SPIS TREŚCI:

1. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA

Przypomnienie

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c:

Sinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta ostrego do długości przeciwprostokątnej.

Cosinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie ostrym do długości przeciwprostokątnej.

Tangensem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej.

Cotangensem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości drugiej przyprostokątnej.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

	30°	45°	60°
$sin \propto$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos \propto$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg \propto$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg \propto$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Funkcje trygonometryczne kątów o miarach do 0° do 180°

W celu określenia funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od 0° do 180° umieszcza się kąt w układzie współrzędnych w taki sposób, że:

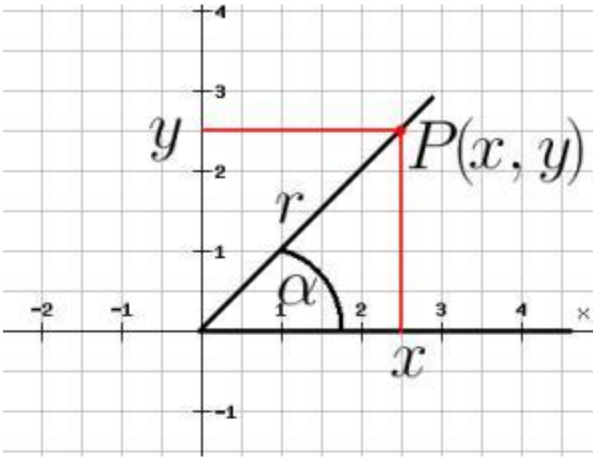
• wierzchołek kąta pokrywa się z początkiem układu współrzędnych (punktem (0,0))

• jedno ramię, zwane **ramieniem początkowym** pokrywa się z dodatnią półosią x,

• drugie ramię, zwane **ramieniem końcowym**, w zależności od miary kąta, umieszcza się w I lub II ćwiartce układu współrzędnych albo na półosiach x lub y układu współrzędnych,

•aby określić wartości funkcji trygonometrycznych kąta umieszczonego w układzie współrzędnych, obieramy na ramieniu końcowym tego kąta dowolny punkt P, różny od 0 = (0,0), taki, że P = (x, y)

•a następnie obliczamy:



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x}$$

$$(x \neq 0)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

Znaki i wartości funkcji trygonometrycznych kąta α

	0°	I ćwiartka	90°	II ćwiartka	180°
sin x	0	+	1	+	0
cos x	1	+	0	—	-1
tg x	0	+	nie istnieje	—	0

Jeśli kąt α jest kątem ostrym, to:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ $tg(180^\circ - \alpha) = -tg\,\alpha$

Temat: MIARA ŁUKOWA KĄTA

Miarą łukową kąta α nazywamy stosunek długości łuku l, wyznaczonego przez ten kąt, do długości promienia r okręgu:

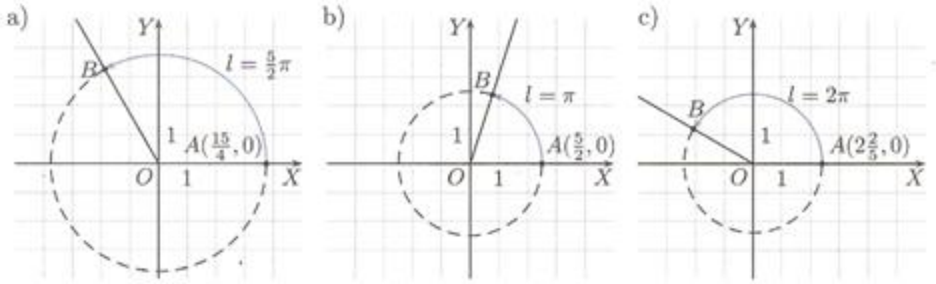
$$\alpha = \frac{l}{r}$$

l – długość łuku, *r* – długość promienia

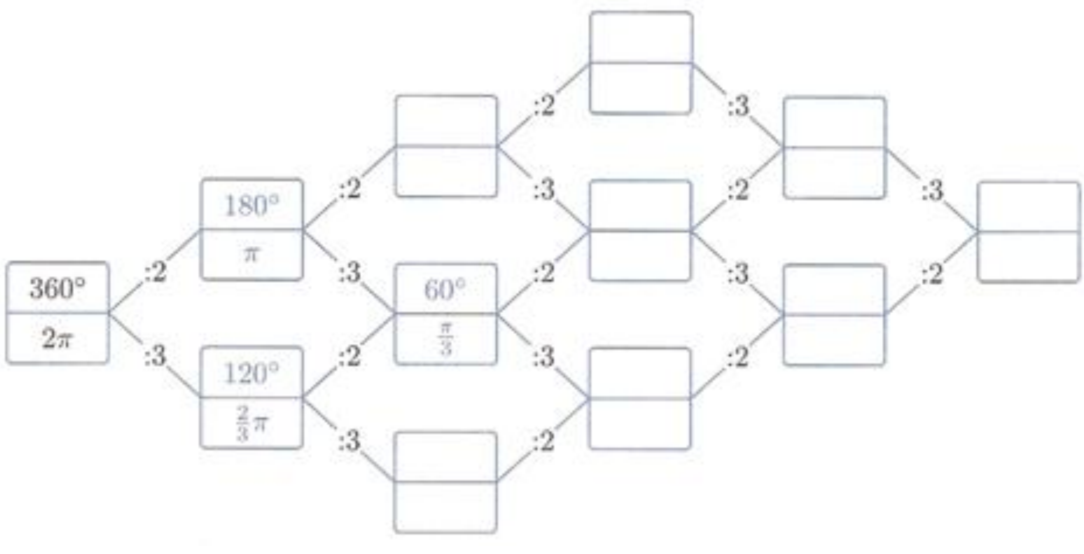
Jednostką miary łukowej jest radian, w skrócie piszemy **rad.**
Aby zamienić miarę łukową kąta (x) na miarę stopniową (α) lub odwrotnie, możemy skorzystać z proporcji:

