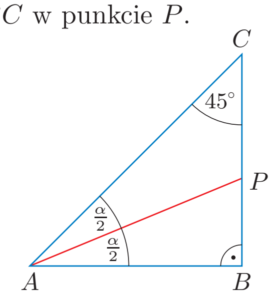
Zatem kąty te są równe: 18°, 72°, 90°.

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty przystające.



Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P. Oblicz miarę kąta APC.



Trójkąt ABC jest prostokątny równoramienny, więc:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 45^\circ$$

Stąd:

$$\sphericalangle CAP = \tfrac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22{,}5^\circ$$

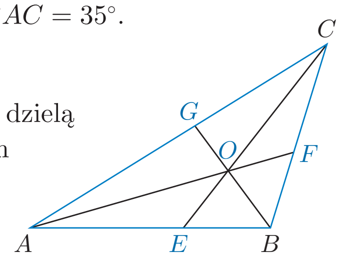
Zatem $\sphericalangle APC = 180^\circ - (45^\circ + 22{,}5^\circ) = 112{,}5^\circ$.

Ćwiczenie 2

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P. Oblicz miary kątów trójkąta APB, jeśli: a) $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, b) $\sphericalangle BAC = 35^\circ$.

Ćwiczenie 3

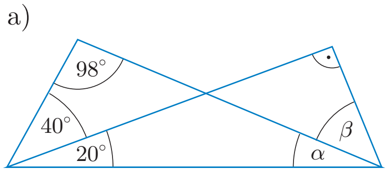
Dwusieczne kątów trójkąta ABC (rysunek obok) dzielą go na sześć trójkątów. Wyznacz miary kątów tych trójkątów, jeśli miary kątów CAB i CBA są odpowiednio równe 32° i 108°.



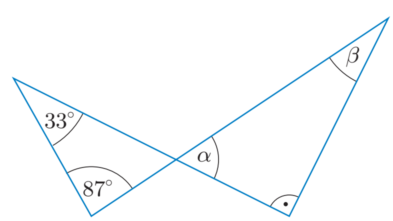
Zadania

1. Wyznacz miary kątów α i β.

a)

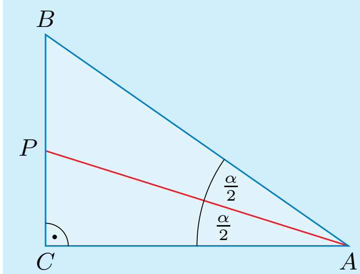


b)



2. Stosunek miar dwóch kątów trójkąta wynosi $2:3$, a miara trzeciego kąta jest o 26° większa od miary najmniejszego kąta. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

Ćwiczenie 2



a) 15°, 60°, 105°
b) $17{,}5^\circ$, 55°, $107{,}5^\circ$

Ćwiczenie 3

Trójkąt AEO: 16°, 128°, 36°
Trójkąt EBO: 52°, 54°, 74°
Trójkąt BFO: 54°, 56°, 70°
Trójkąt FCO: 124°, 20°, 36°
Trójkąt CGO: 20°, 86°, 74°
Trójkąt GAO: 94°, 16°, 70°

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\alpha = 22^\circ$, $\beta = 48^\circ$
b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$

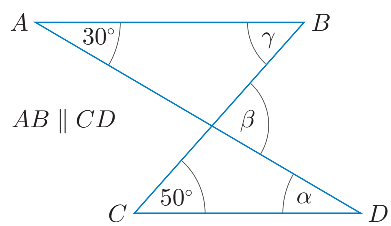
2. 2α – najmniejszy kąt

$$2\alpha + 3\alpha + (2\alpha + 26^\circ) = 180^\circ$$
$$\alpha = 22^\circ$$

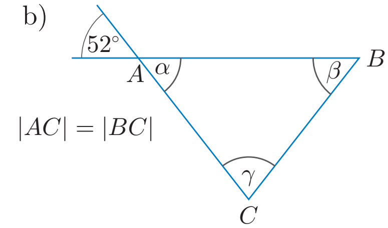
Kąty trójkąta są równe 44°, 66°, 70°.

3. Wyznacz miary kątów α, β i γ.

a)



b)



4. Wyznacz miary kątów przyległych, jeśli ich stosunek jest równy $1:4$.

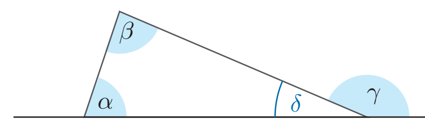
> Dwa kąty są **przyległe**, jeśli mają wspólne ramię, a ich pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.

D **5.** Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

6. Wyznacz miary kątów zewnętrznych trójkąta, jeśli miary jego kątów wewnętrznych są w stosunku $1:2:6$.

> **Kąt zewnętrzny** trójkąta to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta.

D **7.** Wykaż, że miara kąta zewnętrznego γ trójkąta jest równa sumie miar kątów wewnętrznych α i β.



D **8.** Wykaż, że suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie jest równa 360°.

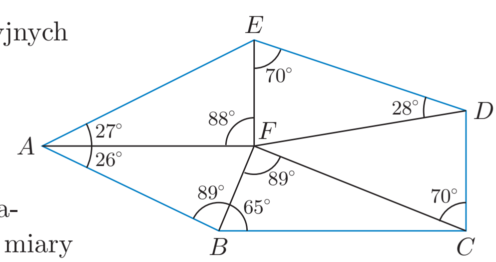
9. Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych:

a) w pięciokącie, b) w sześciokącie, c) w n-kącie?

10. Ile boków ma wielokąt, w którym suma miar kątów wewnętrznych jest równa 1440°?

Powtórzenie

11. Do wykonania pomiarów geodezyjnych wykorzystuje się metodę zwaną triangulacją. Polega ona na podzieleniu mierzonego obszaru na przylegające do siebie trójkąty, czyli utworzeniu tak zwanej siatki triangulacyjnej. Określ miary pozostałych kątów narysowanego obok fragmentu siatki triangulacyjnej.



12. Przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka pięciokąta foremnego podzieliły pięciokąt na trzy trójkąty. Podaj miary kątów tych trójkątów.

3. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 50^\circ$
b) $\alpha = 52^\circ$, $\beta = 52^\circ$, $\gamma = 76^\circ$

4. α, 4α – kąty przyległe

$$\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = 36^\circ$$

Kąty przyległe są równe 36° i 144°.

5. Niech α, β będą kątami przyległymi, czyli $\alpha + \beta = 180^\circ$. Dwusieczna kąta α dzieli ten kąt na dwa kąty o miarach $\frac{\alpha}{2}$. Dwusieczna kąta β dzieli ten kąt na dwa kąty o miarach $\frac{\beta}{2}$. Stąd kąt między dwusiecznymi ma miarę:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Zatem dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

6. α – miara najmniejszego kąta.

$$\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = 20^\circ$$

Miary kątów wewnętrznych trójkąta: 20°, 40°, 120°.
Miary kątów zewnętrznych trójkąta: 160°, 140°, 60°.

7. Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°, zatem $\delta = 180^\circ - \alpha - \beta$ oraz

$$\gamma = 180^\circ - \delta = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$$

8. Dowolny czworokąt możemy podzielić na dwa trójkąty. Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180°. Zatem suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie jest równa 360°.

9. a) 540° **b)** 720° **c)** $(n-2) \cdot 180^\circ$

10. Niech n – liczba boków.

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$
$$n = 10$$

11. $\sphericalangle AEF = 65^\circ$, $\sphericalangle AFB = 65^\circ$, $\sphericalangle BCF = 26^\circ$, $\sphericalangle EFD = 82^\circ$, $\sphericalangle DFC = 36^\circ$, $\sphericalangle CDF = 74^\circ$

12. Suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta wynosi:

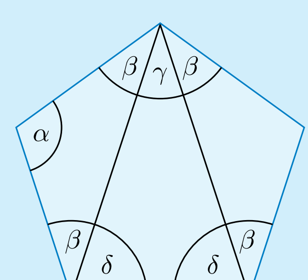
$$3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

czyli:

$$\alpha = 540^\circ : 5 = 108^\circ$$

Wówczas:

$$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$$
$$\gamma = 108^\circ - 2\beta = 36^\circ$$
$$\delta = 108^\circ - \beta = 72^\circ$$

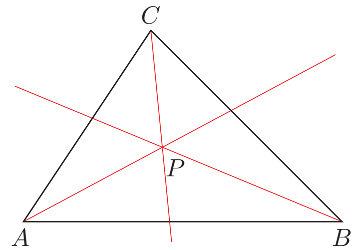


Warto wiedzieć

Punkty specjalne w trójkącie

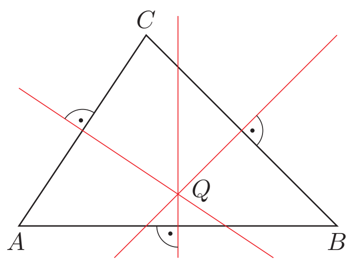
Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty o równych miarach.

> Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



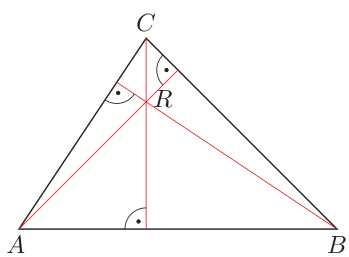
Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka, przechodzącą przez jego środek.

> Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Wysokością trójkąta nazywamy odcinek prostopadły do boku trójkąta, łączący ten bok (lub jego przedłużenie) z przeciwległym wierzchołkiem.

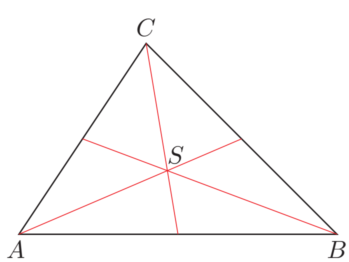
> Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Punkt przecięcia wysokości trójkąta nazywamy **ortocentrum trójkąta**.

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

> Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



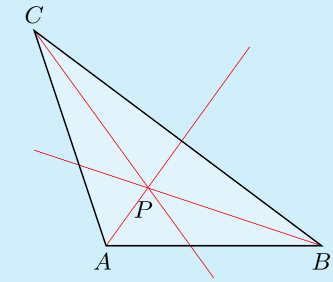
Punkt przecięcia środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości** lub **barycentrum trójkąta**. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

1. Wskaż wyżej wymienione punkty specjalne w trójkącie:

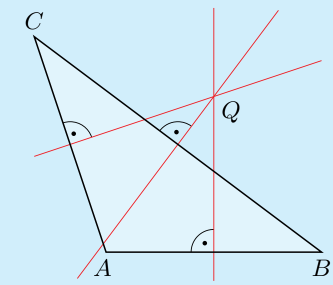
a) rozwartokątnym, b) prostokątnym.

1. a)

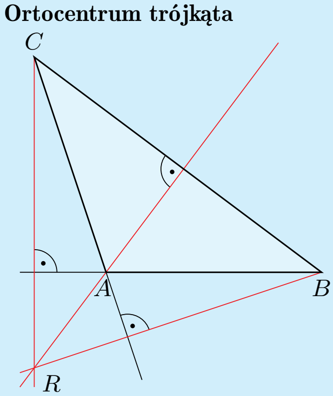
Punkt przecięcia dwusiecznych



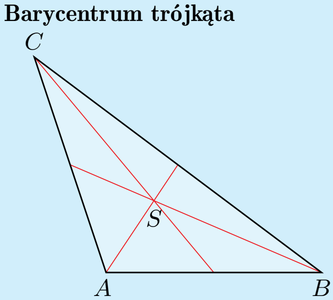
Punkt przecięcia symetralnych boków



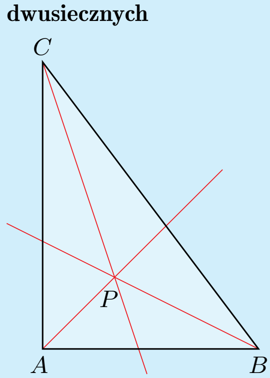
Ortocentrum trójkąta



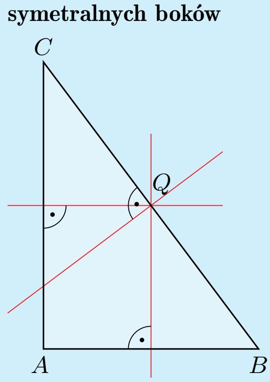
Barycentrum trójkąta



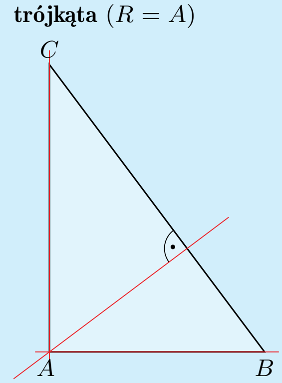
b) Punkt przecięcia dwusiecznych



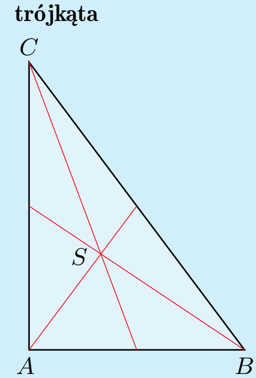
Punkt przecięcia symetralnych boków



Ortocentrum trójkąta ($R = A$)



Barycentrum trójkąta



Uczeń:
- podaje definicję trójkątów przystających oraz cechy przystawania trójkątów,
- wskazuje trójkąty przystające,
- stosuje nierówność trójkąta do rozwiązywania zadań,
- stosuje cechy przystawania trójkątów w zadaniach na dowodzenie.

Ćwiczenie 1
$|AB| = |DE|$,
$|AC| = |DF|$,
$|BC| = |EF|$,
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$,
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$,
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFE$

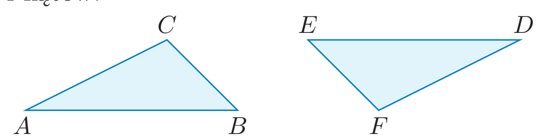
6.2. Trójkąty przystające

Figury **przystające** to, intuicyjnie, figury tego samego kształtu i wielkości. Dwa wielokąty są **przystające**, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

W tej lekcji omówimy przystawanie trójkątów.

Symbolem $|AB|$ oznaczać będziemy długość odcinka AB.

Ćwiczenie 1
Trójkąty przedstawione na poniższym rysunku są przystające. Wskaż pary równych boków i kątów.



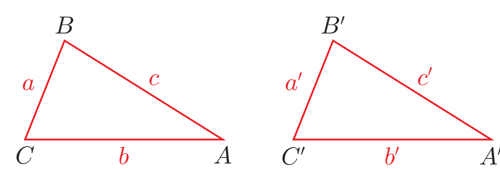
Do stwierdzenia, że trójkąty są przystające, nie jest konieczne porównanie aż 6 par wielkości (3 par kątów i 3 par boków). Przypomnijmy twierdzenia pozwalające wnioskować o przystawaniu trójkątów.

Cecha BBB

> Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

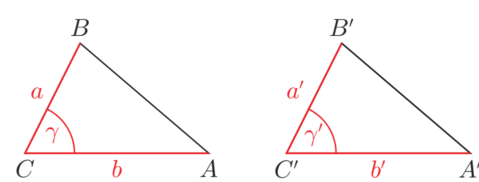


Cecha BKB

> Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

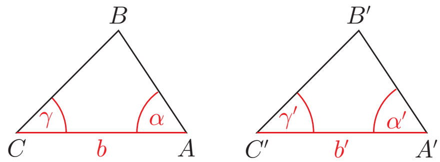


Cecha KBK

> Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 2

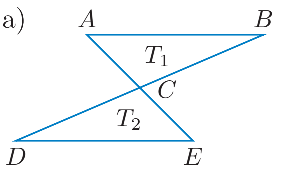
Czy przystające są trójkąty, o których wiadomo, że:

a) trzy kąty jednego z nich są równe trzem kątom drugiego,

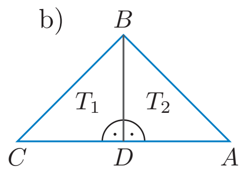
b) mają jedną parę równych kątów i dwie pary równych boków?

Ćwiczenie 3

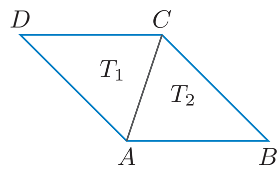
Podaj cechę przystawania, na podstawie której można stwierdzić, że trójkąty T_1 i T_2 są przystające.

a) 

$AB \parallel DE$, $|AC| = |CE|$

b) 

$|AD| = |CD|$

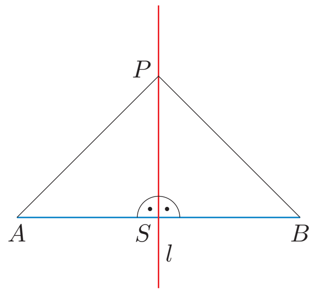
c) 

$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

Przykład 1

Uzasadnij, że dowolny punkt symetralnej odcinka jest równo oddalony od końców tego odcinka.

Rozpatrzmy odcinek AB i jego symetralną l, tj. prostą przechodzącą przez środek tego odcinka (punkt S) i do niego prostopadłą.
Niech P będzie dowolnym, różnym od S, punktem symetralnej.
Korzystając z cechy BKB, stwierdzamy, że trójkąty ASP i BSP są przystające (uzasadnij).
Zatem zachodzi równość $|AP| = |BP|$.



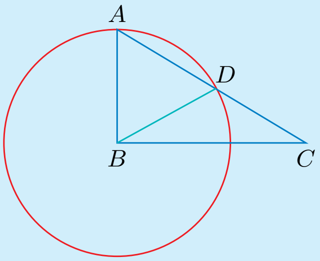
D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Ćwiczenie 2

a) Nie muszą być przystające, ponieważ mimo równych kątów odpowiednie boki mogą mieć różne długości. Na przykład: dwa trójkąty równoboczne, każdy o różnej długości boku. Miary wszystkich kątów obydwu trójkątów są równe 60°, ale trójkąty nie są przystające.

b) Nie. Weźmy okrąg o środku w punkcie B i promieniu $|BA|$.



Trójkąty ACB i DCB mają jedną parę równych kątów:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB$$

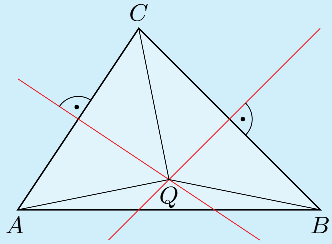
oraz dwie pary równych boków: wspólny bok BC i $|BA| = |BD|$, jako promienie okręgu. Trójkąty ABC i DBC nie są przystające.

Ćwiczenie 3

a) KBK **b)** BKB **c)** KBK

Ćwiczenie 4

Rozpatrzmy trójkąt ABC. Niech Q będzie punktem przecięcia symetralnych boków AC i BC, wówczas $|AQ| = |CQ|$ oraz $|BQ| = |CQ|$. Stąd $|AQ| = |BQ|$, co oznacza, że punkt Q jest równo oddalony od punktów A i B, czyli leży na symetralnej boku AB. Zatem wszystkie symetralne boków trójkąta przecinają się w punkcie Q.