$$\frac{\alpha}{360^0} = \frac{x}{2\pi}$$

Zadanie 1. Podaj miarę łukową kąta *AOB*:



Zadanie 2. Uzupełnij diagram, podając miarę kąta w stopniach i w radianach.

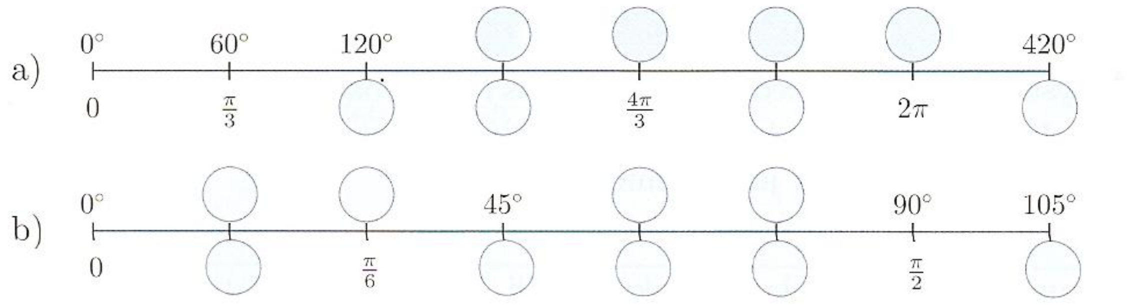


Zadanie 3. Korzystając z przedstawionej poniżej metody uzupełnij tabelkę.

$$270^o = 270^o \cdot \frac{\pi}{180^o} = \frac{3}{2}\pi \qquad\qquad \frac{7}{18}\pi = \frac{7}{18}\pi \cdot \frac{180^o}{\pi} = 70^o$$

W stopniach	5^o	10^o		36^o				225^o	315^o		
W radianach			$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{6}$			$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$

Zadanie 4. Na rysunku poniżej przedstawiono dwie miary: stopniową i łukową. Uzupełnij puste miejsca.



Zadanie 5. Oblicz miarę łukową kątów:

a) $70°$,
b) $20°$,
c) $130°$,
d) $38°$
e) $310°$,
f) $180°$,
g) $360°$,
h) $150°$
i) $270°$,
j) $60°$,
k) $27°$,
l) $34°$,

Zadanie 6. Wyznacz miarę łukową kątów wewnętrznych następujących wielokątów foremnych:

a) trójkąta, b) kwadratu, c) pięciokąta, d) sześciokąta.

Zadanie 7. Jaką miarę stopniową ma kąt

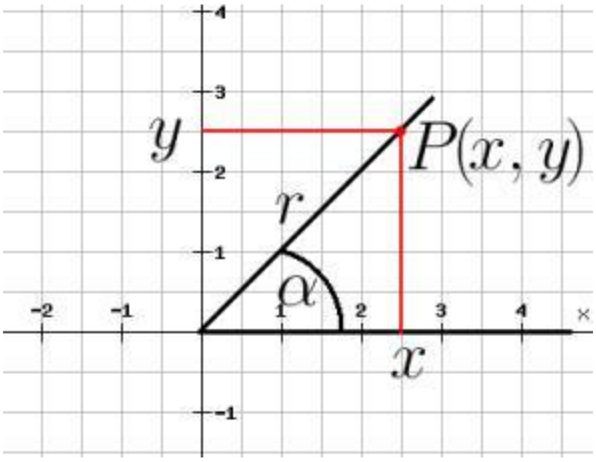
a) $\frac{\pi}{3}$ rad,
b) $\frac{\pi}{9}$ rad,
c) $\frac{3}{2}\pi$ rad,
d) $\frac{5}{6}\pi$ rad,
e) $\frac{5}{3}\pi$ rad,
f) $\frac{\pi}{4}$ rad,
g) 3π rad,
h) $3\frac{3}{4}\pi$?

Zadanie 8. Oblicz miarę stopniową kątów:

a) $\frac{2}{3}\pi$,
b) $\frac{\pi}{9}$,
c) $\frac{7}{12}\pi$,
d) $\frac{11}{12}\pi$,
e) $\frac{5}{3}\pi$,
f) $\frac{28}{15}\pi$.