Ćwiczenie 5

a) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Dwusieczna kąta dzieli ten kąt na dwa kąty o równych miarach:

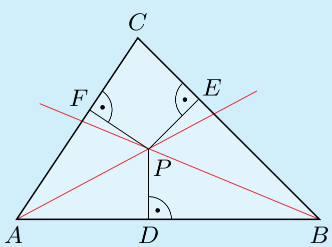
$$\sphericalangle MAP = \sphericalangle NAP$$

Stąd:

$\sphericalangle APM = 90^\circ - \sphericalangle MAP =$
$= 90^\circ - \sphericalangle NAP = \sphericalangle APN$

Bok AP jest wspólnym bokiem trójkątów AMP i ANP. Zatem na podstawie cechy KBK trójkąty AMP i ANP są przystające, czyli $|PM| = |PN|$.

b) Rozpatrzmy trójkąt ABC.



Niech P będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów A i B. Korzystając z punktu **a)**, mamy: $|PD| = |PF|$ oraz $|PD| = |PE|$. Stąd $|PF| = |PE|$, co oznacza, że punkt P leży na dwusiecznej kąta C. Zatem wszystkie dwusieczne kątów dowolnego trójkąta przecinają się w punkcie P.

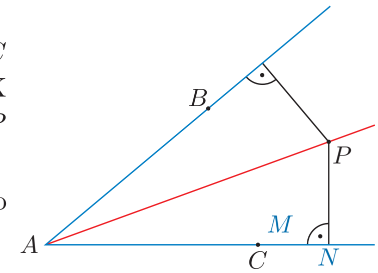
Ćwiczenie 6

a) tak, $2 + 2 > \sqrt{7}$
b) nie, $7 + 8 = 15 = \sqrt{225}$
c) nie, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$
d) tak,
$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} > \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

D **Ćwiczenie 5**

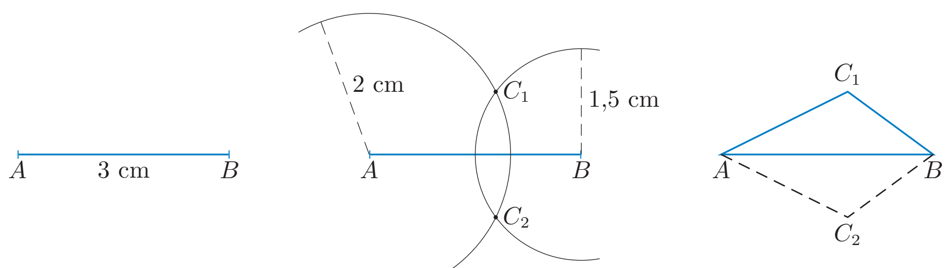
a) Półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC (rysunek obok). Korzystając z cechy KBK przystawania trójkątów, uzasadnij, że punkt P jest równo odległy od ramion tego kąta.

b) Uzasadnij, że dwusieczne kątów dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Przykład 2

Skonstruuj (narysuj za pomocą cyrkla i linijki) trójkąt o bokach długości: 1,5 cm, 2 cm i 3 cm.



krok 1. krok 2. krok 3.

W kroku 2. z punktów A i B zataczamy łuki okręgów, które przecinają się w punkcie C_1 oraz w punkcie C_2.

Konstrukcja trójkąta jest możliwa tylko wtedy, gdy najdłuższy odcinek jest krótszy od sumy dwóch pozostałych.

Nierówność trójkąta

Z odcinków długości: a, b, c można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy:

$$a + b > c$$

gdzie c jest długością najdłuższego odcinka.

Ćwiczenie 6

Czy boki trójkąta mogą mieć długości:

a) $2,\ 2,\ \sqrt{7}$, b) $7,\ 8,\ \sqrt{225}$, c) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6}$, d) $1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}$?

Ćwiczenie 7

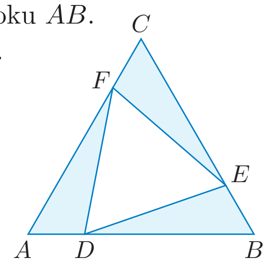
Na ile sposobów można zbudować trójkąt, jeżeli są do dyspozycji dwa odcinki długości 2 dm, trzy odcinki długości 3 dm i dwa odcinki długości 5 dm?

Ćwiczenie 7

Na sześć sposobów:
2 dm, 2 dm, 3 dm;
2 dm, 3 dm, 3 dm;
2 dm, 5 dm, 5 dm;
3 dm, 3 dm, 3 dm;
3 dm, 3 dm, 5 dm;
3 dm, 5 dm, 5 dm.

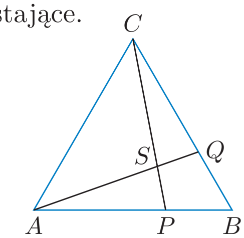
Zadania

D **1.** a) W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku AB. Uzasadnij, że trójkąty APD i BPC są przystające.
b) Uzasadnij, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy.



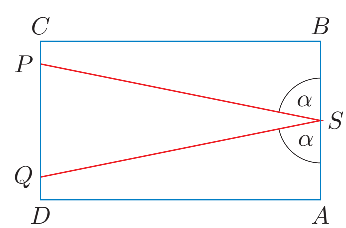
D **2.** Trójkąt ABC jest równoboczny (rysunek obok). Odcinki AD, BE i CF mają równe długości. Uzasadnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

D **3.** Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Środkowe AP i BQ tego trójkąta przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że trójkąty AOQ i BOP są przystające.



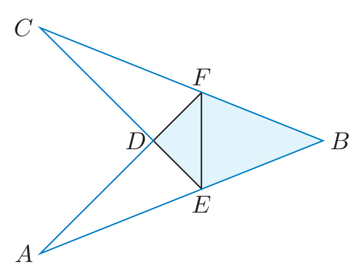
D **4.** W trójkącie równobocznym ABC (rysunek obok) na bokach AB i BC wybrano odpowiednio punkty P i Q tak, że $|AP| = 2|BP|$ i $|CQ| = 2|BQ|$. Odcinki AQ i CP przecinają się w punkcie S. Uzasadnij, że trójkąty APS i CQS są przystające.

D **5.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ dwie pary boków są równe: $|AB| = |BC|$ oraz $|CD| = |DA|$. Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że trójkąt AOB jest przystający do trójkąta COB oraz trójkąt AOD jest przystający do trójkąta COD.



D **6.** Kula bilardowa odbija się od bandy stołu bilardowego pod takim samym kątem, pod jakim w nią uderzyła (rysunek obok). Kula przebyła drogę z P do S i z S do Q, gdzie S jest środkiem bandy AB. Uzasadnij, że $|PC| = |QD|$.

D **7.** Uzasadnij, że jeśli wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej kąta tego trójkąta, to trójkąt ten jest równoramienny.



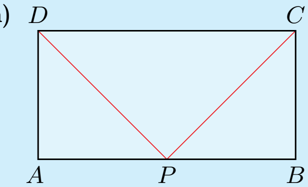
D **8.** W czworokącie $ABCD$ (rysunek obok) kąty EFB i FEB są równe oraz $|AE| = |CF|$. Uzasadnij, że:

a) trójkąty BAF i BCE są przystające,

b) czworokąt $DEBF$ ma dwie pary boków równych.

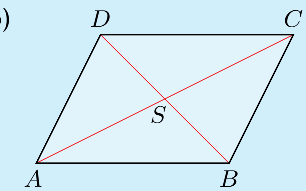
Odpowiedzi do zadań

1. a)



Punkt P jest środkiem boku AB, czyli $|AP| = |BP|$. Ponadto $|AD| = |BC|$ oraz:
$\sphericalangle PAD = \sphericalangle PBC = 90^\circ$
Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle APD \equiv \triangle BPC$.

b)

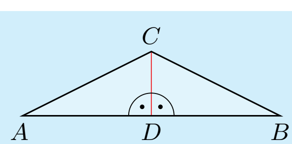


$\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD$ oraz $\sphericalangle SBA = \sphericalangle SDC$, gdyż są to kąty naprzemianległe. Ponadto $|AB| = |CD|$, czyli z cechy KBK wynika:
$\triangle ABS \equiv \triangle CDS$
Zatem $|AS| = |CS|$ oraz $|BS| = |DS|$, co oznacza, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy.

4. Na podstawie cechy BKB:
$\triangle BQA \equiv \triangle BPC$
czyli $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle BCP$.
$\sphericalangle ASP = \sphericalangle CSP$ (kąty wierzchołkowe), zatem
$\sphericalangle APS = \sphericalangle CQS$
Ponadto $|AP| = |CQ|$, zatem z cechy KBK:
$\triangle APS \equiv \triangle CQS$

6. $\sphericalangle SPQ = \sphericalangle PSB = \alpha$ oraz $\sphericalangle SQP = \sphericalangle QSA = \alpha$ (kąty naprzemianległe), czyli trójkąt PSQ jest równoramienny. Stąd $|PS| = |QS|$, z założenia $|SB| = |SA|$. Na mocy cechy BKB: $\triangle PSB \equiv \triangle QSA$, czyli $\sphericalangle PBS = \sphericalangle QAS = \beta$ oraz $|PB| = |QA|$.
$\sphericalangle PBC = \sphericalangle QAD = 90^\circ - \beta$ oraz $|CB| = |DA|$.
Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle PBC \equiv \triangle QAD$, czyli $|PC| = |QD|$.

7. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. Stąd na podstawie cechy KBK trójkąty DAC i DBC są przystające. Zatem $|AC| = |BC|$, czyli trójkąt ABC jest równoramienny.



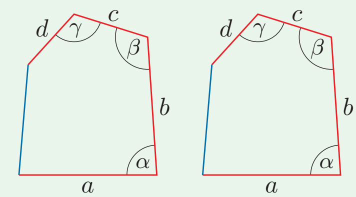
8. a) $\sphericalangle EFB = \sphericalangle FEB$, czyli $\triangle FBE$ jest równoramienny, stąd $|FB| = |EB|$. Z założenia $|AE| = |CF|$, czyli $|BA| = |BC|$. Trójkąty BAF i BCE mają wspólny kąt przy wierzchołku B. Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle BAF \equiv \triangle BCE$.
b) $\triangle BAF \equiv \triangle BCE$, czyli $\sphericalangle EAD = \sphericalangle FCD$.
$\sphericalangle ADE = \sphericalangle CDF = \beta$ (kąty wierzchołkowe), stąd $\sphericalangle AED = \sphericalangle CFD$, ponadto z założenie $|AE| = |CF|$, czyli na podstawie cechy KBK: $\triangle AED \equiv \triangle CFD$. Stąd $|DE| = |DF|$.
W podpunkcie a) wykazaliśmy, że $|EB| = |FB|$. Zatem czworokąt $DEBF$ ma dwie pary boków równych.

Czy wiesz, że...

Cechy przystawania można sformułować również dla wielokątów o większej liczbie boków. Poniżej przedstawiamy cechy przystawania pięciokątów.

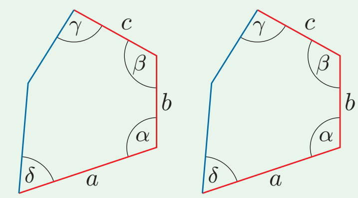
Cecha BKBKBKB

Jeżeli cztery boki oraz kąty zawarte między tymi bokami w jednym pięciokącie są odpowiednio równe czterem bokom oraz kątom zawartym między tymi bokami w drugim pięciokącie, to pięciokąty te są przystające.

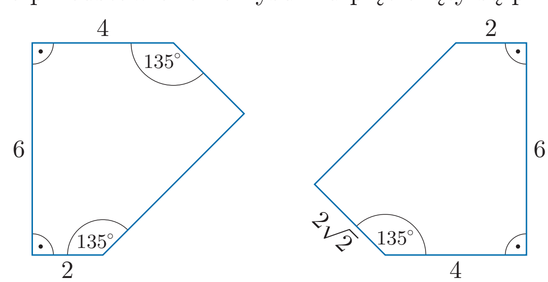


Cecha KBKBKBK

Jeżeli trzy kolejne boki oraz cztery kąty leżące przy tych bokach w jednym pięciokącie są odpowiednio równe trzem kolejnym bokom oraz czterem kątom leżącym przy tych bokach w drugim pięciokącie, to pięciokąty te są przystające.



D **9.** Uzasadnij, że przedstawione na rysunku pięciokąty są przystające.



Powtórzenie

10. Na ile trójkątów przystających wszystkie osie symetrii dzielą:

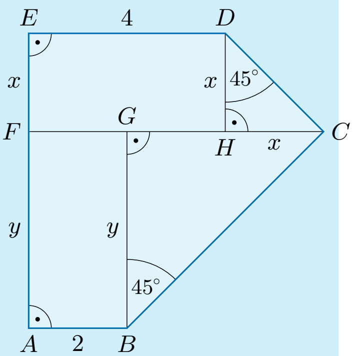
a) trójkąt równoboczny, b) kwadrat, c) sześciokąt foremny?

D **11.** Korzystając z odpowiedniej cechy przystawania trójkątów, uzasadnij, że przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty przystające.

D **12.** Dany jest ośmiokąt foremny $ABCDEFGH$. Uzasadnij, że czworokąt $ACEG$ jest kwadratem.

13. Danych jest pięć odcinków o długościach: 1 cm, 2 cm, 2,5 cm, 5 cm i 7 cm. Ile różnych trójkątów można zbudować z tych odcinków?

9.



Niech $|EF| = x$ i $|AF| = y$. Wówczas $|DH| = |CH| = x$ oraz $|BG| = |CG| = y$. Stąd $|FC| = 4 + x = 2 + y$. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 4 + x = 2 + y \end{cases}$$

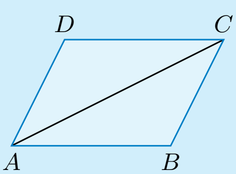
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$|CD| = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Zatem na podstawie cechy BKBKBKB pięciokąty te są przystające.

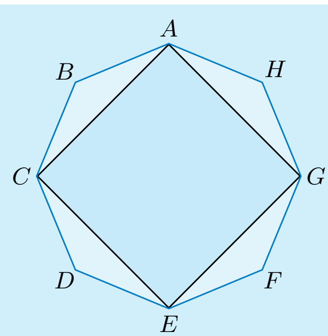
10. **a)** 6 **b)** 8 **c)** 12

11.



$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ (kąty naprzemianległe, $AB \parallel CD$)
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$ (kąty naprzemianległe, $BC \parallel DA$)
Bok AC jest wspólny, zatem na mocy cechy KBK, trójkąty ACB i CAD są przystające.

12.



Na podstawie cechy BKB trójkąty: ABC, CDE, EFG, AHG są przystające, stąd:

$$|CA| = |AG| = |GE| = |EC|$$

Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego jest równa 135°, stąd miara każdego z kątów CAG, ACE, CEG, EGA jest równa:

$$135^\circ - (180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ$$

Zatem czworokąt $ACEG$ jest kwadratem.

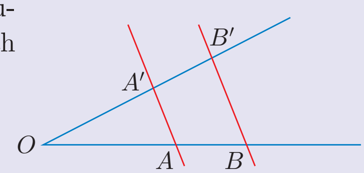
13. Dwa trójkąty o bokach: 1 cm, 2 cm i 2,5 cm oraz 2,5 cm, 5 cm i 7 cm.

6.3. Twierdzenie Talesa

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta AOA' są przecięte dwiema prostymi równoległymi AA' i BB', to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu tego kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu:

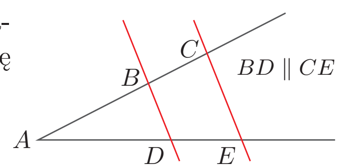
$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}$$



Ćwiczenie 1

a) Długość którego odcinka (rysunek obok) należy wstawić w miejsce $\boxed{?}$, aby otrzymać proporcję prawdziwą? Zapisz tę proporcję w zeszycie.

$$\frac{\boxed{?}}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}, \qquad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\boxed{?}}{|DE|}$$



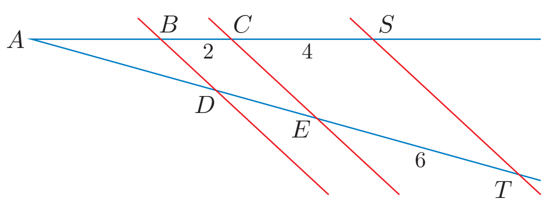
b) Oblicz długość odcinka AD, jeśli: $|AB| = 3{,}6$; $|AC| = 5{,}4$; $|DE| = 1{,}2$.

Ćwiczenie 2

Proste: BD, CE i ST (rysunek obok) są równoległe.

D a) Uzasadnij, że:

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$$

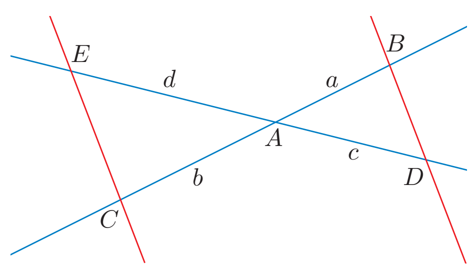


b) Oblicz długości odcinków: AD i DE, jeśli $|AS| = 10$.

Zauważmy, że równość $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ zachodzi również w sytuacji przedstawionej na rysunku poniżej ($BD \parallel CE$).

Ćwiczenie 3

Oblicz długość odcinka ED (rysunek obok), jeśli $a = 3{,}6$, $b = 4{,}8$, $c = 4{,}5$ oraz proste BD i CE są równoległe.



Uczeń:

- podaje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa,
- wykorzystuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do rozwiązywania zadań,
- wykorzystuje twierdzenie Talesa do podziału odcinka w danym stosunku,
- przeprowadza dowód twierdzenia Talesa,
- przeprowadza dowody twierdzeń z zastosowaniem twierdzenia Talesa.

Ćwiczenie 1

a) $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}$, $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|DE|}$

b) $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$

$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AC|-|AB|}$

Stąd $|AD| = 2{,}4$.

Ćwiczenie 2

a) Z twierdzenia Talesa:

$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$, $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$

oraz $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$

Stąd $\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$

b) $|DE| = 3$, $|AD| = 6$

Ćwiczenie 3

$\frac{3{,}6}{4{,}5} = \frac{4{,}8}{d}$, skąd $d = 6$.

$|ED| = d + c = 10{,}5$

Multiteka

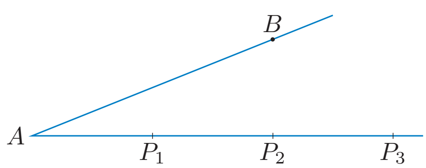
- Dowód twierdzenia Talesa z wykorzystaniem pól trójkątów
- Dowód twierdzenia Talesa z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów
- Dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 6.3

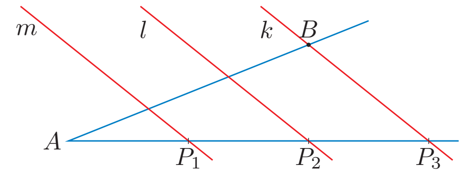
Generator testów i sprawdzianów

Przykład 1

Za pomocą cyrkla i linijki podziel dany odcinek AB na trzy równe części.