Temat: FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych kąta umieszczonego w układzie współrzędnych, obieramy na ramieniu końcowym tego kąta dowolny punkt P, różny od 0 = (0,0), taki, że P = (x, y).



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$tg\,\alpha = \frac{y}{x}$$
$$(x \neq 0)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

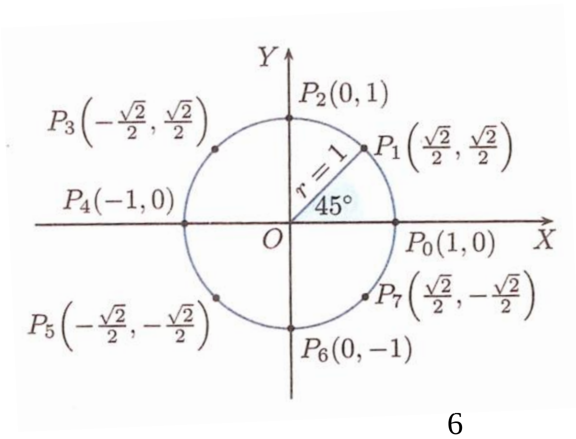
Zadanie 1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią osi x ,a na drugim ramieniu leży punkt P.

a) P = (-3,4),
b) P = (4,-3),
c) P = (-2,-1),
d) P = (-4,3),
e) P = (5,-11),
f) P =(-2,4),
g) P = $(-\sqrt{3},1)$,
h) P = $(\sqrt{3},-1)$,
f) P = $(-\sqrt{2},2)$.

Zadanie 2. Skreśl punkty, które nie należą do ramienia końcowego kąta a.

a) $tg\alpha = -\frac{3}{5}$, $\alpha \in (90^o; 180^o)$ P = (-5,3), Q = (5,-3), R = (-3,5)
b) $tg\alpha = \frac{7}{5}$, $\alpha \in (180^o; 270^o)$ P = (5,7), Q = (-7,-5), R = (-5,-7)
c) $tg\alpha = -2$, $\alpha \in (270^o; 360^o)$ P = (2,-4), Q = (-2,1), R = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$
d) $ctg\alpha = \frac{1}{6}$, $\alpha \in (180^o; 270^o)$ P = (-1,-6), Q = (-6,-1), R = $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

Zadanie 3. Na rysunku obok przedstawiono okrąg jednostkowy z zaznaczonymi punktami: P_0, … , P_7.



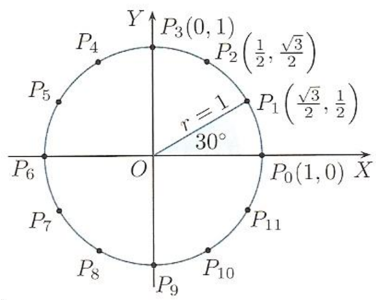
a) Podaj miarę kąta

α_i, do którego ramienia końcowego należy punkt P_i dla i = 0, 1, … , 7.

b) Uzupełnij tabelę.

α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
sin α								
cos α								
tg α			×				×	

Zadanie 4. Na okręgu jednostkowym, którego środek leży w początku układu współrzędnych, zaznaczono dwanaście punktów wyznaczonych przez ramiona końcowe kątów, których miary są wielokrotnościami kąta 30° (rysunek obok).



a) Podaj współrzędne punktów P_4, … , P_{11}.

b)Uzupełnij tabelę, korzystając z rysunku.

α	30°	60°	120°	150°	210°	240°	300°	330°
sin α				$\frac{1}{2}$				
cos α				$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				
tg α				$-\frac{\sqrt{3}}{3}$				

Zadanie 5. Punkt $P\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ leży na ramieniu końcowym kąta 15°. Oblicz sina i cos a, jeżeli :

a) a = 165°, b) a = 195°, c) a = 345°, d) a = 75°.

Temat: ZNAKI WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DOWOLNEGO KĄTA

Zadanie 1. Wpisz +, gdy funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz -, gdy funkcja przyjmuje wartości ujemne.

	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\alpha \in (0^o; 90^o)$				
$\alpha \in (90^o; 180^o)$	+	-	-	-
$\alpha \in (180^o; 270^o)$				
$\alpha \in (270^o; 360^o)$				

Zadanie 2. W miejsce $\square$ wpisz znak < lub >.

a) $sin190^o$ $\square$ 0, c) $tg230^o$ $\square$ 0, e) $sin295^o$ $\square$ 0,

b) $cos150^o$ $\square$ 0, d) $ctg290^o$ $\square$ 0, f) $cos305^o$ $\square$ 0.

Zadanie 3. W której ćwiartce układu współrzędnych leży ramię końcowe kąta a, jeśli:

a) sin a > 0 i cos a < 0,
b) cos a > 0 i tg a < 0,
c) sin a < 0 i tg a > 0,
d) sin a < 0 i tg a < 0,
e) cos a < 0 i sina·cos a < 0,
f) sin a > 0 i tg a > 0
g) tg a < 0 i cos a > 0,
h)sin a < 0 i cos a < 0,
i) sin a > 0 i cos a > 0.

Zadanie 4. Uzasadnij, ze:

a) $sin\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^o; 180^o)$,
b) $cos\alpha > 0$ dla $\alpha \in \langle 0^o; 90^o) \cup (270^o; 360^o\rangle$,
c) $tg\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^o; 90^o) \cup (180^o; 270^o)$,

Temat: OKRESOWOŚĆ FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

Funkcję f określoną na zbiorze D nazywamy **okresową,** jeśli istnieje liczba $T \neq 0$ taka, że dla każdego argumentu $x \in D$ i dowolnej liczby całkowitej k:

$$x + kT \in D \ \ oraz\ f(x + kT) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji.**

Dla dowolnego $x \in R$: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $gdzie\ k \in C$.

Dla dowolnego $x \in R$: $\cos\,(x + 2k\pi) = \cos x$, $gdzie\ k \in C$.

Dla dowolnego $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, gdzie\ n \in C: tg(x + k\pi) = tgx; gdzie\ k \in C$.

Dla dowolnego $x \in R$: $\sin(-x) = -\sin x$.

Dla dowolnego $x \in R$: $\cos(-x) = \cos x$

Dla dowolnego $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, gdzie\ k \in C: tg(-x) = -tgx$

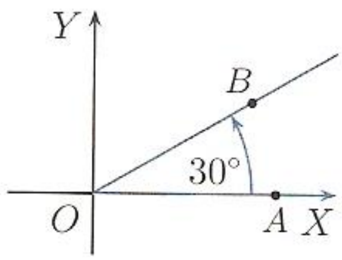
Zadanie 1. Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^o + \alpha$, gdzie $k \in C, \alpha \in <0^o, 360^o)$. Podaj miarę główną kąta skierowanego α, którego miara jest równa:

a) 1400° ,	d) -1080°,	g) -3590° ,	j) 850° ,
b) 1439°30',	e) 730°10',	h) 1413° ,	k) -1079°25',
c) -700° ,	f) -695° ,	i) 630°15',	l) 1000°.

Zadanie 2. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej kąt skierowany a, którego miara jest równa:

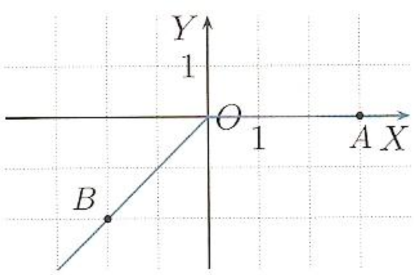
a) $\alpha = 315^o$,	c) $\alpha = -120^o$,	e) $\alpha = -1305^o$,
b) $\alpha = 570^o$,	d) $\alpha = -2130^o$,	f) $\alpha = 4260^o$.

Zadanie 3. O który z podanych kątów można obrócić półprostą *OA*, aby pokryła się ona z półprostą *OB* (rysunek obok)? Zakreśl te kąty.



390°, 750°, 1100°, 0°, 1470°, -330°, -690°, -1050°, -1440°.

Zadanie 4. Półprosta *OA* po obrocie o kąt a pokryła się z półprostą *OB* (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta a, jeśli:



a) $\alpha \in \langle 0^o, 360^o \rangle$,	c) $\alpha \in \langle 1080^o, 1440^o \rangle$,
b) $\alpha \in \langle 360^o, 720^o \rangle$,	d) $\alpha \in \langle -1080^o, -720^o \rangle$.

Zadanie 5. Czy ramię końcowe kąta a pokrywa się z ramieniem końcowym kąta β?

a) a = 735°, β = 475°,	c) a = 290°, β = 1370°,	e) a = -225°, β = 865°,
b) a = -310°, β = -410°,	d) a = 620°, β = -440°,	f) a = 150°, β = -930°.

Zadanie 6. Oblicz.

a) sin 390°,
b) sin 765°,
c) tg 3660°,
d) cos 1125° ,
e) tg 780°,
f) sin (-300°),
g) sin 1500°,
h) tg (-675°),
i) tg 3630°,
j) cos (-660°),
k) tg 1440° ,
l) tg (-690),
m) cos (-330°),
n) tg (-1035°),
o) $cos\frac{7}{3}\pi$,
p) $sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$,
q) $\cos\frac{17}{4}\pi$,
r) $tg\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$.

Temat: WZORY REDUKCYJNE

Aby obliczyć wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta większego od kąta prostego można skorzystać z metody:

1) ustalamy znak funkcji wyjściowej w zależności od ćwiartki, w której znajduje się kąt

2) przedstawiamy kąt w postaci $k\cdot\frac{\pi}{2}\mp\alpha$ $(k\cdot 90^o \mp\alpha)$, gdzie $k\epsilon N, \alpha\epsilon <0,\frac{\pi}{2})$ $(\alpha\epsilon <0, 90^o))$

- jeśli k jest liczbą nieparzystą, to funkcja sinus zmienia się w cosinus, a funkcja tangens w cotangens i odwrotnie (mówimy, że funkcja zmienia się na cofunkcję),
- jeśli k jest liczbą parzystą, to funkcja pozostaje bez zmian.