Odcinek AB umieszczamy na jednym ramieniu kąta. Na drugim ramieniu odmierzamy trzy odcinki tej samej (dowolnej) długości. Są to odcinki AP_1, P_1P_2 i P_2P_3.



Przez punkt P_3 i B prowadzimy prostą (prosta k), następnie konstruujemy dwie proste równoległe do prostej k przechodzące przez punkty P_2 i P_1 (proste l i m). Patrz str. 254.

Zgodnie z twierdzeniem Talesa odcinki wyznaczone na ramionach kąta przez proste równoległe są proporcjonalne, więc opisana konstrukcja prowadzi do podziału odcinka AB na trzy równe części.

Ćwiczenie 4

Jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić dany odcinek:

a) na 5 równych części, b) na 7 równych części, c) w stosunku $4:5$?

Ćwiczenie 4

a), b) Analogicznie jak w przykładzie 1 odkładamy a) 5 b) 7 równych odcinków.

c) Analogicznie jak w przykładzie 1 odkładamy 9 równych odcinków. Jeżeli pierwsze 4 części oznaczymy jako odcinek AC, a pozostałe 5 – jako odcinek CB, to odcinek AB będzie podzielony punktem C w stosunku $4:5$.

Prawdziwe jest również **twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa** – mówi ono, że z proporcji odpowiednich odcinków wynika równoległość prostych.

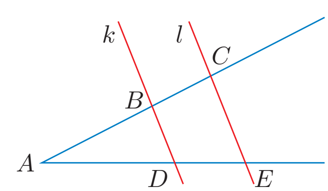
Twierdzenie

> Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

Ćwiczenie 5

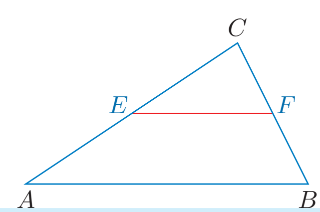
a) Podaj przykłady proporcji, z których wynika równoległość prostych k i l (rysunek obok).

D b) Uzasadnij, że jeśli $|AB| = 2{,}4$, $|AC| = 3{,}6$, $|AD| = 2{,}8$ i $|DE| = 1{,}4$, to proste BD i CE są równoległe.



D Ćwiczenie 6

Wykaż, że w dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku.



Ćwiczenie 5

a) np. $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$, $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$, $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|}$

b) $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{2{,}4}{2{,}8} = \frac{6}{7}$, $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{3{,}6}{2{,}8+1{,}4} = \frac{6}{7}$, czyli $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$.

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa proste BD i CE są równoległe.

Ćwiczenie 6

Niech punkt E będzie środkiem boku AC, a punkt F – środkiem boku BC.

$\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{|CF|}{|CB|} = \frac{1}{2}$, zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy: $EF \parallel AB$.

D Ćwiczenie 7

Wykaż, że w trapezie niebędącym równoległobokiem odcinek łączący środki:

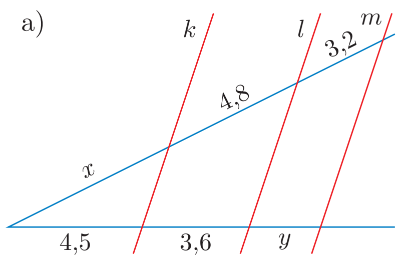
a) ramion trapezu jest równoległy do jego podstaw (rozpatrz kąt otrzymany przez przedłużenie ramion trapezu),

* b) przekątnych trapezu jest równoległy do jego podstaw.

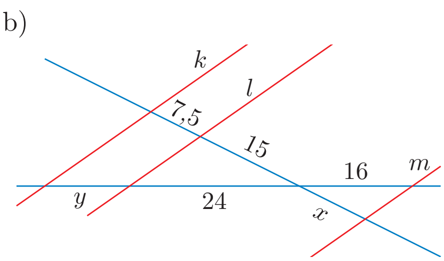
Zadania

1. Wiedząc, że proste k, l i m są równoległe, oblicz długości x i y.

a)

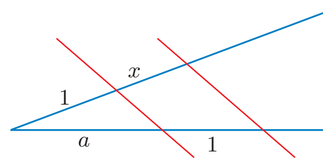


b)



2. Dany jest trapez $ABCD$ o ramionach $|AD| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm. Na ramieniu AD wybrano punkty P i Q takie, że $|AQ| = 7$ cm i $|DP| = 5$ cm. Oblicz długości odcinków, na jakie proste równoległe do podstaw trapezu i przechodzące przez punkty P i Q podzieliły ramię BC.

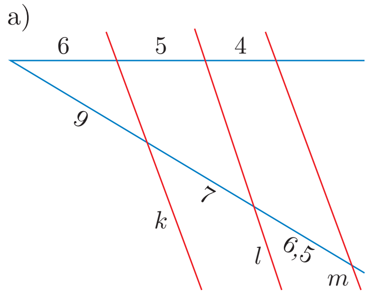
3. Na rysunku pokazano, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i a – skonstruować odcinek o długości $x = \frac{1}{a}$. Opisz, jak mając dane odcinki o długościach 1 i a, skonstruować odcinki o długościach a^2 i a^3.



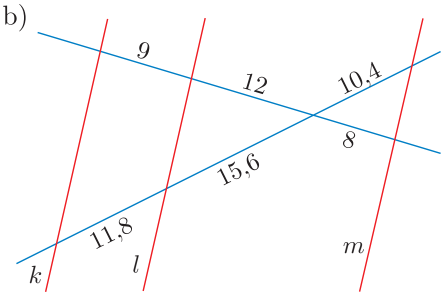
4. Opisz, jak podzielić dany odcinek w stosunku $1 : \sqrt{2}$.

5. Sprawdź, które z prostych k, l i m są równoległe.

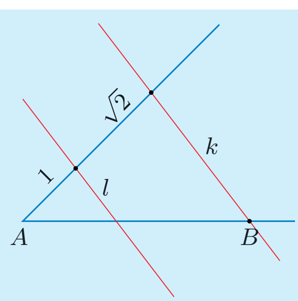
a)



b)



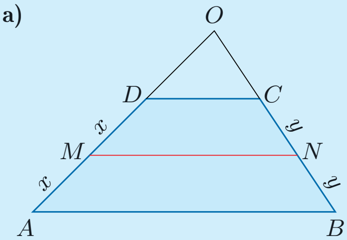
4. Konstruujemy kwadrat o boku 1 (patrz s. 254, 255). Jego przekątna ma długość $\sqrt{2}$. Następnie odcinek AB umieszczamy na jednym ramieniu kąta. Na drugim ramieniu odmierzamy odcinki o długościach 1 i $\sqrt{2}$. Przez końce obu odcinków prowadzimy prostą k i konstruujemy prostą l równoległą do k (rysunek obok). Prosta l dzieli odcinek AB w stosunku $1 : \sqrt{2}$.



5. a) k i m **b)** l i m

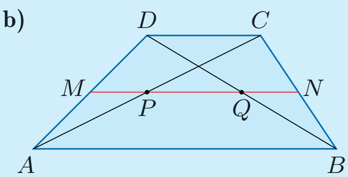
Ćwiczenie 7

a)



Z założenia $\frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{2x}{2y}$, czyli $\frac{|OD|}{|OC|} = \frac{x}{y} = \frac{|DM|}{|CN|}$.
Zatem na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $MN \parallel DC$ oraz $MN \parallel AB$.

b)



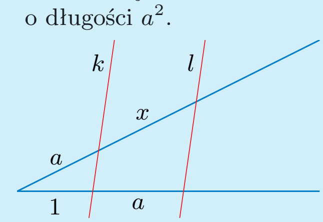
Rozpatrzmy odcinek MN łączący środki ramion trapezu – wykazaliśmy wyżej, że jest on równoległy do AB i DC.
Punkty przecięcia MN z przekątnymi oznaczmy przez P i Q.
Z twierdzenie Talesa dla kąta ACB, wynika że punkt P jest środkiem odcinka AC. Analogicznie Q jest środkiem odcinka BD. Zatem odcinek PQ jest zawarty w odcinku MN, czyli jest równoległy do podstaw trapezu.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = 6$, $y = 2{,}4$
b) $x = 10$, $y = 12$

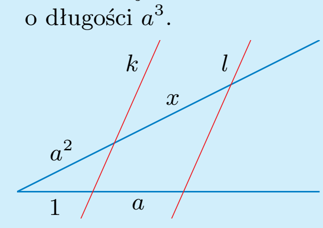
2. $5\frac{1}{3}$ cm, 4 cm, $2\frac{2}{3}$ cm

3. Konstrukcja odcinka o długości a^2.



Jeżeli $k \parallel l$, to $\frac{a}{1} = \frac{x}{a}$, czyli $x = a^2$.

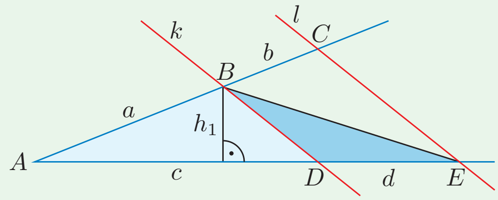
Konstrukcja odcinka o długości a^3.



Jeżeli $k \parallel l$, to $\frac{a^2}{1} = \frac{x}{a}$, czyli $x = a^3$.

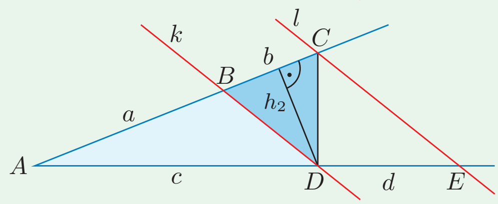
Dowód twierdzenia Talesa

Zakładamy, że proste k i l są równoległe (rysunek poniżej).



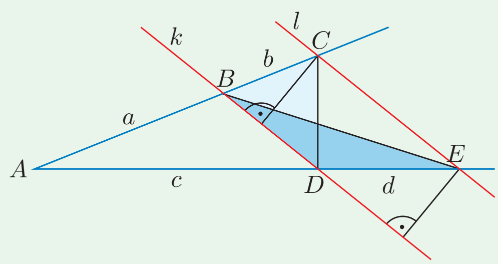
Trójkąty ADB i DEB mają wspólną wysokość h_1, zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2}ch_1}{\frac{1}{2}dh_1} = \frac{c}{d}$$



Trójkąty ADB i CBD mają wspólną wysokość h_2, zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2}ah_2}{\frac{1}{2}bh_2} = \frac{a}{b}$$



Trójkąty DEB i CBD mają wspólną podstawę BD oraz tę samą wysokość (gdyż proste k i l są równoległe). Zatem:

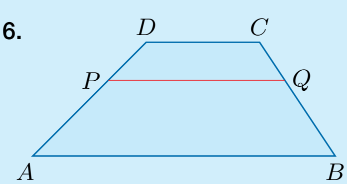
$$P_{DEB} = P_{CBD}$$

Zatem otrzymujemy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lub równoważnie $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Powtórzenie

6. Dany jest trapez $ABCD$, którego ramię AD ma długość 30 cm. Punkt P leży na ramieniu AD, punkt Q na ramieniu BC oraz $PQ \parallel AB$. Oblicz x i y, jeśli $|AP| = x$ cm, $|PD| = y$ cm, $|BQ| = (x+2)$ cm, $|QC| = (y+3)$ cm.

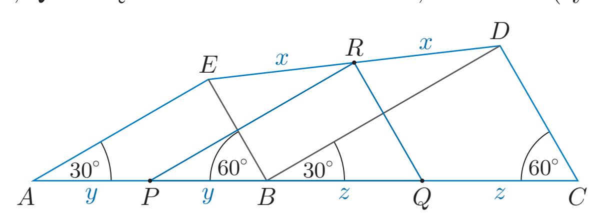
6.



$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{y}{y+3} = \frac{x}{x+2} \end{cases}$$

$x = 12$, $y = 18$

D **7.** Punkty: P, Q i R są środkami odcinków: AB, BC i DE (rysunek poniżej).



a) Uzasadnij, że czworokąty $BCDE$ i $ABDE$ są trapezami.

b) Wykaż, że $RQ \parallel DC$ i $PR \parallel BD$ oraz że trójkąt PQR jest prostokątny.

7. a) Kąty odpowiadające: EAB i DBC są równe, zatem proste AE i BD są równoległe, co oznacza, że czworokąt $ABDE$ jest trapezem.
Podobnie kąty odpowiadające: ABE i BCD są równe, zatem proste BE i CD są równoległe, czyli czworokąt $BCDE$ jest trapezem.

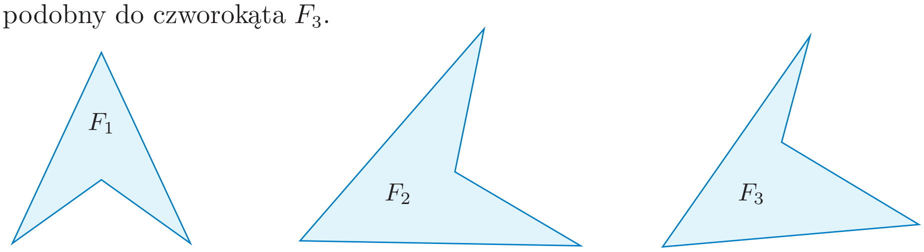
b) $\frac{x}{2x} = \frac{y}{2y} = \frac{z}{2z} = \frac{1}{2}$, zatem na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy: $AE \parallel PR \parallel BD$ oraz $CD \parallel QR \parallel BE$.

$\sphericalangle RPQ = 30^\circ$, ponieważ jest to kąt odpowiadający kątowi EAB, oraz $\sphericalangle RQP = 60^\circ$, ponieważ jest to kąt odpowiadający kątowi DCB, zatem $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$. Zatem trójkąt PQR jest prostokątny.

6.4. Wielokąty podobne

Dwie figury geometryczne są **podobne**, jeśli są tego samego kształtu, lecz niekoniecznie tej samej wielkości. Na przykład podobne są dwa dowolne koła, dwa dowolne kwadraty czy trójkąty równoboczne.

Na rysunku poniżej podobne są czworokąty F_1 i F_2. Żaden z nich nie jest podobny do czworokąta F_3.



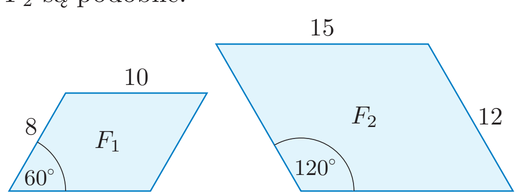
Dwa wielokąty są **podobne**, jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

> Jeśli figury F_1 i F_2 są podobne, to piszemy $F_1 \sim F_2$.

Przykład 1

Uzasadnij, że równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.

Długości boków równoległoboków F_1 i F_2 są proporcjonalne, ponieważ $\frac{15}{10} = \frac{12}{8}$, a ich odpowiednie kąty są równe. Zatem $F_1 \sim F_2$.



Ćwiczenie 1

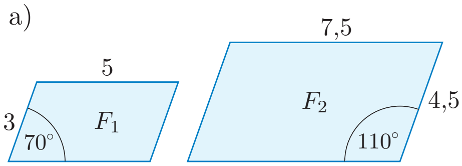
Dany jest prostokąt P_1 o bokach $a = 2{,}4$ i $b = 1{,}8$. Sprawdź, czy prostokąt ten jest podobny do prostokąta P_2 o bokach c i d.

a) $c = 3{,}6,\ \ d = 2{,}7$ b) $c = 4,\ \ d = 6$ c) $c = 54,\ \ d = 72$

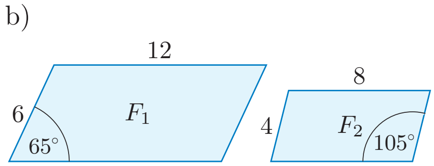
Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.

a)



b)



Uczeń:
- wyjaśnia pojęcie figur podobnych,
- oblicza długości boków w wielokątach podobnych,
- wykorzystuje zależności między obwodami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa do rozwiązywania zadań,
- udowadnia elementarne własności wielokątów podobnych.

Ćwiczenie 1

$\frac{a}{b} = \frac{2{,}4}{1{,}8} = \frac{4}{3}$

a) tak, $\frac{c}{d} = \frac{3{,}6}{2{,}7} = \frac{4}{3}$

b) nie, $\frac{d}{c} = \frac{6}{4} \neq \frac{4}{3}$

c) tak, $\frac{d}{c} = \frac{72}{54} = \frac{4}{3}$

Ćwiczenie 2

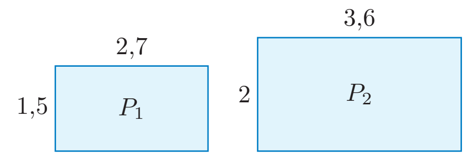
a) tak, $\frac{7{,}5}{5} = \frac{4{,}5}{3}$ oraz $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

b) nie, $180^\circ - 65^\circ \neq 105^\circ$

Stosunek długości odpowiadających sobie odcinków w wielokątach podobnych nazywamy **skalą podobieństwa** (zwykle oznaczamy ją literą k).

Przykład 2

Prostokąty P_1 i P_2 (rysunek obok) są podobne. Podaj skale podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz prostokąta P_1 do prostokąta P_2.



Skala podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa:

$$k_1 = \frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3}$$

Zwróć uwagę, że również $\frac{3{,}6}{2{,}7} = \frac{4}{3}$.

Skala podobieństwa prostokąta P_1 do prostokąta P_2 jest równa:

$$k_2 = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$$

Zauważ, że skale podobieństwa k_1 i k_2 są liczbami odwrotnymi.

Zwróć uwagę, że jeśli figury F_1 i F_2 są przystające, to są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa 1.

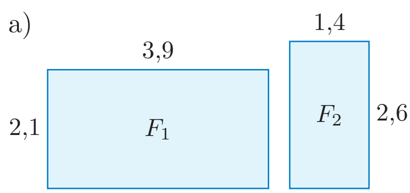
Ćwiczenie 3

a) F_1 do F_2: $\frac{3}{2}$, F_2 do F_1: $\frac{2}{3}$
b) F_1 do F_2: $\frac{3}{5}$, F_2 do F_1: $\frac{5}{3}$

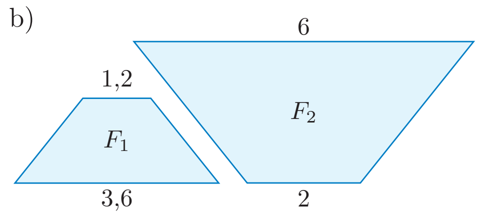
Ćwiczenie 3

Figury F_1 i F_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa figury F_2 do figury F_1 oraz skalę podobieństwa figury F_1 do figury F_2.

a)



b)



Przykład 3

Dane są prostokąty: P_1 o bokach $a_1 = 5$ i $b_1 = 8$ oraz podobny do niego P_2 o krótszym boku $a_2 = 15$. Oblicz długość drugiego boku prostokąta P_2.