Możemy również skorzystać z poniższej tabelki:

φ	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ+\alpha$	$270^\circ-\alpha$	$270^\circ+\alpha$	$360^\circ-\alpha$	$360^\circ+\alpha$
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\varphi$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan\varphi$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$
$\cot\varphi$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$

Zadanie 1. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych:

a) $\sin 210°$, g) $\cos 660°$, m) $\sin 1020°$,

b) $\sin 120°$, h) $\cos 420°$, n) $\sin(-330°)$,

c) $\cos 480°$, i) $\sin 300°$, o) $\operatorname{tg}(-210°)$,

d) $\cos(-960°)$, j) $\operatorname{tg} 225°$, p) $\operatorname{tg}(-300°)$,

e) $\sin(-495°)$, k) $\operatorname{tg}(-315°)$, q) $\operatorname{tg}(-240°)$,

f) $cos(-405^o)$, l) $cos(-390^o)$, r) $\sin(-750^o)$.

Zadanie 2. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, oblicz:

a) $sin\frac{3}{4}\pi$, e) $sin\frac{11}{6}\pi$, i) $cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$,

b) $cos2\frac{5}{6}\pi$, f) $sin\frac{4}{3}\pi$, j) $tg\left(-\frac{10}{3}\pi\right)$,

c) $tg\frac{17}{6}\pi$, g) $cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$, k) $\sin\left(-\frac{21}{4}\pi\right)$,

d) $tg\frac{19}{4}\pi$, h) $tg\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$, l) $tg\left(-\frac{7}{6}\pi\right) - tg\frac{7}{6}\pi$.

Zadanie 3. Oblicz stosując wzory redukcyjne:

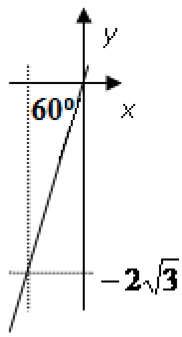
a) $\frac{\sin 210° \cos 480°}{\operatorname{tg} 120°}$, d) $sin^2 45^o + cos^2 135^o$, g) $cos330^o + tg120^o tg330^o$,

b) $\frac{\cos 120°}{\sin^2 330°} + \frac{tg150°}{tg210°}$, e) $sin^2 120^o + cos^2 150^o$, h) $\frac{\sin(360° - 30°) - \operatorname{tg} 135°}{\cos(-405°)\operatorname{tg} 240°}$,

c) $\frac{2\cos 55^0 \sin 45^0}{\sin 35^0 \cos 60^0}$, f) $tg135^o - tg225^o$, i) $\frac{cos^2 150^o tg210^o tg135^o}{sin^2 150^o + cos^2 210^o}$.

Zadanie 4. Oblicz $\sin 240°$, $\cos 240°$, $\operatorname{tg} 240°$

(możesz skorzystać z rysunku zamieszczonego obok).



Zadanie 5. Oblicz $\sin 300°$, $\cos 300°$, $\operatorname{tg} 300°$ i $\operatorname{ctg} 300°$

Zadanie 6. Podaj wartość:

a) $tg(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = 3$,

b) $tg(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$

c) $tg\,x$, jeśli $tg(-x) = \frac{5}{8}$.

Temat: ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI DOWOLNEGO KĄTA

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1$ (jedynka trygonometryczna)

$tg \propto = \frac{sin\propto}{cos\propto}, \ gdy \ cos \propto \neq 0$

Dla dowolnego $\alpha \in R$:

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha.$$

Zadanie 1. Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in$ II ćw. wyznacz $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$.

Zadanie 2. Oblicz $\sin\beta$, gdy $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{3}$, $\beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

Zadanie 3. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych danego kąta wiedząc, że

a) $\sin\gamma = -\frac{3}{5}$ i $\gamma \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$,

b) $\cos\alpha = 0{,}8$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$,

c) $\sin\alpha = 0{,}4$ i $\alpha \in (90°; 180°)$,

d) $\sin\beta = -\frac{4}{5}$ i $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$,

e) $\mathrm{tg}\alpha = -2\frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$,

f) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Zadanie 4. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin\alpha = -0{,}25$,

b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$,

c) $tg\alpha = -\frac{3}{4}$.

Zadanie 5. Wiedząc, że:

a) $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

b) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

c) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{10}$, oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha$.

d) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{3}$, oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 6. Udowodnij tożsamość:

a) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=\sin^2\alpha$

b) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$

c) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

d) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

e) $2\sin(90^\circ-\alpha)\sin\alpha=\sin 2\alpha$

Zadanie 7. Uzasadnij, że jeżeli $\cos\alpha\neq 0$ to prawdą jest, że

$$(1+\sin\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Zadanie 8. Sprawdź, czy prawdziwa jest następująca tożsamość

$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$. Podaj konieczne założenia.