Oznaczmy przez b_2 długość szukanego boku. Prostokąty są podobne, zatem:

$$\frac{b_2}{8} = \frac{15}{5} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

Stąd $\frac{b_2}{8} = 3$, czyli $b_2 = 24$.

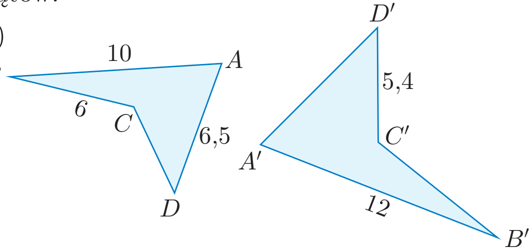
Długość boku b_2 można też wyznaczyć, obliczając najpierw skalę podobieństwa. Skala podobieństwa k prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa 3, co oznacza, że:

$$b_2 = k \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$$

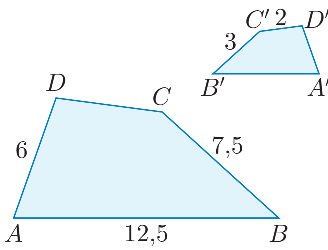
Ćwiczenie 4

Czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są podobne. Oblicz skalę podobieństwa większego czworokąta do mniejszego oraz brakujące długości boków tych czworokątów.

a)

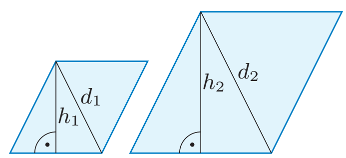


b)



Ćwiczenie 5

Przeczytaj informację w ramce, a następnie wyznacz szukane wielkości.

> Jeśli dwa wielokąty są podobne w skali k, to proporcjonalne są nie tylko ich boki, lecz także inne odpowiadające sobie odcinki, na przykład wysokości czy przekątne.
>
> $$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2} = k$$
>
> 
>

Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach długości 6 cm i 12 cm. Jego krótsza przekątna tworzy z jego krótszym bokiem kąt prosty. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$, a jego krótsza przekątna ma długość $9\sqrt{3}$ cm.

a) Oblicz obwód równoległoboku $A'B'C'D'$.

b) Oblicz wysokości obu równoległoboków.

Zadania

1. Oblicz skalę podobieństwa kwadratu K_1 o boku 5 cm do kwadratu K_2:

a) o przekątnej $8\sqrt{2}$ cm, b) o obwodzie 40 cm.

2. Trapez o podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz skalę podobieństwa otrzymanych trapezów.

3. Dany jest prostokąt P o bokach długości 12 cm i 8 cm. Oblicz obwód prostokąta P', jeśli skala podobieństwa prostokąta:

a) P' do P jest równa 3, b) P do P' jest równa 2.

D **4.** Uzasadnij, że dwa prostokąty są podobne, gdy stosunek długości do szerokości jest w obu prostokątach taki sam.

Ćwiczenie 4

a) $k = 1{,}2$, $|CD| = 4{,}5$, $|A'D'| = 7{,}8$, $|B'C'| = 7{,}2$

b) $k = 2{,}5$, $|CD| = 5$, $|A'B'| = 5$, $|A'D'| = 2{,}4$

Ćwiczenie 5

Krótsza przekątna równoległoboku $ABCD$: $d = 6\sqrt{3}$, stąd skala podobieństwa $A'B'C'D'$ do $ABCD$ wynosi: $k = \frac{3}{2}$.

a) $Ob_{ABCD} = 36$, czyli $Ob_{A'B'C'D'} = 36 \cdot \frac{3}{2} = 54$

b) Niech krótsza przekątna równoległoboku $ABCD$ łączy wierzchołki B i D, wówczas pole trójkąta ABD:

$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}$, czyli $h_1 = 3\sqrt{3}$.

$P_{ABCD} = 36\sqrt{3} = 6 \cdot h_2$

Stąd druga wysokość $h_2 = 6\sqrt{3}$.

Wysokości $A'B'C'D'$:

$h_1' = 3\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$,

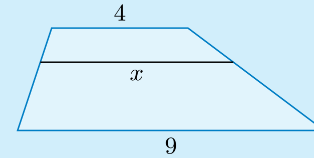
$h_2' = 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = 9\sqrt{3}$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) Bok K_2 ma długość 8 cm, czyli skala podobieństwa K_1 do K_2: $k = \frac{5}{8}$.

b) Bok K_2 ma długość 10 cm, czyli skala podobieństwa K_1 do K_2: $k = \frac{1}{2}$.

2.



$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9},\ x > 0$$

$$x = 6$$

Zatem skala podobieństwa:

$k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

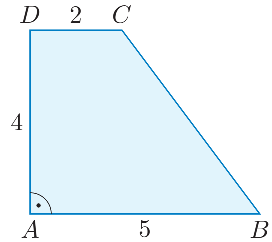
3. a) $Ob' = 40 \cdot 3 = 120$ [cm]

b) $Ob' = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$ [cm]

4. W prostokątach wszystkie kąty mają miarę 90°, więc warunek równości odpowiednich kątów jest spełniony. Do wykazania pozostała proporcjonalność odpowiednich boków. Rozważmy dwa prostokąty o bokach odpowiednio: a, b i a', b'.
Z założenia $\frac{a}{b} = k$ oraz $\frac{a'}{b'} = k$, czyli $a = bk$ oraz $a' = b'k$, stąd $\frac{a}{a'} = \frac{bk}{b'k} = \frac{b}{b'}$.
Zatem prostokąty te są podobne.

5. a) Dwa romby są podobne w skali $k = \frac{5}{2}$. Oblicz obwód każdego z nich, jeśli długości przekątnych mniejszego są równe 12 i 16.

b) Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 10 i 24, obwód podobnego do niego rombu $A'B'C'D'$ jest równy 78. Oblicz skalę podobieństwa większego rombu do mniejszego.

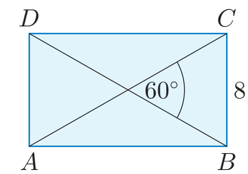


6. Trapez $A'B'C'D'$ o obwodzie równym 24 jest podobny do trapezu prostokątnego $ABCD$ (rysunek obok). Oblicz długości boków trapezu $A'B'C'D'$.

7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach długości 9 cm, 12 cm i 15 cm. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = \frac{25}{24}$. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną w każdym z tych trójkątów oraz sumę ich obwodów.

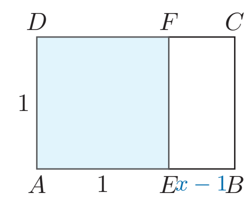
8. Dwa kwadraty o przekątnych długości d_1 i d_2 są podobne w skali $k = \sqrt{2}$. Oblicz sumę obwodów tych kwadratów, jeśli $d_1 + d_2 = 2$.

9. Prostokąt $A'B'C'D'$ jest podobny do prostokąta $ABCD$ (rysunek obok). Oblicz skalę podobieństwa tych figur, jeśli obwód prostokąta $A'B'C'D'$ jest równy $20 + 20\sqrt{3}$.



D 10. Prostokąt o bokach długości x i 4, gdzie $x > 4$, jest podobny do prostokąta o bokach długości 6 i $x+5$. Uzasadnij, że suma obwodów tych prostokątów jest równa 70.

D 11. Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1. Uzasadnij, że po odcięciu od tego prostokąta kwadratu o boku 1 (rysunek obok) otrzymamy prostokąt $BCFE$ podobny do prostokąta $ABCD$.
Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nosi nazwę **złotej liczby**.



Powtórzenie

12. Czy prostokąty o podanych wymiarach są podobne? Jeśli tak, to oblicz ich skalę podobieństwa.

a) 12×18 oraz $5 \times 7{,}5$ b) $1{,}5 \times 2{,}5$ oraz $10{,}5 \times 17{,}5$

13. Prostokąt P_1 o bokach 6 cm i 9 cm jest podobny do prostokąta P_2. Oblicz długości boków prostokąta P_2, jeśli jego:

a) obwód jest równy 50 cm, b) przekątna ma długość $2\sqrt{13}$ cm.

5. a) Długość boku mniejszego rombu: $a_1 = 10$
Obwody rombów: $Ob_1 = 40$, $Ob_2 = \frac{5}{2} \cdot 40 = 100$
b) Bok rombu $ABCD$: $a = 13$, czyli $Ob_{ABCD} = 52$
Skala podobieństwa rombów: $k = \frac{78}{52} = \frac{3}{2}$

6. $|CB| = 5$, $Ob_{ABCD} = 16$
Skala podobieństwa $A'B'C'D'$ do $ABCD$: $k = \frac{24}{16} = 1{,}5$
Długości boków trapezu $A'B'C'D'$: 3; 6; 7,5; 7,5

7. $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot h$, czyli $h = 7{,}2$ cm
$h' = 7{,}2 \cdot \frac{25}{24} = 7{,}5$ [cm]
$Ob_{ABC} = 36$
Suma obwodów: $36 + \frac{25}{24} \cdot 36 = 73{,}5$ [cm]

8. $\begin{cases} a_1 = a_2\sqrt{2} \\ a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{2} = 2 \end{cases}$
$\begin{cases} a_1 = 2\sqrt{2} - 2 \\ a_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$
Suma obwodów: $4\sqrt{2}$

9. $|AC| = 16$, czyli $|AB| = 8\sqrt{3}$
$Ob_{ABCD} = 16 + 16\sqrt{3}$
Skala podobieństwa: $k = \frac{20(1+\sqrt{3})}{16(1+\sqrt{3})} = 1{,}25$

10. $x > 4$, więc $x + 5 > 6$
Z podobieństwa prostokątów: $\frac{x}{x+5} = \frac{4}{6}$, czyli $x = 10$.
Zatem suma obwodów tych prostokątów jest równa:
$28 + 42 = 70$

11. W prostokątach wszystkie kąty mają miarę 90°, czyli warunek równości odpowiednich kątów jest spełniony. Do wykazania pozostała proporcjonalność odpowiednich boków.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Zatem $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BE|}$, czyli prostokąty $ABCD$ i $BCFE$ są podobne.

12. a) tak, $k = 2{,}4$
b) tak, $k = \frac{1}{7}$

13. a) 10 cm, 15 cm
b) 4 cm, 6 cm

6.5. Trójkąty podobne

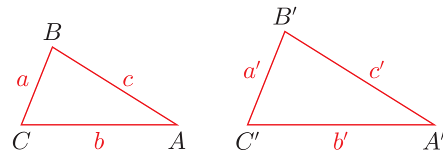
Aby ustalić podobieństwo trójkątów, nie musimy sprawdzać przystawania wszystkich kątów i proporcjonalności wszystkich boków. Możemy skorzystać z twierdzeń znanych jako **cechy podobieństwa trójkątów**.

Cecha BBB

> Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

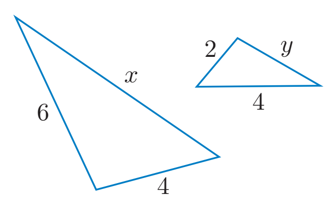
Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 1

Przedstawione na rysunku trójkąty są podobne. Oblicz długości boków x i y tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa.



Ćwiczenie 2

Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy te trójkąty są podobne?

a) 6, 8, 12 oraz 9, 12, 18

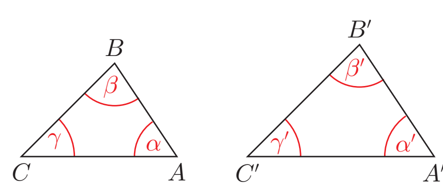
b) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ oraz 9, 15, 20

Cecha KKK

> Jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



D

Ćwiczenie 3

a) Uzasadnij, że jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

b) Uzasadnij, że trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ma miarę 27°, jest podobny do trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ma miarę 63°.

Ćwiczenie 3

a) Dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta. Niech miary tych kątów będą równe α i β.
Wówczas trzeci kąt pierwszego trójkąta jest równy $180^\circ - (\alpha + \beta)$ oraz trzeci kąt drugiego trójkąta jest równy $180^\circ - (\alpha + \beta)$, czyli kąty te również są równe. Na mocy cechy KKK trójkąty te są podobne.
b) Miary kątów pierwszego trójkąta: 27°, 90°, $90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$
Miary kątów drugiego trójkąta: 63°, 90°, $90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$
Na mocy cechy KKK trójkąty te są podobne.

Uczeń:
- podaje cechy podobieństwa trójkątów,
- sprawdza, czy dane trójkąty są podobne,
- oblicza długości boków trójkąta podobnego do danego w danej skali,
- układa odpowiednią proporcję, aby wyznaczyć szukane długości boków trójkątów podobnych,
- wykorzystuje podobieństwo trójkątów do rozwiązywania zadań, uzasadnia podobieństwo trójkątów, stosując cechy podobieństwa.

Ćwiczenie 1

$4 < 6 < x$ oraz $2 < y < 4$, zatem:

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{y} = \frac{x}{4}$$

czyli $x = 8$, $y = 3$.
Skala podobieństwa większego trójkąta do mniejszego jest równa 2.

Ćwiczenie 2

a) $\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{12}{18}$, zatem trójkąty są podobne.

b) $\frac{1\frac{1}{2}}{9} \neq \frac{3\frac{1}{2}}{20}$, zatem trójkąty nie są podobne.

Multiteka
- Wyznaczanie wysokości budynków z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów
- Fraktale

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 6.5

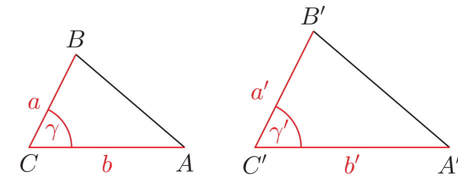
Generator testów i sprawdzianów

Cecha BKB

> Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



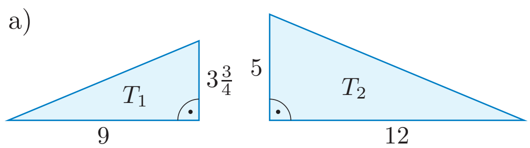
D Ćwiczenie 4

Dane są trójkąty prostokątne T_1 i T_2. Uzasadnij, że jeśli stosunek długości przyprostokątnych w trójkącie T_1 równa się stosunkowi długości przyprostokątnych w trójkącie T_2, to trójkąty te są podobne.

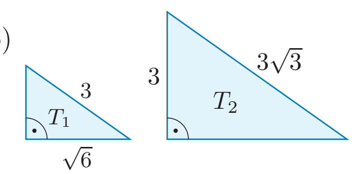
D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa trójkąta T_1 do trójkąta T_2.

a)

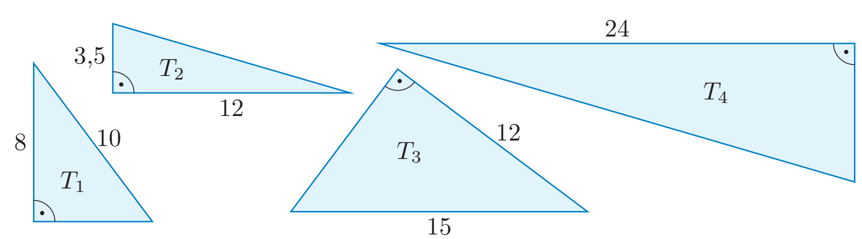


b)



Zadania

1. Wśród trójkątów przedstawionych na rysunku wskaż pary trójkątów podobnych. Dla każdej pary podaj skalę podobieństwa.



2. a) Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: 6, 8, 12. Najdłuższy bok trójkąta $A'B'C'$ jest równy 16 oraz $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Jaka jest skala podobieństwa tych trójkątów? Oblicz obwód trójkąta $A'B'C'$.

b) Trójkąt ABC, którego obwód jest równy 55, jest podobny do trójkąta o bokach długości: 4, 8, 10. Oblicz długości boków trójkąta ABC.

Odpowiedzi do zadań

1. T_1 i T_3, $k_1 = \frac{2}{3}$; T_2 i T_4, $k_2 = \frac{1}{2}$

2. **a)** Skala podobieństwa: $k = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$Ob = \frac{1}{k}(6+8+12) = \frac{4}{3} \cdot 26 = 34\frac{2}{3}$

b) Skala podobieństwa: $k = \frac{55}{4+8+10} = \frac{5}{2}$

Długości boków: $\frac{5}{2} \cdot 4 = 10$, $\frac{5}{2} \cdot 8 = 20$, $\frac{5}{2} \cdot 10 = 25$

Ćwiczenie 4

Niech a_1, b_1, a_2, b_2 będą przyprostokątnymi odpowiednio trójkątów T_1 i T_2.

Z założenia $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ wynika, że:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Trójkąty T_1 i T_2 są prostokątne, czyli kąt między przyprostokątnymi w każdym z trójkątów ma miarę 90°. Zatem na mocy cechy BKB: $T_1 \sim T_2$.

Ćwiczenie 5

a) Kąty między przyprostokątnymi są równe oraz równe są stosunki odpowiednich boków:

$$\frac{3{,}75}{5} = \frac{9}{12}$$

więc na podstawie cechy BKB:

$$T_1 \sim T_2$$

Skala podobieństwa: $k = \frac{3}{4}$.

b) Przyprostokątne trójkąta T_1: $\sqrt{3}$ i $\sqrt{6}$.

Przyprostokątne trójkąta T_2: 3 i $3\sqrt{2}$.

Kąty między przyprostokątnymi są równe oraz równe są stosunki odpowiednich boków:

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

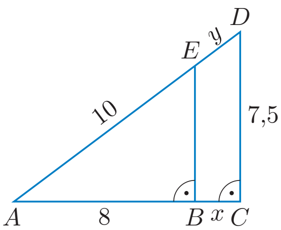
więc na mocy cechy BKB:

$$T_1 \sim T_2$$

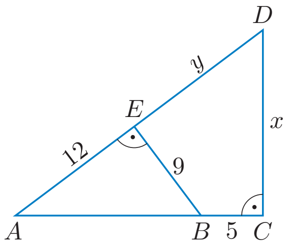
Skala podobieństwa: $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, oblicz długości odcinków x i y.

a)

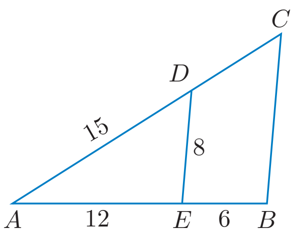


b)

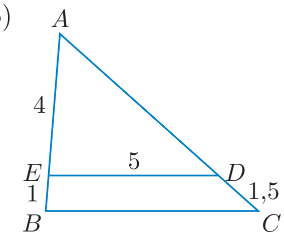


4. Wiedząc, że $ED \parallel BC$, oblicz obwód trójkąta ABC.

a)



b)



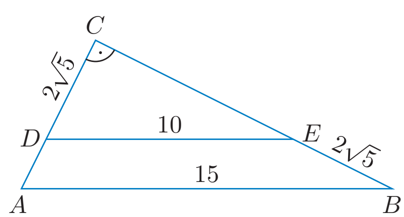
5. a) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych 12 i 16 jest podobny do trójkąta o obwodzie równym 6. Oblicz długości przeciwprostokątnych obu trójkątów.

b) Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 100 jest podobny do trójkąta o przyprostokątnych 12 i 3,5.
Oblicz obwody obu trójkątów.