Zadanie 9. Uzasadnij, że jeżeli α jest kątem ostrym, to

$\sin^4\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^4\alpha$.

Temat: FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE SUMY I RÓŻNICY KĄTÓW

__**Twierdzenie.**__ Dla dowolnych $\alpha,\beta\in R$ prawdziwe są poniższe wzory:

Sinus sumy kątów: $\sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$

Sinus różnicy kątów: $\sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$

cosinus sumy kątów: $\cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$

cosinus różnicy kątów: $\cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$

Dla dowolnego $\alpha\in R$:

$$sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha$$

$$cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha$$

Zadanie 1. Oblicz.

a) sin 75°, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów,

b) cos 75°, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów,

c) sin 105°, korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów,

d) $cos\,\frac{\pi}{12}$, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów.

Zadanie 2. Oblicz.

a) $sin15^o$, c) $sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)$, e)$cos375^o$, g)$cos(-435^o)$

b) $sin105^o$, d) $sin\left(\frac{19}{12}\pi\right)$, f) $cos855^o$, h) $cos1155^o$.

Zadanie 3. Udowodnij wzór $sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=cos\alpha$.

Zadanie 4. Udowodnij, że $\frac{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}=tg\alpha$.

Zadanie 5. Oblicz.

a) $cos28^o\cdot cos17^o-sin28^o\cdot sin17^o$

b) $sin85^o\cdot cos25^o-sin25^o\cdot cos85^o$

c) $cos\frac{8}{7}\pi\cdot cos\frac{1}{7}\pi+sin\frac{8}{7}\pi\cdot sin\frac{1}{7}\pi$

d) $sin\frac{3}{10}\pi\cdot cos\frac{1}{5}\pi+cos\frac{3}{10}\pi\cdot sin\frac{1}{5}\pi$

e) $sin33^o\cdot cos12^o-sin12^o\cdot cos33^o$

f) $sin\frac{\pi}{18}\cdot sin\frac{4}{9}\pi-cos\frac{\pi}{18}\cdot cos\frac{4}{9}\pi$

Zadanie 6. Wyprowadź podane niżej wzory na sinus kąta podwojonego i cosinus kąta podwojonego.

Dla dowolnego kata $\alpha\in\boldsymbol{R}$
$sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha$
$cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha$

Zadanie 7. Wykaż, ze dla dowolnego $\alpha\in\boldsymbol{R}$:

a) $cos2\alpha=2cos^2\alpha-1$, b) $cos2\alpha=1-2sin^2\alpha$.

Zadanie 8. Oblicz $\sin(\alpha+\beta)$ i $cos(\alpha+\beta)$, jeśli:

a) $sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\beta=\frac{1}{2}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$,

b) $sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$,

c) $sin\alpha=\frac{1}{3}$, $cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $\beta\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Zadanie 9. Oblicz: $sin\alpha$, $cos\alpha$ i $tg\alpha$, jeśli:

a) $cos2\alpha=\frac{3}{4}$ i $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$,

b) $cos2\alpha=\frac{3}{4}$ i $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$,

c) $cos2\alpha=-\frac{1}{3}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$,

d) $cos2\alpha=-\frac{1}{3}$ i $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Zadanie 10. Wykaż, że dla dowolnego kąta α takiego, że $\sin\alpha\cos3\alpha\neq0$ zachodzi tożsamość

$$\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3-4\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha-3}.$$

Zadanie 11. Sprawdź, czy równość $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ jest tożsamością trygonometryczną.

Temat: SUMA I RÓŻNICA FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

Twierdzenie. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in R$ prawdziwe są poniższe wzory:

Suma sinusów: $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Różnica sinusów: $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Suma cosinusów: $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Różnica cosinusów: $cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Zadanie 1. Oceń prawdziwość każdego zdania. Wskaż **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub **F**, jeśli jest fałszywe.

1) $sin32^o + sin28^o = cos2^o$ **P / F**

2) $sin77^o - sin17^o = sin43^o$ **P / F**

3) $cos69^o + cos51^o = cos9^o$ **P / F**

4) $cos84^o - cos24^o = sin54^o$ **P/ F**

Zadanie 2. Korzystając ze wzorów na sumę lub różnicę odpowiednich funkcji trygonometrycznych, oblicz.

a) $sin5x + sin3x$,
c) $sin8x - sin4x$,
e) $sinx - sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,
b) $cos7x - cos5x$,
d) $cos8x + cos2x$,
f) $sinx - sin\frac{\pi}{7}$.

Zadanie 3. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\frac{sin24^o+sin66^o}{cos24^o+cos66^o}$, b) $\frac{sin52^o-sin38^o}{cos52^o-cos38^o}$, c) $\frac{sin13^o+sin47^o}{cos13^o+cos47^o}$, d) $\frac{sin35^o-sin25^o}{cos35^o-cos25^o}$.