D **6.** Uzasadnij, że $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Oblicz:

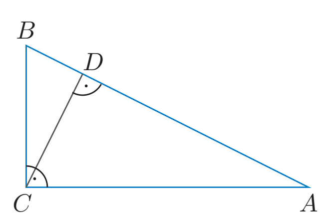
a) skalę podobieństwa tych trójkątów,

b) obwody tych trójkątów.



D **7.** a) Wypisz pary trójkątów podobnych (rysunek poniżej). Odpowiedź uzasadnij.

b) W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4 poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Oblicz długości odcinków, na jakie wysokość ta podzieliła przeciwprostokątną.



8. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki długości 2 cm i 8 cm.

3. **a)** $x = 2$, $y = 2{,}5$
b) $x = 15$, $y = 13$

4. **a)** Na mocy cechy KKK trójkąty ABC i AED są podobne w skali $k = \frac{12+6}{12} = \frac{3}{2}$, więc:
$Ob_{ABC} = \frac{3}{2}(12 + 8 + 15) =$
$= 52{,}5$
b) $|AD| = 6$; $|BC| = 6{,}25$;
$Ob = 18{,}75$

5. **a)** 20, $2\frac{1}{2}$ **b)** 224, 28

8. Na podstawie zadania 7:
$$\frac{2}{|BC|} = \frac{|BC|}{10}$$
czyli:
$$|BC| = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$
Ponadto:
$$\frac{8}{|CA|} = \frac{|CA|}{10}$$
czyli:
$$|CA| = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$
Pole trójkąta:
$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 20$ [cm^2]

6. $|CE| = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$, więc $|CB| = 6\sqrt{5}$ i $|AC| = \sqrt{15^2 - (6\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5}$.
$\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$ oraz kąt C jest wspólny dla obu trójkątów, zatem na mocy cechy BKB: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.
a) $k = \frac{3}{2}$
b) $Ob_{ABC} = 15 + 9\sqrt{5}$, $Ob_{DEC} = 10 + 6\sqrt{5}$

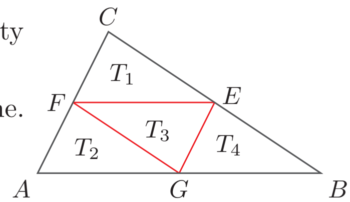
7. **a)** Niech $\sphericalangle CAD = \alpha$, wówczas: $\sphericalangle CBA = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle BCD = \alpha$, $\sphericalangle ACD = 90^\circ - \alpha$.
Zatem na mocy cechy KKK:
$$\triangle ABC \sim \triangle CBD,\ \triangle ABC \sim \triangle ACD,\ \triangle CBD \sim \triangle ACD$$
b) $|BC| = 3$, $|CA| = 4$, czyli $|AB| = 5$
$\triangle ABC \sim \triangle CBD$, stąd $\frac{|BD|}{3} = \frac{3}{5}$, czyli $|BD| = 1{,}8$
$\triangle ABC \sim \triangle ACD$, stąd $\frac{|DA|}{4} = \frac{4}{5}$, czyli $|DA| = 3{,}2$

D 9. W trójkącie ostrokątnym DEF poprowadzono wysokości DM i EN. Wykaż, że trójkąty FEN i FDM są podobne.

D 10. W trójkącie ABC połączono odcinkami punkty będące środkami boków (rysunek obok).

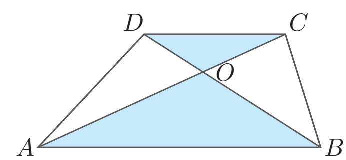
a) Wykaż, że trójkąty ABC i EFG są podobne.

b) Uzasadnij, że trójkąty: T_1, T_2, T_3 i T_4 są przystające.



D 11. a) Dany jest trapez o podstawach AB i CD. Jego przekątne przecinają się w punkcie O. Uzasadnij, że trójkąty ABO i CDO są podobne.

b) Jaka jest odległość punktu O (rysunek obok) od krótszej podstawy, jeśli wysokość trapezu wynosi 6 cm, a długości podstaw są równe odpowiednio 4 cm i 8 cm? Oblicz pola trójkątów ABO i CDO.



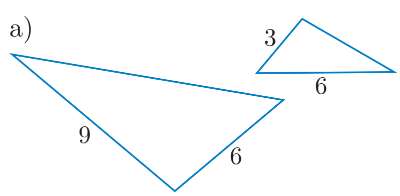
D 12. a) Dany jest trapez o podstawie AB i przekątnych AC i BD. Wykaż, że jeśli przekątne trapezu przecinają się w punkcie O, to pola trójkątów AOD i BOC są równe.

b) Dłuższa podstawa trapezu ma długość 10 cm. Punkt przecięcia przekątnych tego trapezu jest odległy o 5 cm od jego dłuższej podstawy i o 3 cm – od krótszej. Oblicz pola trójkątów, na które przekątne dzielą trapez.

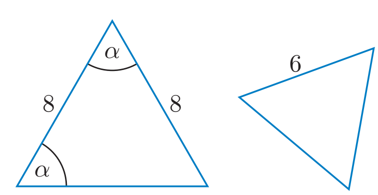
Powtórzenie

13. Trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długości pozostałych boków tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa.

a)



b)

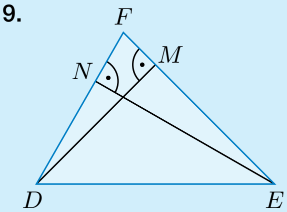


D 14. Uzasadnij, że trójkąty o podanych długościach boków są podobne.

a) 2, 7, 8 oraz 3, $10\frac{1}{2}$, 12 b) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 4 oraz 2, 4, $4\sqrt{2}$

15. Trójkąt prostokątny CDE ma przeciwprostokątną długości $2\sqrt{5}$ i jest podobny do trójkąta ABO o wierzchołkach: $A(-6,0)$, $B(0,3)$, $O(0,0)$. Podaj skalę podobieństwa tych trójkątów. Oblicz obwód i pole trójkąta CDE.

9.



Niech $\alpha = \sphericalangle DFE$.
Oba trójkąty są prostokątne i mają wspólny kąt α, zatem mają równe kąty. Na mocy cechy KKK otrzymujemy:
$\triangle FEN \sim \triangle FDM$.

10. a) $\frac{|CF|}{|CA|} = \frac{1}{2} = \frac{|CE|}{|CB|}$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle FCE$, zatem na mocy cechy BKB mamy: $\triangle ABC \sim \triangle FEC$, czyli:

$$|FE| = \tfrac{1}{2}|AB|$$

Analogicznie pokazujemy, że:

$$|FG| = \tfrac{1}{2}|BC|$$
$$|GE| = \tfrac{1}{2}|AC|$$

Zatem na mocy cechy BBB mamy: $\triangle ABC \sim \triangle EFG$.

b) $|AG| = |GB| = |FE| = \frac{1}{2}|AB|$

$|FG| = |EB| = |CE| = \frac{1}{2}|CB|$

$|AF| = |GE| = |FC| = \frac{1}{2}|AC|$

Zatem trójkąty: T_1, T_2, T_3 i T_4 są przystające na mocy cechy BBB.

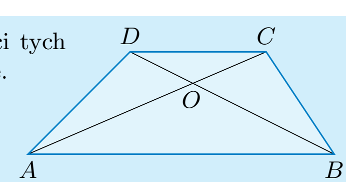
11. a) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$ jako kąty wierzchołkowe
$\sphericalangle BAO = \sphericalangle DCO$ jako kąty naprzemianległe
$\sphericalangle ABO = \sphericalangle CDO$ jako kąty naprzemianległe
Na mocy cechy KKK mamy: $\triangle ABO \sim \triangle CDO$.

b) 2 cm, $P_{\triangle ABO} = 16\ \text{cm}^2$, $P_{\triangle CDO} = 4\ \text{cm}^2$

12. a) Zauważmy, że $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD}$, gdyż wysokości tych trójkątów opuszczone na wspólny bok AB są równe.

$$P_{\triangle BOC} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABO}$$
$$P_{\triangle AOD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABO}$$

Zatem $P_{\triangle BOC} = P_{\triangle AOD}$.



b) 25 cm², 15 cm², 15 cm², 9 cm²

13. a) 12 i 4,5, $k = 2$ **b)** 8, 6, 6, $k = \frac{4}{3}$

14. a) $\frac{2}{3} = \frac{7}{\frac{21}{2}} = \frac{8}{12}$, zatem trójkąty są podobne.

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{4}{4\sqrt{2}}$, zatem trójkąty są podobne.

15. $k = \frac{2}{3}$, $Ob = 6 + 2\sqrt{5}$, $P = 4$

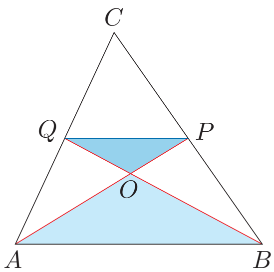
Warto wiedzieć

Proste i odcinki pomocnicze

Przeprowadzając dowody w geometrii, często dorysowujemy pomocnicze odcinki lub proste.

D **1.** Udowodnij, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

Rozpatrzmy środkowe AP i BQ trójkąta ABC. Punkt O jest punktem ich przecięcia. Rysujemy pomocniczy odcinek PQ.



Uzasadnij kolejno, że:

a) odcinek PQ jest równoległy do odcinka AB,

b) trójkąty ABO i PQO są podobne,

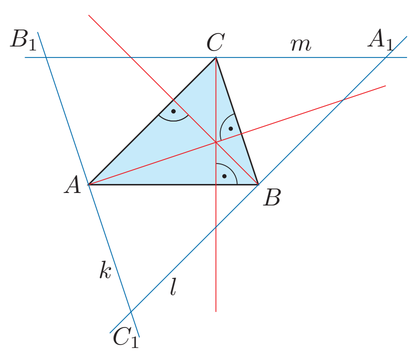
c) punkt O dzieli każdą ze środkowych AP i BQ w stosunku $2:1$, gdy liczymy od wierzchołka.

Przeprowadź analogiczne rozumowanie dla środkowych poprowadzonych z wierzchołków A i C, a następnie uzasadnij, że wszystkie środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

D **2.** Udowodnij, że proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dany jest trójkąt ABC. Rysujemy proste pomocnicze:

- prosta k jest równoległa do boku BC i przechodzi przez wierzchołek A,
- prosta l jest równoległa do boku AC i przechodzi przez wierzchołek B,
- prosta m jest równoległa do boku AB i przechodzi przez wierzchołek C.



Punkty przecięcia prostych k, l, m oznaczamy przez A_1, B_1, C_1 – jak na rysunku. Uzasadnij kolejno, że:

a) czworokąty $ABCB_1$ i AC_1BC są równoległobokami (skąd wynika, że $|AC_1| = |AB_1|$, analogicznie $|BC_1| = |BA_1|$ i $|CA_1| = |CB_1|$),

b) punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta $A_1B_1C_1$ jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC.

Uwaga. Zauważmy, że powyższe rozumowanie jest takie samo dla trójkąta rozwartokątnego czy prostokątnego.

1. a) Z założenia $|CQ| = |QA|$ i $|CP| = |PB|$, stąd:

$$\frac{|CQ|}{|CP|} = \frac{|QA|}{|PB|}$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa odcinki PQ i AB są równoległe.

b) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle POQ$ (kąty wierzchołkowe)

$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OPQ$ (kąty naprzemianległe)

$\sphericalangle OBA = \sphericalangle OQP$ (kąty naprzemianległe)

Na mocy cechy KKK:

$$\triangle ABO \sim \triangle PQO$$

c) Z założenia $\frac{|CA|}{|CQ|} = \frac{2}{1}$.

$\triangle ABC \sim \triangle QPC$, więc:

$$\frac{|AB|}{|QP|} = \frac{|CA|}{|CQ|} = \frac{2}{1}$$

$\triangle ABO \sim \triangle PQO$, zatem:

$$\frac{|AO|}{|PO|} = \frac{|BO|}{|QO|} = \frac{|AB|}{|QP|} = \frac{2}{1}$$

Analogiczne rozumowanie prowadzimy dla środkowych poprowadzonych z wierzchołków A i C. Punkt przecięcia tych środkowych również dzieli każdą z nich w stosunku $2:1$ (licząc od wierzchołka trójkąta). Zatem punkt O należy do wszystkich trzech środkowych trójkąta ABC.

2. a) Bok B_1C jest zawarty w prostej m, która jest równoległa do boku AB.
Bok AB_1 jest zawarty w prostej k, która jest równoległa do boku BC.
Zatem czworokąt $ABCB_1$ jest równoległobokiem.
Bok C_1B jest zawarty w prostej l, która jest równoległa do boku AC.
Bok C_1A jest zawarty w prostej k, która jest równoległa do boku BC.
Zatem czworokąt AC_1BC jest równoległobokiem.

b) Wysokości trójkąta ABC są zawarte w symetralnych boków trójkąta $A_1B_1C_1$.
Dla dowolnego trójkąta symetralne jego boków przecinają się w jednym punkcie (ćwiczenie 4, s. 229), zatem wysokości trójkąta ABC również przecinają się w jednym punkcie.

6.6. Pola wielokątów podobnych

Uczeń:
– wykorzystuje zależności między polami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa do rozwiązywania zadań.

Przykład 1

Bok jednego kwadratu jest o 20% dłuższy od boku drugiego kwadratu. Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów? Ile wynosi stosunek ich pól?

Niech bok pierwszego kwadratu ma długość a, wówczas bok drugiego z nich ma długość $a + 20\% \, a = 120\% \, a = \frac{6}{5}a$.

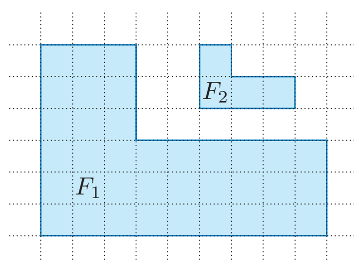
Zatem skala podobieństwa $k = \frac{6}{5}$.

Pola kwadratów są odpowiednio równe a^2 i $\frac{36}{25}a^2$, zatem stosunek ich pól jest równy $\frac{36}{25}$. Zauważmy, że $\frac{36}{25} = k^2$.

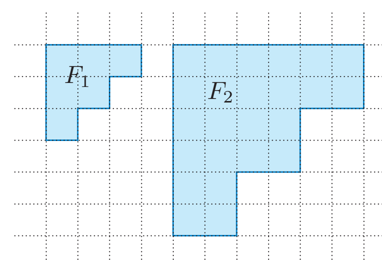
Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielokąty podobne F_1 i F_2. Podaj skalę podobieństwa i oblicz stosunek pola figury F_2 do pola figury F_1.

a)



b)



Ćwiczenie 1
a) $k = \frac{1}{3}$, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{9}$
b) $k = 2$, $\frac{P_2}{P_1} = 4$

Przykład 2

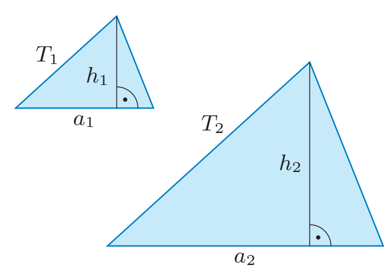
Trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali k. Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta T_2 do pola trójkąta T_1 jest równy k^2.

Pole trójkąta T_1: $P_1 = \frac{1}{2}a_1h_1$.

Dla trójkąta T_2 mamy:
$a_2 = k \cdot a_1, \;\; h_2 = k \cdot h_1$.

Stąd pole trójkąta T_2:
$P_2 = \frac{1}{2}a_2h_2 = \frac{1}{2}(k \cdot a_1)(k \cdot h_1) = \frac{1}{2}k^2 \cdot a_1h_1$

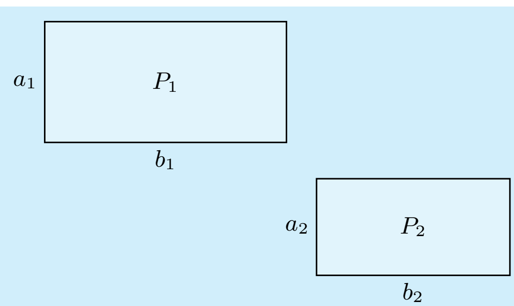
Zatem $\frac{P_2}{P_1} = \dfrac{\frac{1}{2}k^2a_1h_1}{\frac{1}{2}a_1h_1} = k^2$.



D Ćwiczenie 2

Prostokąt P_2 jest podobny do prostokąta P_1 w skali k. Uzasadnij, że stosunek pola prostokąta P_2 do pola prostokąta P_1 jest równy k^2.

Ćwiczenie 2
Pole prostokąta P_1: a_1b_1.
Boki prostokąta P_2:
$$a_2 = k \cdot a_1, \; b_2 = k \cdot b_1$$
Stąd pole trójkąta P_2:
$$a_2b_2 = (k \cdot a_1)(k \cdot b_1) = k^2 \cdot a_1b_1$$
Zatem stosunek pól:
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{k^2a_1b_1}{a_1b_1} = k^2$$



Twierdzenie

> Jeśli skala podobieństwa figur podobnych równa się k, to stosunek ich pól jest równy k^2.

Ćwiczenie 3

Jaka jest skala podobieństwa dwóch kwadratów, jeśli pole jednego z nich jest:

a) o 19% mniejsze od pola drugiego,   b) o 125% większe od pola drugiego?

Ćwiczenie 4

Dany jest trapez prostokątny T_1 o podstawach długości 5 cm i 7 cm oraz wysokości równej 4 cm. Pole trapezu T_2 podobnego do trapezu T_1 jest równe 6 cm^2. Oblicz skalę podobieństwa trapezu T_2 do trapezu T_1 oraz ich obwody.

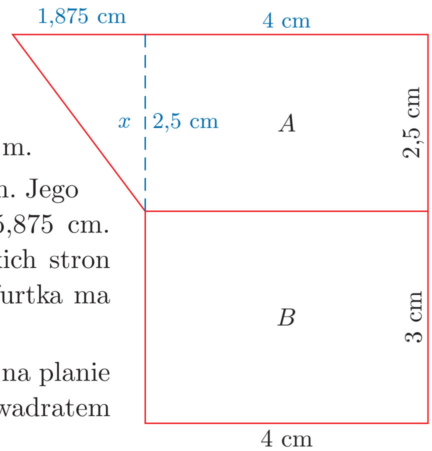
Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono plan sąsiadujących działek budowlanych.

a) Wyznacz skalę planu, jeśli działka B jest prostokątem o wymiarach 32 m $\times$ 24 m.

b) Działka A jest trapezem prostokątnym. Jego najdłuższy bok ma na planie długość 5,875 cm. Czy na ogrodzenie działki A ze wszystkich stron wystarczy 125 m bieżących siatki, jeśli furtka ma mieć szerokość 1,5 m?

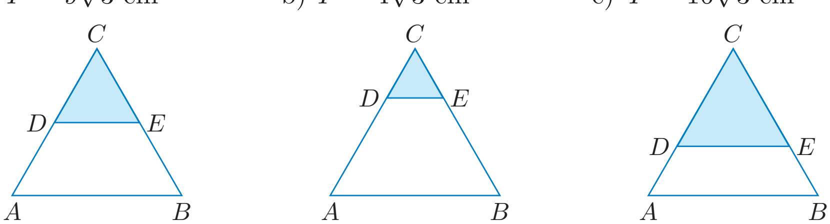
c) Jaka jest powierzchnia działki C, jeśli na planie wykonanym w tej samej skali jest ona kwadratem o polu równym 9 cm^2?



Ćwiczenie 6

Dany jest trójkąt równoboczny ABC, którego bok ma długość 12 cm. Odcinek DE jest równoległy do boku AB, a pole trójkąta DEC jest równe P. Wyznacz stosunek długości odcinków DC do AC i oblicz obwód trapezu $ABED$.

a) $P = 9\sqrt{3}$ cm^2 b) $P = 4\sqrt{3}$ cm^2 c) $P = 16\sqrt{3}$ cm^2



Ćwiczenie 3

a) $k^2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{0{,}81P_2}{P_2} = 0{,}81$, zatem $k = 0{,}9$.

b) $k^2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{2{,}25P_2}{P_2} = 2{,}25$, zatem $k = 1{,}5$.

Ćwiczenie 4

Pole trapezu T_1: $P_1 = 24$ cm^2

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, zatem $k = \frac{1}{2}$.

Drugie ramię trapezu T_1 ma długość $2\sqrt{5}$ cm.

$Ob_1 = (16 + 2\sqrt{5})$ cm,

$Ob_2 = (8 + \sqrt{5})$ cm

Ćwiczenie 5

a) $\frac{3200}{4} = 800$, zatem skala planu: 1:800.

b) $x^2 = (1{,}875)^2 + (2{,}5)^2$

$x = 3{,}125$

Obwód działki na planie:

$5{,}875 + 2{,}5 + 4 + 3{,}125 = 15{,}5$ [cm]

Obwód działki w rzeczywistości:

$15{,}5 \text{ cm} \cdot 800 = 12\,400 \text{ cm} = 124 \text{ m}$

Potrzebna siatka ma długość:

$124 - 1{,}5 = 122{,}5 < 125$ [m]

c) $P = 9 \text{ cm}^2 \cdot 800^2 = 5\,760\,000 \text{ cm}^2 = 576 \text{ m}^2$

Ćwiczenie 6

$P_{ABC} = 36\sqrt{3}$ cm^2

a) $k = \frac{1}{2}$, $|DE| = |AD| = |BE| = 6$ cm, $Ob = 30$ cm

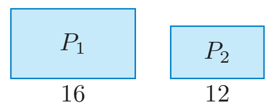
b) $k = \frac{1}{3}$, $|DE| = 4$ cm, $|AD| = |BE| = 8$ cm, $Ob = 32$ cm

c) $k = \frac{2}{3}$, $|DE| = 8$ cm, $|AD| = |BE| = 4$ cm, $Ob = 28$ cm

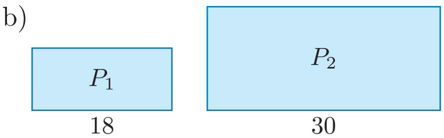
Zadania

1. Prostokąty P_1 i P_2 są podobne. Oblicz skalę podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz pole prostokąta P_2, jeśli pole prostokąta P_1 jest równe 144 cm^2.

a)



b)



2. Prostokąt o bokach długości 6 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta o obwodzie 60 cm. Oblicz pole większego prostokąta.

3. a) Trójkąt prostokątny T_2 jest podobny do trójkąta T_1 o polu równym 45 cm^2 w skali $k = \frac{2}{3}$. Oblicz obwód trójkąta T_2, jeśli jedna z jego przyprostokątnych ma długość 10 cm.

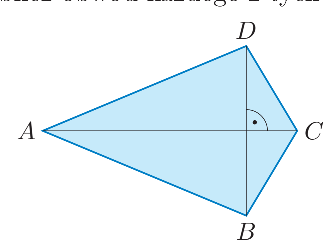
b) Romb R_2 jest podobny do rombu R_1 w skali $k = 3$. Pole rombu R_2 jest równe 648 cm^2. Oblicz obwód każdego z rombów, jeśli jedna z przekątnych rombu R_1 ma długość 6 cm.

4. Dany jest równoległobok R_1, którego boki mają długości 4 cm i 6 cm. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest prostopadła do jego krótszych boków. Równoległobok R_2 o polu $200\sqrt{5}$ cm^2 jest podobny do równoległoboku R_1. Oblicz obwód równoległoboku R_2.

5. a) Suma pól dwóch figur podobnych jest równa 340 dm^2, a ich skala podobieństwa $k = 4$. Oblicz pole każdej z tych figur.

b) Suma pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych jest równa 180 cm^2, a ich skala podobieństwa $k = 3$. Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.

6. Przekątne deltoidu $ABCD$ mają długości: $|AC| = 15$ cm i $|BD| = 10$ cm. Oblicz pole powierzchni latawca podobnego do tego deltoidu, jeśli jego wymiary są czterokrotnie większe.



7. Wielokąt F_1 jest podobny do wielokąta F_2 w skali $\frac{3}{4}$. Stosunek pól wielokątów podobnych F_2 i F_3 jest równy $\frac{4}{9}$. Oblicz skalę podobieństwa wielokąta F_3 do F_1.

Odpowiedzi do zadań

1. **a)** $k = 0{,}75$, $P = 81$ cm^2
b) $k = \frac{5}{3}$, $P = 400$ cm^2

2. 200 cm^2

3. **a)** Pole trójkąta T_2:
$P_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 45 = 20$ [cm^2]
Długość drugiej przyprostokątnej: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot b = 20$, czyli $b = 4$ cm.
Długość przeciwprostokątnej:
$c = \sqrt{10^2 + 4^2} = 2\sqrt{29}$ [cm]
Obwód trójkąta T_2:
$Ob = (14 + 2\sqrt{29})$ cm
b) Pole rombu R_1:
$P_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 648 = 72$ [cm^2]
Długość drugiej przekątnej rombu R_1:
$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot d = 72$, czyli $d = 24$ cm
Długość boku rombu R_1:
$a = \sqrt{3^2 + 12^2} = 3\sqrt{17}$ [cm]
Obwód rombu R_1:
$Ob_1 = 12\sqrt{17}$ cm
Obwód rombu R_2:
$Ob_2 = 36\sqrt{17}$ cm

4. Obwód równoległoboku R_1:
$Ob_1 = 20$ cm
Długość krótszej przekątnej równoległoboku R_1:
$d = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$ [cm]
Pole równoległoboku R_1:
$P_1 = 4 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$ [cm^2]
$\frac{P_2}{P_1} = \frac{200\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = 25$
Skala podobieństwa R_2 do R_1:
$k = 5$
Obwód równoległoboku R_2:
$Ob_2 = 100$ cm

5. **a)** $P_1 + P_2 = 340$ i $\frac{P_1}{P_2} = 4^2$, stąd $P_1 = 320$ [dm^2], $P_2 = 20$ [dm^2].
b) $P_1 + P_2 = 180$ i $\frac{P_1}{P_2} = 3^2$, stąd $P_1 = 162$ [cm^2], $P_2 = 18$ [cm^2].
Długość przyprostokątnej większego trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot a^2 = 162$, czyli $a = 18$ cm.
Długość przeciwprostokątnej większego trójkąta: $c = 18\sqrt{2}$ cm.
Obwód większego trójkąta: $Ob_1 = (36 + 18\sqrt{2})$ cm.
Obwód mniejszego trójkąta: $Ob_2 = (12 + 6\sqrt{2})$ cm.

6. Pole latawca: $P = \frac{60 \cdot 40}{2} = 1200$ [cm^2]

7. $\frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{4}$, czyli $F_1 = \frac{3}{4}F_2$
$\frac{F_3}{F_2} = \frac{3}{2}$, czyli $F_3 = \frac{3}{2}F_2$
$\frac{F_3}{F_1} = \frac{\frac{3}{2}F_2}{\frac{3}{4}F_2} = 2$

8. Trzy odbitki zdjęć to prostokąty podobne P_1, P_2 i P_3. Pole prostokąta P_2 jest o 44% większe od pola prostokąta P_1, a pole prostokąta P_3 jest o 125% większe od pola prostokąta P_1. Oblicz wymiary prostokąta P_3, jeśli wymiary prostokąta P_2 są równe 24 cm × 36 cm.

9. W trójkącie prostokątnym ABC, którego przeciwprostokątna AB ma długość 15 cm, poprowadzono wysokość CD. Stosunek pól trójkątów ADC i BCD jest równy 4. Oblicz obwód trójkąta ABC.

10. Przekątne trapezu o podstawach AB i CD oraz wysokości równej 10 przecinają się w punkcie P. Oblicz odległości punktu P od podstaw trapezu, wiedząc, że stosunek pola trójkąta ABP do pola trójkąta CDP jest równy $\frac{9}{4}$.

11. Trapez o wysokości równej 5 cm i podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz pole każdego z trapezów otrzymanych w wyniku tego podziału.

12. Działka budowlana o powierzchni 1025 m^2 ma kształt trapezu o podstawach 32 m i 50 m. Działkę tę podzielono prostą równoległą do podstaw trapezu na dwie działki będące trapezami podobnymi. Oblicz pole każdej z nowo powstałych działek.

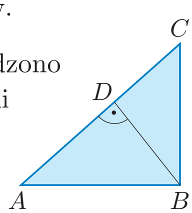
Powtórzenie

13. a) Prostokąty P_1 i P_2 o przekątnych długości $\sqrt{12}$ cm i $\sqrt{18}$ cm są podobne. Oblicz stosunek pól tych prostokątów.

b) Trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Pole trójkąta T_2 jest o 300% większe od pola trójkąta T_1. Podaj stosunek obwodów tych trójkątów.

14. W trójkącie prostokątnym ABC (rysunek obok) poprowadzono wysokość BD. Oblicz podany stosunek pól trójkątów, jeśli $|BD| : |CB| = 4 : 5$.

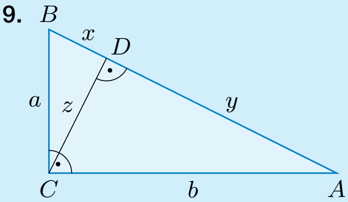
a) $P_{\triangle ABD} : P_{\triangle ABC}$ b) $P_{\triangle BCD} : P_{\triangle ABD}$



15. Dane są dwa romby, obydwa o kącie ostrym 60°. Stosunek ich pól wynosi 9 : 4, a pole większego jest równe $18\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz sumę obwodów tych rombów.

8. $P_2 = 1{,}44P_1$ i $P_3 = 2{,}25P_1$, czyli $\frac{P_3}{P_2} = \frac{2{,}25}{1{,}44}$
Skala podobieństwa prostokątów P_3 do P_2: $k = \frac{1{,}5}{1{,}2} = 1{,}25$
Wymiary prostokąta P_3:
30 cm×45 cm

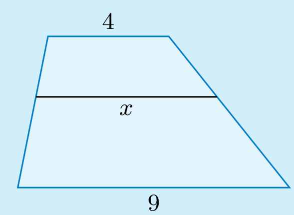
9.



$\frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 2$, czyli $y = 2z$,
$x = \frac{z}{2}$
$x + y = 15$, czyli $z = 6$ cm,
$x = 3$ cm, $y = 12$ cm
$a = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ [cm]
$b = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$[cm]
$Ob = \left(15 + 9\sqrt{5}\right)$ cm

10. Skala podobieństwa $\triangle ABP$ do $\triangle CDP$: $k = \frac{3}{2}$, $h_{ABP} = 6$ i $h_{CDP} = 4$.

11.



$x = 6$ cm, $k = \frac{2}{3}$
Pole mniejszego trapezu:
$P_1 = 10$ cm^2
Pole większego trapezu:
$P_2 = 22{,}5$ cm^2

12. Wysokość wyjściowego trapezu: $h = 25$ m. Niech $x > 0$ będzie długością odcinka dzielącego działkę. Wówczas $\frac{32}{x} = \frac{x}{50}$, czyli $x = 40$ m.
Skala podobieństwa nowych działek: $k = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$, czyli prosta podzieliła wysokość wyjściowego trapezu na odcinki o długościach: $11\frac{1}{9}$ m i $13\frac{8}{9}$ m.
Pole mniejszej działki: 400 m^2
Pole większej działki: 625 m^2

13. a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$

14. a) 16 : 25 **b)** 9 : 16

15. Niech a będzie długością boku większego rombu. Wówczas jego pole jest równe:
$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$$
czyli $a = 6$ [cm]. Suma obwodów: $24 + \frac{2}{3} \cdot 24 = 40$ [cm]

Fraktale

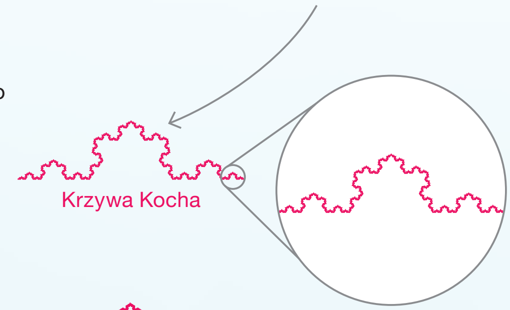
Fraktal to figura geometryczna cechująca się samopodobieństwem – dowolnie małe części tej figury są podobne do całości.

Krzywa Kocha i śnieżynka Kocha

Przykładem fraktala jest **krzywa Kocha** (jej konstrukcję opisał w 1904 r. szwedzki matematyk Helge von Koch). Oto kolejne etapy jej powstawania.

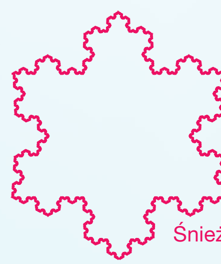
Na każdym kolejnym etapie konstrukcji krzywej Kocha jej długość powiększa się o $\frac{1}{3}$ długości krzywej z poprzedniego etapu. Jeśli zatem długość początkowego odcinka jest równa 1, to kolejne krzywe mają długości:

$1, \frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \ldots$



Jeżeli konstrukcję krzywej przeprowadzimy na bokach trójkąta równobocznego, otrzymamy figurę nazywaną **śnieżynką Kocha**.

Śnieżynka Kocha ma skończone pole, ale jest ograniczona przez krzywą o nieskończonej długości.



SAMOPODOBIEŃSTWO

Powiększając dowolnie mały fragment krzywej Kocha, otrzymamy jej idealną kopię.

Trójkąt Sierpińskiego

Innym przykładem fraktala jest **trójkąt Sierpińskiego**. Konstrukcję, w której z trójkąta równobocznego wycina się kolejne trójkąty równoboczne, przedstawił w 1915 r. polski matematyk Wacław Sierpiński.

1 Czy potrafisz obliczyć pole ostatniej z pokazanych figur, jeśli pole wyjściowego trójkąta jest równe 1?

1. $\frac{27}{64}$

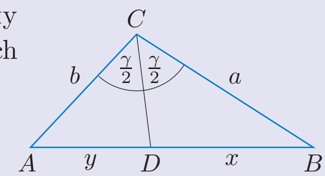
6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód

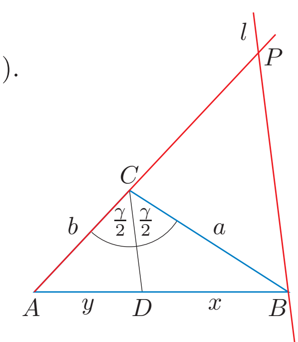
Rysujemy półprostą AC oraz prostą l równoległą do prostej CD przechodzącą przez punkt B. Punkt przecięcia półprostej AC z prostą l oznaczamy przez P.

Proste CD i BP są równoległe, więc:

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle APB$ oraz $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBP$ (uzasadnij).

Oznacza to, że trójkąt BPC jest równoramienny i $|CP| = |CB| = a$.

Z twierdzenia Talesa otrzymujemy: $\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|CP|}{|AC|}$, zatem $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.



Ćwiczenie 1

a) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego tego trójkąta dzieli jego przeciwprostokątną.

b) Przeciwprostokątna trójkąta o kątach 30°, 60°, 90° ma długość 2. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów dzielą boki tego trójkąta.

c) Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego na odcinki długości $\frac{15}{7}$ i $\frac{20}{7}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

d) Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 22,5°. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta, jeśli dłuższa przyprostokątna ma długość równą 1.

Uczeń:
- wykorzystuje twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie do rozwiązywania zadań,
- przeprowadza dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie oraz inne dowody, stosując twierdzenie o dwusiecznej.

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle APB$ (kąty odpowiadające)
$\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBP$ (kąty naprzemianległe)

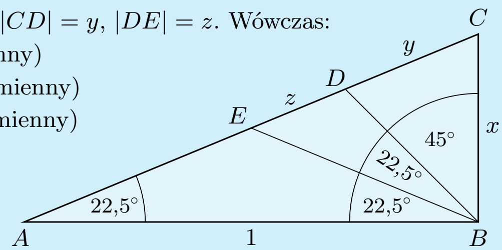
Ćwiczenie 1

a) Niech x, y będą odcinkami, na jakie dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną.
$x + y = 13$ i $\frac{x}{y} = \frac{5}{12}$
$x = 3\frac{14}{17}$, $y = 9\frac{3}{17}$

b) Długości przyprostokątnych: 1 i $\sqrt{3}$. Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości: $3-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}-1$. Dwusieczna kąta 60° dzieli przeciwległą przyprostokątną na odcinki długości: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dwusieczna kąta 30° dzieli przeciwległą przyprostokątną na odcinki długości: $4-2\sqrt{3}$ i $2\sqrt{3}-3$.

c) Niech a, b będą przyprostokątnymi trójkąta.
Przeciwprostokątna jest równa $\frac{15}{7} + \frac{20}{7} = 5$.
$a^2 + b^2 = 25$ i $a : b = \frac{15}{7} : \frac{20}{7} = \frac{3}{4}$, czyli $a = 3$, $b = 4$. Zatem $Ob = 12$.

d) Rozważmy $\triangle ABC$, niech $|BC| = x$, $|CD| = y$, $|DE| = z$. Wówczas:
$|BD| = |BC| = x$ ($\triangle BCD$ równoramienny)
$|BE| = |CE| = y + z$ ($\triangle CEB$ równoramienny)
$|AE| = |BE| = y + z$ ($\triangle AEC$ równoramienny)
Z twierdzenia o dwusiecznej kąta:
dla $\triangle ABC$ mamy: $\frac{x}{1} = \frac{y}{y+2z}$,
dla $\triangle ADB$ mamy: $\frac{x}{1} = \frac{z}{y+z}$.
$\frac{y}{y+2z} = \frac{z}{y+z}$, skąd $y = \sqrt{2}z$
Zatem $x = \frac{z}{y+z} = \frac{z}{\sqrt{2}z+z} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$



dlanauczyciela.pl | Kartkówka 6.7

Generator testów i sprawdzianów

Zadania

1. Dany jest trójkąt ABC o bokach $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB, jeśli:

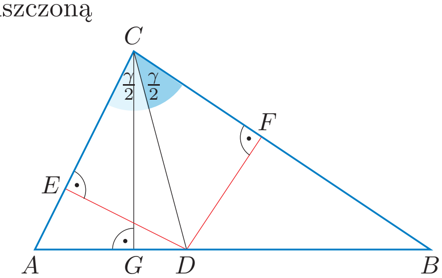
a) $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$, b) $a = 6$, $b = 10$, $c = 12$.

2. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC, którego przeciwprostokątna AB ma długość $\sqrt{2}$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie P. Oblicz obwody trójkątów BCP i BAP.

D **3.** Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Uzasadnij, że dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB na odcinki długości $\frac{ac}{a+b}$ i $\frac{bc}{a+b}$.

D **4.** Przeczytaj podany poniżej dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie. W miejscach oznaczonych $\boxed{?}$ podaj brakujące uzasadnienia.

Na rysunku odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB, a CG jest wysokością trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.



Stąd $\dfrac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \dfrac{|DB|}{|AD|}$ $\boxed{?}$

Odcinki DE i DF mają równe długości $\boxed{?}$. Zatem:

$$\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \boxed{?}$$

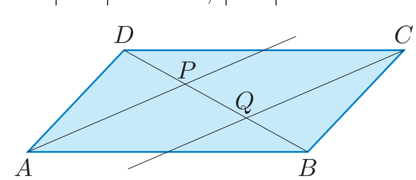
czyli prawdziwa jest proporcja $\dfrac{|DB|}{|AD|} = \dfrac{|BC|}{|AC|}$.

Powtórzenie

5. Dany jest trójkąt DEF o bokach $|EF| = d$, $|DF| = e$ i $|DE| = f$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta DEF dzieli bok DF, jeśli:

a) $d = 5$, $e = 6$, $f = 7$, b) $d = 12$, $e = 15$, $f = 18$.

D **6.** Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach $|AD| = 6$ cm, $|AB| = 12$ cm. Dwusieczne kątów BAD i BCD przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Uzasadnij, że punkty te dzielą przekątną BD na trzy odcinki równej długości.



Odpowiedzi do zadań

1. x, y – odcinki, na które dwusieczna podzieliła bok AB.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{6} \end{cases}$

$x = 1{,}25$; $y = 3{,}75$

b) $\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{x}{y} = \frac{6}{10} \end{cases}$

$x = 4{,}5$; $y = 7{,}5$

2. $|AC| = |BC| = 1$

$\begin{cases} |CP| + |PA| = 1 \\ \frac{|PA|}{|CP|} = \frac{\sqrt{2}}{1} \end{cases}$

$|CP| = \sqrt{2} - 1$, $|PA| = 2 - \sqrt{2}$

$|PB| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

$Ob_{BCP} = \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

$Ob_{BAP} = 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

3. Niech P będzie punktem przecięcia boku AB z dwusieczną kąta ACB. Wówczas:

$\frac{|PB|}{|AP|} = \frac{a}{b}$ i $|AP| + |PB| = c$

$|PB| = \frac{a}{b}|AP|$, czyli:

$|AP| + |PB| = \frac{b+a}{b}|AP| = c$

Zatem $|AP| = \frac{bc}{a+b}$ oraz

$|PB| = \frac{a}{b} \cdot \frac{bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b}$.

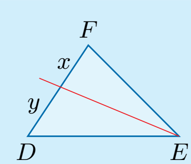
4. $\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}|DB| \cdot |CG|}{\frac{1}{2}|AD| \cdot |CG|} = \frac{|DB|}{|AD|}$

$\triangle CDE \equiv \triangle CDF$ na mocy cechy KBK

($\sphericalangle ECD = \sphericalangle FCD = \frac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle EDC = \sphericalangle FDC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ oraz $|CD|$ jest bokiem wspólnym trójkątów CDE i CDF)

$\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}|BC| \cdot |DF|}{\frac{1}{2}|AC| \cdot |DE|} = \frac{|BC|}{|AC|}$

5. x, y – odcinki, na jakie dwusieczna podzieliła bok DF.



a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{7} \end{cases}$

$x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{7}{2}$

b) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{12}{18} \end{cases}$

$x = 6$, $y = 9$

6. Niech $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle DAP = \sphericalangle BCQ = \frac{\alpha}{2}$.
Ponadto $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$ (kąty naprzemianległe) oraz $|AD| = |BC|$, czyli na mocy cechy KBK $\triangle DAP \equiv \triangle BCQ$. Zatem $|DP| = |QB| = x$.
Niech $|PQ| = y$. Wówczas z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie BCD:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{12}{6} = 2$$

Zatem $x + y = 2x$, co oznacza, że $x = y$, czyli punkty P i Q dzielą przekątną BD na trzy odcinki równej długości.

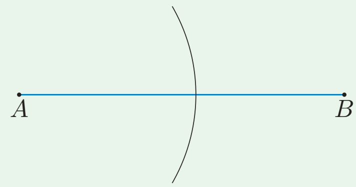
6.8. Zagadnienia uzupełniające

Problemy konstrukcyjne

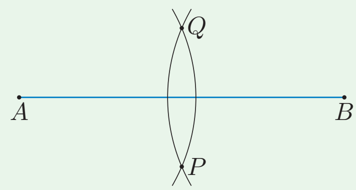
Klasyczne konstrukcje wykonuje się, korzystając tylko z cyrkla i linijki. Oto niektóre z nich.

Konstrukcja symetralnej odcinka

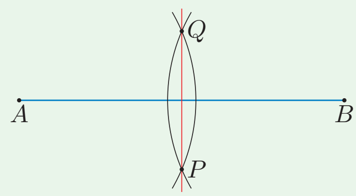
1. Z jednego końca odcinka rysujemy łuk okręgu o promieniu większym od połowy odcinka.



2. Z drugiego końca odcinka rysujemy łuk okręgu o tym samym promieniu. Punkty przecięcia łuków oznaczamy przez P i Q.

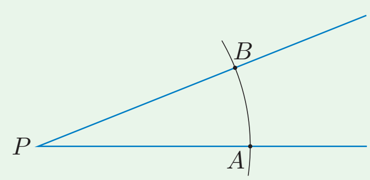


3. Rysujemy prostą PQ – jest ona symetralną odcinka AB, ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.

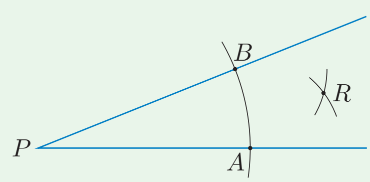


Konstrukcja dwusiecznej kąta

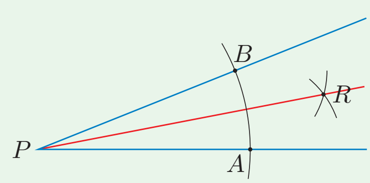
1. Z wierzchołka kąta rysujemy łuk okręgu przecinający jego ramiona. Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B.



2. Wewnątrz kąta rysujemy łuki okręgów o takim samym promieniu oraz środkach w punktach A i B. Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez R.



3. Rysujemy prostą PR – jest ona dwusieczną kąta APB, ponieważ trójkąty PAR i PBR są przystające (cecha BBB).

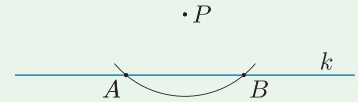


Multi*teka*

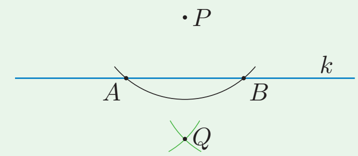
- Suma miar kątów wewnętrznych w wielokącie
- Konstrukcja symetralnej odcinka
- Konstrukcja dwusiecznej kąta
- Konstrukcja kąta o mierze 30°

Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt nieleżący na tej prostej

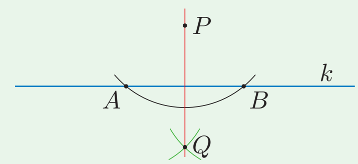
1. Z danego punktu P rysujemy łuk okręgu przecinający prostą k. Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B.



2. Z punktów A i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu $|AP|$. Punkt przecięcia łuków oznaczamy przez Q.



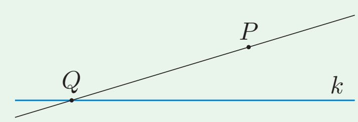
3. Rysujemy prostą PQ – jest ona prostopadła do prostej k, ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.



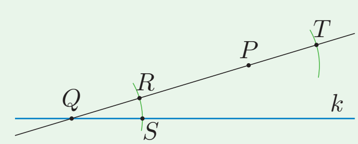
1. Dana jest prosta k i leżący na niej punkt P. Skonstruuj prostą prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt P.

Konstrukcja prostej przechodzącej przez dany punkt, równoległej do danej prostej

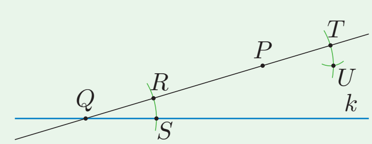
1. Rysujemy dowolną prostą przechodzącą przez dany punkt P. Punkt przecięcia tej prostej z daną prostą k oznaczamy przez Q.



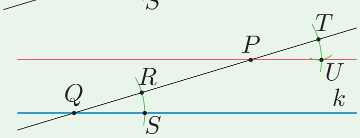
2. Rysujemy łuki okręgów o tym samym promieniu i środkach w punktach P i Q. Punkt przecięcia łuku o środku w punkcie Q z prostą k oznaczamy przez S.



3. Rysujemy łuk okręgu o środku w punkcie T i promieniu $|RS|$. Punkt przecięcia tego łuku z łukiem o środku w punkcie P oznaczamy przez U.

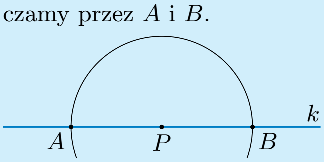


4. Rysujemy prostą PU – jest ona równoległa do prostej k, ponieważ kąt TPU jest przystający do kąta RQS.

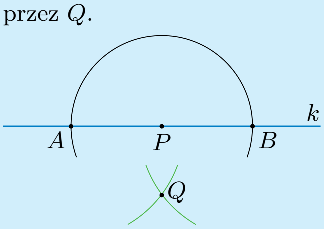


1.

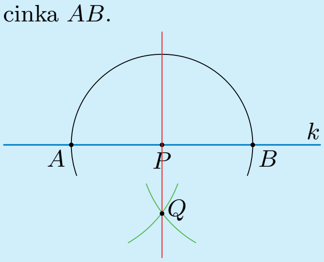
1. Z danego punktu P rysujemy łuk okręgu przecinający prostą k. Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B.



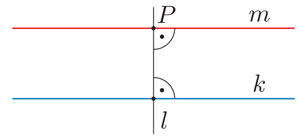
2. Z punktów A i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu $r > |AP|$. Punkt przecięcia łuków oznaczamy przez Q.



3. Rysujemy prostą PQ – jest ona prostopadła do prostej k, ponieważ jest symetralną odcinka AB.



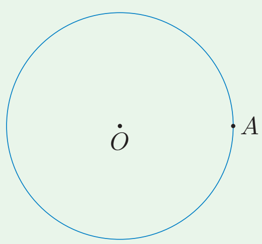
2. Prostą równoległą do danej prostej k i przechodzącą przez punkt P można skonstruować, rysując kolejno proste l i m takie, że $l \perp k$ i $m \perp l$. Przeprowadź tę konstrukcję i podaj jej opis.



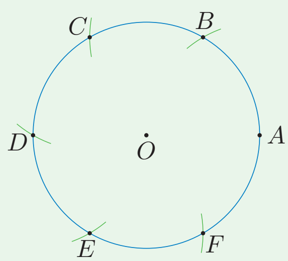
3. Mając dany trójkąt, skonstruuj punkt przecięcia jego:

a) symetralnych, b) dwusiecznych, c) wysokości.

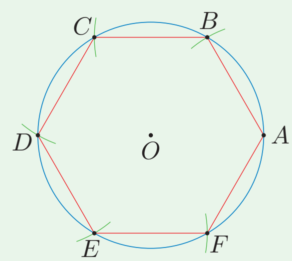
Konstrukcja sześciokąta foremnego



Rysujemy okrąg i wybieramy dowolny punkt tego okręgu – oznaczamy go przez A.



Zaczynając od punktu A, odmierzamy łuki o promieniach równych promieniowi okręgu.



Wielokąt $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym.

4. Skonstruuj:

a) trójkąt równoboczny,
b) kwadrat,
c) ośmiokąt foremny,
d) dwunastokąt foremny.

5. Narysuj dowolny kąt. Skonstruuj kąt do niego przystający.

6. Skonstruuj kąt o mierze:

a) 30°, b) 45°, c) 75°, d) 105°.

Nad wymienionymi poniżej klasycznymi problemami konstrukcyjnymi zastanawiali się już starożytni Grecy. Jak udowodniono później, nie mają one rozwiązania.

- Kwadratura koła – konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego koła.
- Trysekcja kąta – podział dowolnego kąta na trzy równe części.

3. a) Konstruujemy symetralne dwóch boków trójkąta i wyznaczamy punkt ich przecięcia.

b) Konstruujemy dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych trójkąta i wyznaczamy punkt ich przecięcia.

c) Konstruujemy proste prostopadłe do dwóch boków trójkąta przechodzące przez wierzchołki przeciwległe do tych boków. Proste te zawierają wysokości trójkąta. Wyznaczamy punkt ich przecięcia.

4. a) 1. Na prostej odkładamy odcinek AB.
2. Z punktów A i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu $|AB|$. Punkt przecięcia łuków oznaczamy przez C.
3. Łączymy punkt C z punktami A i B – otrzymujemy trójkąt równoboczny ABC.

b) 1. Na prostej k odkładamy odcinek AB.
2. Konstruujemy proste a i b prostopadłe do prostej k i przechodzące odpowiednio przez punkty A i B.
3. Z punktów A i B rysujemy łuki okręgów o promieniu długości $|AB|$. Punkty przecięcia łuków z prostymi a i b oznaczamy odpowiednio przez punkty D i C.
4. Łączymy punkty C i D – otrzymujemy kwadrat $ABCD$.

c) 1. Na prostej k odkładamy odcinek SA.
2. Konstruujemy prostą l prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt S.
3. Konstruujemy dwusieczne kątów prostych wyznaczonych przez proste k i l.
4. Rysujemy okrąg o środku w punkcie S i promieniu $|SA|$. Punkty przecięcia okręgu z prostymi k i l oraz dwusiecznymi oznaczamy kolejno przez B, C, D, E, F, G i H.
5. Łączymy wierzchołki ośmiokąta foremnego $ABCDEFGH$.

d) 1. Konstruujemy sześciokąt foremny jak wyżej.
2. Konstruujemy dwusieczne kątów wyznaczonych przez przekątne sześciokąta.
3. Punkty przecięcia dwusiecznych i okręgu wyznaczą pozostałe 6 wierzchołków dwunastokąta foremnego.

6. a) Konstruujemy trójkąt równoboczny, a następnie dwusieczną jednego z jego kątów.

b) Konstruujemy kąt prosty, a następnie jego dwusieczną.

c) Konstruujemy kąt o mierze 150° jako przyległy do kąta o mierze 30°, a następnie jego dwusieczną.

d) Kąt o mierze 105° konstruujemy jako sumę kątów o miarach 60° i 45°.

Odpowiedzi do zadań

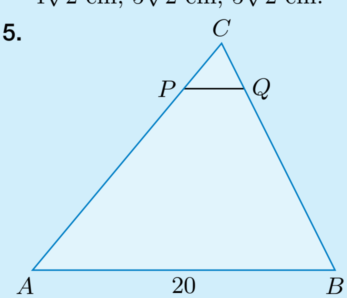
1. **a)** 30°, 60°, 90°
b) 20°, 60°, 100°
c) 15°, $67^\circ30'$, $97^\circ30'$

2. 50°, 60°, 70°

3. **a)**, **b)**, **d)** tak **c)** nie

4. **a)** Obwód T_1: 14 cm, czyli $k = \frac{35}{14}$.
Długości boków:
10 cm, 12,5 cm, 12,5 cm.
b) Wysokość T_1: $h = \sqrt{21}$ cm.
Pole T_1: $P_1 =$
$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$ [cm^2],
czyli $k^2 = \frac{4\sqrt{21}}{2\sqrt{21}} = 2$,
stąd $k = \sqrt{2}$.
Długości boków:
$4\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm.

5.



Oznaczmy:
$|AP| = 4x$, $|PC| = x$
$|BQ| = 4y$, $|QC| = y$
Korzystamy z podobieństwa trójkątów ABC i PQC (cecha BKB):

$$\frac{x}{5x} = \frac{|PQ|}{20}$$

czyli $|PQ| = 4$ dm.
Skala podobieństwa trójkątów PQC i ABC jest równa $\frac{1}{5}$, zatem:

$$\frac{P_{\triangle PQC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{P_{\triangle PQC}}{50} = k^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

czyli $P_{\triangle PQC} = 2$ dm^2.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Wyznacz miary kątów trójkąta, jeśli ich stosunek jest równy:
a) $1:2:3$, b) $1:3:5$, c) $2:9:13$.

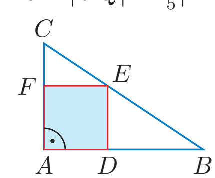
2. Kąty między bokiem trójkąta ostrokątnego a wysokościami poprowadzonymi z wierzchołków należących do tego boku mają miary 40° i 20°. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

3. Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy trójkąty te są podobne?
a) 15, 18, 24 oraz 20, 24, 32
b) 4, 8, 10 oraz 6, 3, 7,5
c) 1,2; 1,4; 1,8 oraz 1,8; 2,1; 2,8
d) 20, 25, 30 oraz 6, 9, 7,5

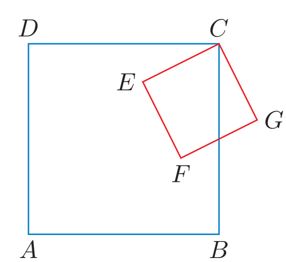
4. Trójkąt T_1 o bokach 5 cm, 5 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta T_2. Oblicz długości boków trójkąta T_2, jeśli:
a) jego obwód jest równy 35 cm,
b) jego pole jest równe $4\sqrt{21}$ cm^2.

5. W trójkącie ABC o polu 50 dm^2 bok AB ma długość 20 dm. Punkt P leży na boku AC i $|CP| = \frac{1}{5}|AC|$. Punkt Q leży na boku BC i $|CQ| = \frac{1}{5}|BC|$. Oblicz długość odcinka PQ i pole trójkąta CPQ.

6. Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek obok) mają długości 10 i 15. Oblicz pole kwadratu $ADEF$.



7. Dany jest trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm i 8 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą jego przeciwległe boki.



D **8.** Punkt C jest wspólnym wierzchołkiem kwadratów $ABCD$ i $CEFG$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów DEC i CBG są równe.

9. Działkę budowlaną w kształcie trójkąta o bokach długości: 60 m, 60 m i 40 m podzielono na dwie części o równych polach płotem równoległym do boku długości 40 m. Oblicz z dokładnością do 1 m obwód każdej z nowo powstałych działek.

6. Oznaczmy bok kwadratu przez x, wówczas z podobieństwa trójkątów FEC i ABC (cecha KKK) mamy:

$$\frac{10}{15} = \frac{10-x}{x}$$

skąd $x = 6$, zatem pole kwadratu $P = 36$.

7. 3,2 cm, 4,8 cm; $1\frac{5}{7}$ cm, $2\frac{2}{7}$ cm; 2 cm, 4 cm

8. Niech $\sphericalangle DCE = \alpha$, czyli $\sphericalangle ECB = 90^\circ - \alpha$. Wówczas $\sphericalangle BCG = \sphericalangle ECG - \sphericalangle ECB = \alpha$, zatem $\sphericalangle DCE = \sphericalangle BCG$.
$|CE| = |CG|$ oraz $|DC| = |BC|$ zatem na mocy cechy BKB: $\triangle DEC \equiv \triangle BGC$, czyli ich pola są równe.

9. $Ob_{DEC} = 80\sqrt{2} \approx 113$ [m]
$Ob_{ABED} = 160 - 40\sqrt{2} \approx 103$ [m]

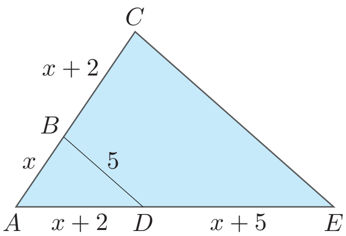
Zestaw II

D **1.** a) Wykaż, że dowolne dwa prostokąty, w których przekątne przecinają się pod tym samym kątem α, są podobne.

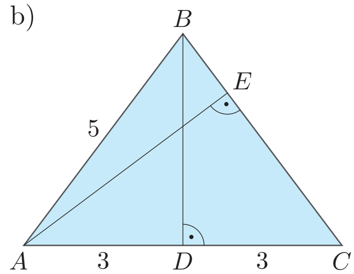
b) Wykaż, że jeśli prostokąt o bokach x i y jest podobny do prostokąta o bokach odpowiednio $x+1$ i $y+1$, to prostokąty te są kwadratami.

2. Oblicz obwód trójkąta AEC.

a) $BD \parallel CE$



b)

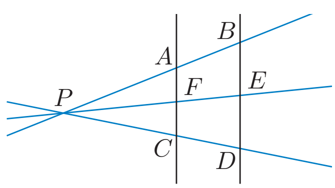


3. a) Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 260 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{5}{8}$. Oblicz obwód każdej z tych figur.

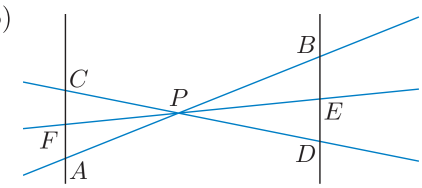
b) Figury F_1 i F_2 są podobne w skali $1:2$, a figury F_2 i F_3 są podobne w skali $1:3$. Oblicz pole każdej z tych figur, jeśli suma ich pól jest równa 410 dm^2.

D **4.** Uzasadnij, że jeśli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AF|}{|BE|} = \frac{|FC|}{|ED|}$.

a)



b)

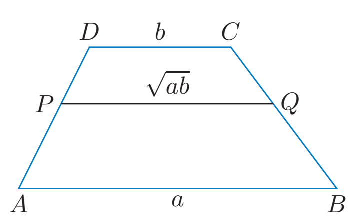


D **5.** W rombie $ABCD$ połączono środki kolejnych boków i otrzymano czworokąt $A'B'C'D'$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem o polu dwa razy mniejszym od pola rombu.

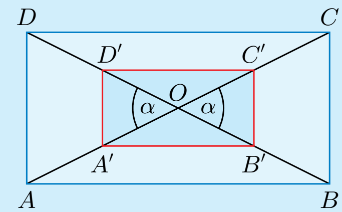
D * **6.** W trapezie $ABCD$ o podstawach a i b (rysunek obok) poprowadzono odcinek PQ o długości $\sqrt{ab}$ równoległy do podstaw trapezu. Uzasadnij, że:

a) $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$,

b) trapezy $ABQP$ i $PQCD$ są podobne.



1. a)



Kąty w prostokątach są równe, czyli do wykazania pozostała proporcjonalność odpowiednich boków.

$\triangle AOD \sim \triangle A'OD'$ (cecha KKK), stąd $\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'D'|}{|AD|}$

$\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$ (cecha KKK), stąd $\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$

Zatem

$$\frac{|A'D'|}{|AD|} = \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|},$$

co oznacza, że odpowiednie boki prostokątów są proporcjonalne, czyli prostokąty

$ABCD$ i $A'B'C'D'$

są podobne.

b) Prostokąty są podobne, zatem:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1}$$
$$xy + x = xy + y$$
$$x = y$$

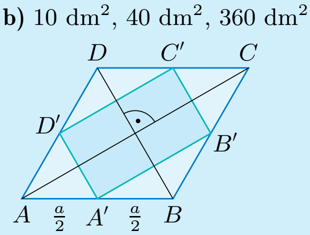
Również $x+1 = y+1$, czyli prostokąty są kwadratami.

2. a) 37,5 **b)** 14,4

3. a) 100 cm, 160 cm

b) 10 dm^2, 40 dm^2, 360 dm^2

5.



$\frac{|AA'|}{|AD'|} = \frac{|A'B|}{|D'D|}$, zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $A'D' \parallel BD$. Analogicznie wykazujemy równoległość $B'C'$ do BD oraz $A'B'$ i $D'C'$ do AC.

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, zatem kolejne boki w czworokącie $A'B'C'D'$ są do siebie prostopadłe – jest to więc prostokąt.

$$\frac{|A'B'|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

czyli $|A'B'| = \frac{|AC|}{2}$ oraz $\frac{|B'C'|}{|BD|} = \frac{1}{2}$, czyli $|B'C'| = \frac{|BD|}{2}$

$$P_{A'B'C'D'} = |A'B'| \cdot |B'C'| = \\ = \frac{|AC|}{2} \cdot \frac{|BD|}{2} = \frac{1}{2} P_{ABCD}$$

6. a) Na mocy cechy KKK: $\triangle ABE \sim \triangle PQE \sim \triangle DCE$. Stąd:

$\frac{|ED|}{|ED|+|PD|} = \frac{b}{\sqrt{ab}}$, czyli $|ED| = \frac{b|PD|}{\sqrt{ab}-b}$

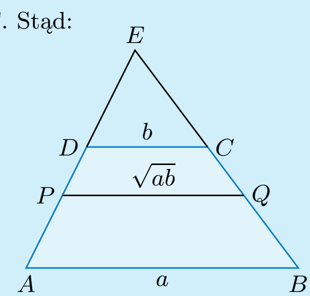
$\frac{|ED|}{|ED|+|PD|+|AP|} = \frac{b}{a}$, czyli $|ED| = \frac{b|PD|+b|AP|}{a-b}$

Zatem $\frac{b|PD|}{\sqrt{ab}-b} = \frac{b|PD|+b|AP|}{a-b}$. Przekształcamy równanie do postaci $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-b}$.

Usuwamy niewymierność z mianownika

$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{|AB|}{|PQ|}$$

Analogicznie wykazujemy równość $\frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$.

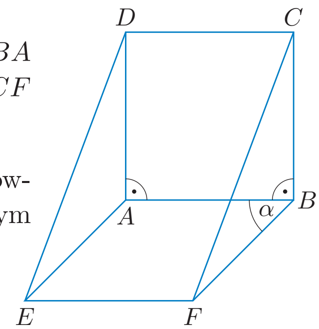


b) Odpowiednie kąty trapezów są równe (jako kąty odpowiadające). Z poprzedniego podpunktu: $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|PQ|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|BQ|}{|QC|}$, czyli trapezy $ABQP$ i $PQCD$ są podobne.

Przy przedstawianiu dowodu należy precyzyjnie uzasadnić każdy krok rozumowania. Można to zrobić tak, jak w przykładzie 1, lub w postaci dowodu dwukolumnowego (przykład 2).

Przykład 1

Dany jest kwadrat $ABCD$ i równoległobok $EFBA$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BCF są przystające.



Oznaczmy przez α kąt ostry równoległoboku. Wówczas $\sphericalangle CBF = 90° + \alpha$. Suma miar kątów przy jednym boku równoległoboku jest równa 180°, więc:

$$\sphericalangle BAE = 180° - \alpha$$

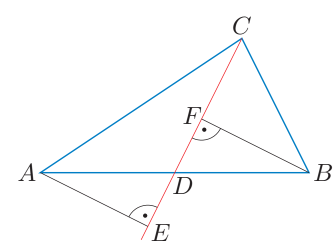
Stąd:

$$\sphericalangle DAE = 360° - (\sphericalangle BAE + \sphericalangle BAD) =$$
$$= 360° - (180° - \alpha + 90°) = 90° + \alpha$$

czyli $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CBF$. Jednocześnie $|AD| = |BC|$ (boki kwadratu) oraz $|AE| = |BF|$ (przeciwległe boki równoległoboku).
Na podstawie cechy BKB wnioskujemy, że trójkąty ADE i BCF są przystające.

Przykład 2

Środkowa trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina bok AB w punkcie D. Punkty E i F leżą na tej środkowej, przy czym $AE \perp CD$ oraz $BF \perp CD$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BDF są przystające.



Dowód przedstawimy w dwukolumnowej tabeli.
W jednej kolumnie zapisujemy kolejne stwierdzenia, a w drugiej – ich uzasadnienia. Pozwala to uporządkować całe rozumowanie.

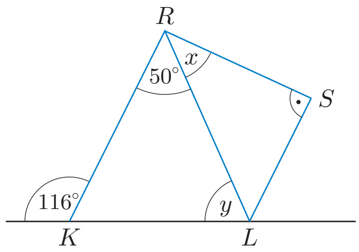
Stwierdzenie	Uzasadnienie
$\lvert AD\rvert = \lvert BD\rvert$	Punkt D jest środkiem boku AB.
$\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDF$	Są to kąty wierzchołkowe.
$\sphericalangle AED = \sphericalangle BFD$	Są to kąty proste.
$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBF$	Trójkąty ADE i BDF mają dwa kąty równe, więc wszystkie ich kąty są równe.
$\triangle ADE \equiv \triangle BDF$	Na podstawie cechy KBK przystawania trójkątów.

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Przekątna ośmiokąta foremnego dzieli go na siedmiokąt i trójkąt równoramienny. Miara kąta ostrego tego trójkąta jest równa:

A. 22,5°, **C.** 26,5°,
B. 24,5°, **D.** 28,5°.

2. Na rysunku obok $RK \parallel SL$. Suma miar kątów x i y jest równa:

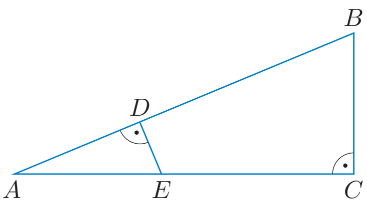


A. 104°, **C.** 106°,
B. 105°, **D.** 110°.

3. Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 340 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{7}{10}$. Różnica obwodów tych figur jest równa:

A. 60 cm, **B.** 65 cm, **C.** 75 cm, **D.** 80 cm.

4. Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek poniżej) mają długości 5 cm i 12 cm. Ile wynosi obwód trójkąta AED, jeśli jego pole jest równe 4,8 cm^2?



A. 6 cm **B.** 8 cm **C.** 10 cm **D.** 12 cm

5. Jeżeli prostokąt P_1 o bokach długości 9 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta P_2 o przekątnej długości 20 cm, to:

A. obwód prostokąta P_2 jest równy 54 cm,
B. pole prostokąta P_2 jest równe 200 cm^2,
C. pole prostokąta P_2 jest o 64 cm^2 większe od pola prostokąta P_1,
D. stosunek pola prostokąta P_1 do pola prostokąta P_2 jest równy $9:16$.

6. Na boku AB trójkąta ABC wybrano punkt P, a na boku AC – punkt Q tak, że $PQ \parallel BC$. Jeśli $|AB| = 4{,}5$ cm, $|AC| = 5$ cm, $|AQ| = 2$ cm i $|BC| = 3$ cm, to obwód trójkąta APQ jest równy:

A. 5 cm, **B.** 6 cm, **C.** 6,5 cm, **D.** 7 cm.

2. $y = 66°$, $x = 40°$

3. $\begin{cases} Ob_1 + Ob_2 = 340 \\ \frac{Ob_1}{Ob_2} = \frac{7}{10} \end{cases}$

$Ob_1 = 140$ cm, $Ob_2 = 200$ cm

4. $P_{ABC} = 30$ cm^2,
$Ob_{ABC} = 30$ cm
Skala podobieństwa
$\triangle AED$ do $\triangle ABC$: $k = \frac{2}{5}$
$Ob_{AED} = 12$ cm

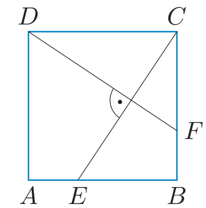
5. Przekątna prostokąta P_1 ma długość:

$$\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ [cm]}$$

zatem skala podobieństwa prostokąta P_1 do P_2 jest równa $\frac{3}{4}$.
Prostokąt P_1: $P = 108$ cm^2, $Ob = 42$ cm.
Prostokąt P_2: $P = 192$ cm^2, $Ob = 56$ cm.

6. Trójkąty APQ i ABC są podobne (cecha KKK) w skali $\frac{2}{5}$.
$Ob_{APQ} = \frac{2}{5} \cdot (4{,}5 + 5 + 3) = 5$ [cm]

Zadania krótkiej odpowiedzi



D **Zadanie 1 (2 pkt)**

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty E i F takie, że $CE \perp DF$ (rysunek obok). Uzasadnij, że trójkąty BCE i CDF są przystające.

Zadanie 2 (2 pkt)

Romb o przekątnych 6 i 10 jest podobny do rombu o polu 270. Oblicz obwód większego rombu.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz miarę kąta wewnętrznego dwunastokąta foremnego.

Zadanie 4 (2 pkt)

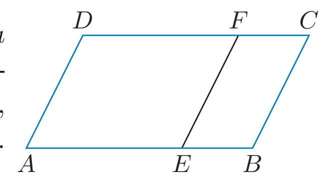
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej równej 6. Oblicz odległość jego środka ciężkości od wierzchołka kąta prostego.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (4 pkt)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $|AB| = 40$ cm i $|CD| = 25$ cm i ramionach długości 12 cm i 9 cm. Przedłużenia ramion tego trapezu przecinają się w punkcie P. Oblicz obwód trójkąta ABP.

D **Zadanie 6 (4 pkt)**



Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Czworokąt $EBCF$ jest równoległobokiem podobnym do równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że obwód czworokąta $AEFD$ jest równy $\frac{2a^2-2b^2+2ab}{a}$.

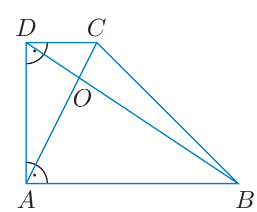
D **Zadanie 7 (4 pkt)**

Uzasadnij, że suma długości środkowych trójkąta o obwodzie L jest mniejsza od $\frac{3}{2}L$.

Zadanie 8 (4 pkt)

Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie równym 30°. Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

Zadanie 9 (4 pkt)



W trapezie prostokątnym (rysunek obok) dane są długości podstaw $|AB| = 6$ i $|CD| = 2$ oraz ramienia $|AD| = 4$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu. Oblicz obwód trójkąta AOB.

1. Oznaczmy punkt przecięcia CE i DF przez G oraz kąt $\sphericalangle BCE = \alpha$.
Wówczas $\sphericalangle GCD = 90^\circ - \alpha$.
$\sphericalangle DGC = 90^\circ$, więc:
$\sphericalangle GDC = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$
Ponadto $|CD| = |BC|$ oraz $\sphericalangle FCD = 90^\circ = \sphericalangle EBC$.
Na mocy cechy KBK:
$$\triangle CDF \equiv \triangle BCE.$$

2. Pole mniejszego rombu: $P_1 = 30$. Skala podobieństwa rombu większego do mniejszego: $k = 3$.
Obwód mniejszego rombu: $Ob_1 = 4\sqrt{34}$,
obwód większego rombu: $Ob_2 = 3 \cdot 4\sqrt{34} = 12\sqrt{34}$.

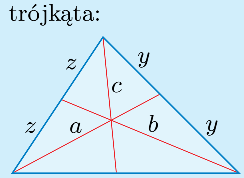
3. Suma kątów wewnętrznych dwunastokąta:
$$(12-2) \cdot 180^\circ = 1800^\circ$$
Miara kąta wewnętrznego dwunastokąta foremnego:
$$1800^\circ : 12 = 150^\circ$$

4. Długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego: $d = 3$.
Środek ciężkości dzieli środkową w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka. Zatem szukana odległość jest równa 2.

5. $\triangle ABP \sim \triangle DCP$ (cecha KKK)
$$\frac{|AP|-9}{|AP|} = \frac{25}{40}$$
czyli $|AP| = 24$ cm
$$\frac{|BP|-12}{|BP|} = \frac{25}{40}$$
czyli $|PC| = 32$ cm
$Ob_{ABP} = 96$ cm

6. $\frac{|EB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$, czyli:
$$|EB| = \frac{|BC|^2}{|AB|} = \frac{b^2}{a}$$
Stąd $|AE| = |DF| = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-b^2}{a}$, $|EF| = |AD| = b$.
$Ob_{AEFD} = \frac{2a^2-2b^2}{a} + 2b$

7. Z założenia: $2x + 2y + 2z = L$.
Z nierówności trójkąta:
$a < y + 2x$
$a < y + 2z$
$b < z + 2x$
$b < z + 2y$
$c < x + 2y$
$c < x + 2z$



Dodajemy nierówności stronami:
$2(a+b+c) < 3(2x+2y+2z)$
Zatem:
$a + b + c < \frac{3}{2}(2x+2y+2z) = \frac{3}{2}L$

8. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

9. $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (cecha KKK)
Skala podobieństwa $\triangle AOB$ do $\triangle COD$ jest równa 3:1
$|AC| = 2\sqrt{5}$, czyli $|AO| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$
$|BD| = 2\sqrt{13}$, czyli $|BO| = \frac{3}{2}\sqrt{13}$
$Ob = 6 + \frac{3}{2}\left(\sqrt{5} + \sqrt{13}\right)$