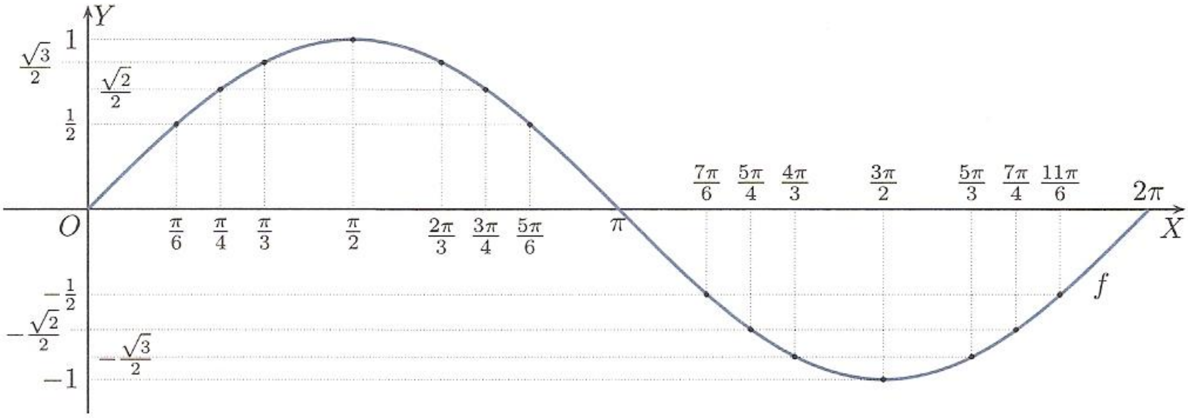
Zadanie 4. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu:

a) $1 + cos\alpha$,
f) $\sqrt{2} + 2cos\alpha$,
b) $1 + sin\alpha$,
g) $sin7\alpha + sin5\alpha + sin3\alpha + sin\alpha$,
c) $1 - cos\alpha$,
h) $1 + cos\alpha + cos\frac{\alpha}{2}$,
d) $\frac{1}{2} - cos\alpha$,
i) $1 + sin\alpha + cos\alpha + tg\alpha$,
e) $1 + 2sin\alpha$,
j) $cos\alpha + sin2\alpha - cos3\alpha$.

Zadanie 5. Zamień sumę na iloczyn: $2sin^2\alpha + \sqrt{3}sin2\alpha - 1$.

Temat: WYKRES I WŁASNOŚCI FUNKCJI SINUS

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = sinx$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Uzupełnij własności:

a) dziedzina

b) przedziały, w których funkcja rośnie

c) przedziały, w których funkcja maleje

d) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie

e) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne

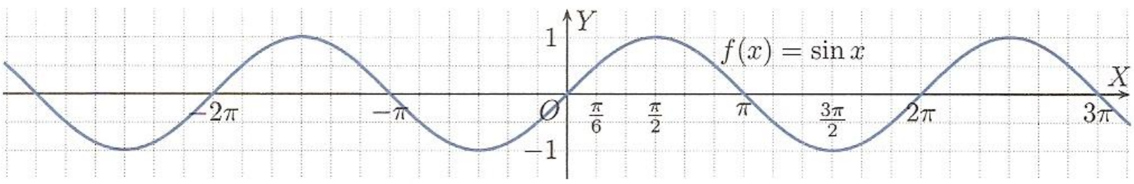
f) $sinx = \frac{1}{2}$ dla x = ___ lub x = ___

g) $sinx = -\frac{1}{2}$ dla x = ___ lub x = ___

h) $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dla x = ___ lub x = ___

i) $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dla x = ___ lub x = ___

Zadanie 2. Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = sinx$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Określ prawdziwość poniższych zdań na podstawie wykresu.



A. Funkcja $f(x) = sinx$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. TAK / NIE

B. Funkcja $f(x) = sinx$ rośnie w przedziale $(0; 2\pi)$. TAK / NIE

C. Oś *OY* jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = sinx$. TAK / NIE

D. Wykres funkcji $f(x) = sinx$ ma nieskończenie wiele osi symetrii. TAK / NIE

E. Punkt *O*(0,0) jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = sinx$. TAK / NIE

Zadanie 3. Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = \sin x$ w podanym przedziale?

a) $\langle 0; 2\pi\rangle$, b) $\langle -2\pi; 2\pi\rangle$ c) $(0; 5\pi\rangle$, d) $(0; 32\pi)$.

Zadanie 4. Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$, wskaż wszystkie te liczby $x \in (-\pi; \pi)$ takie, że $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 5. W oparciu o wykres funkcji sinus, w przedziale $\langle 0°; 360°\rangle$ znajdź wszystkie kąty α, dla których $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 6. Korzystając z wykresu $y = \sin\alpha$ dla $0° \le \alpha \le 360°$, określ:

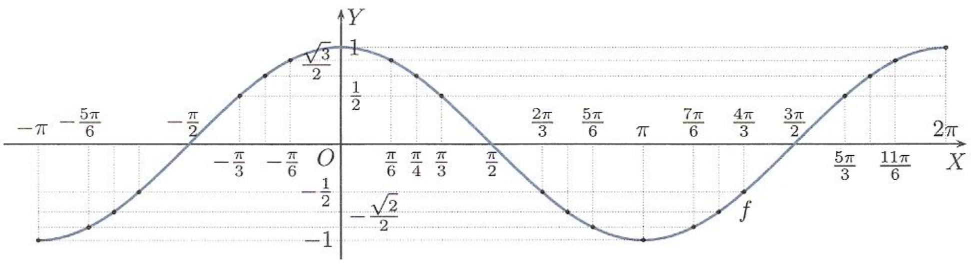
a) dla jakich argumentów spełniających warunek $0° \le \alpha \le 360°$ funkcja jest malejąca i jednocześnie przyjmuje wartości ujemne?

b) która z liczb: $\sin 60°$, $\sin 100°$, $\sin 265°$ jest mniejsza od $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

c) rozwiąż: $\sin\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0° \le \alpha \le 360°$.

Temat: WYKRES I WŁASNOŚCI FUNKCJI COSINUS

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = cosx$ dla $x \in \langle -\pi; 2\pi\rangle$.



Rozwiązaniami równania:

a) $cosx = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$ są liczby: ______________________________

$cosx = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ są liczby: ______________________________

b) $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$ są liczby: ______________________________

$cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ są liczby: ______________________________

c) $cosx = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$ są liczby: ______________________________

$cosx = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ są liczby: ______________________________

Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji $y = \cos x$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, oraz podaj:

- dziedzinę,
- przedziały, w których funkcja rośnie,
- przedziały, w których funkcja maleje,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = cosx$ w przedziale $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$.

Odpowiedz na pytania, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = cosx$.

a) Ile miejsc zerowych w przedziale $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$ ma funkcja $f(x) = cosx$?

b) Dla jakich $x \in \langle -3\pi; 3\pi \rangle$ spełnione jest równanie $cosx = 1$?

c) Ile rozwiązań w przedziale $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$ ma równanie $\cos x = \frac{3}{4}$?

Zadanie 4. Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = \cos x$ należące do przedziału:

a) $\langle 0; 2\pi \rangle$, b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ c) $\left(-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi \right\rangle$, d) $\left(-\frac{9}{2}\pi; \frac{15}{2}\pi \right)$.

Zadanie 5. Korzystając z wykresu $y = \cos \alpha$ wskaż wszystkie wartości $\alpha \in \langle -180°; 360° \rangle$ takie, że $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 6. Korzystając z wykresu funkcji $y = \cos x$, wskaż wszystkie liczby $x \in (0; 3\pi)$ takie, że $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 7. Naszkicuj wykres funkcji $y = \cos x$ dla $0° \le x \le 360°$, a następnie korzystając z wykresu, określ:

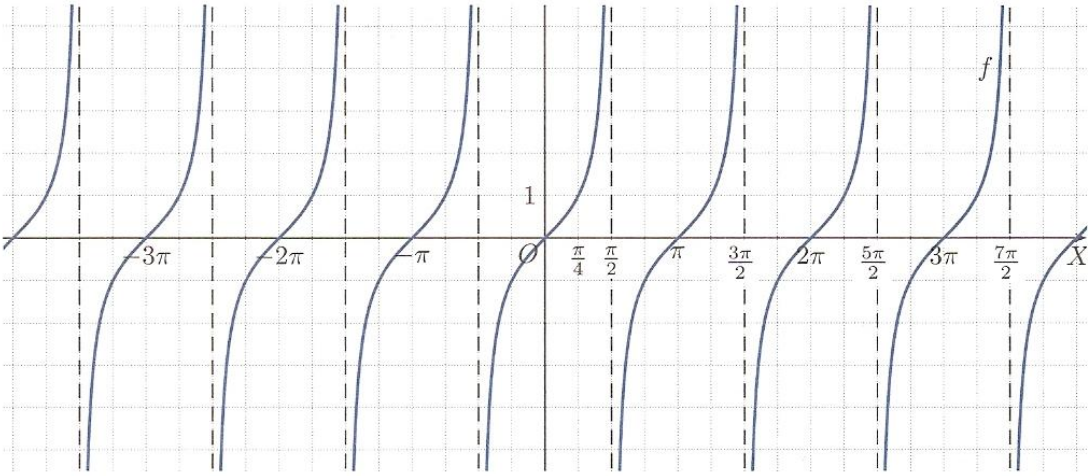
a) dla jakich argumentów spełniających warunek $0° \le x \le 360°$ funkcja jest malejąca i jednocześnie przyjmuje wartości ujemne?

b) która z liczb: $\cos 45°$, $\cos 182°$, $\cos 325°$ jest mniejsza od $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

c) rozwiąż: $\cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0° \le \alpha \le 360°$.

Temat: WYKRES I WŁASNOŚCI FUNKCJI TANGENS

Zadanie 1. Poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = tgx,\ x \in \mathbf{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\right\}$.



Określ prawdziwość zdań na podstawie wykresu.

A. Okresem podstawowym funkcji $f(x) = tgx$ jest liczba $T = \pi$. TAK / NIE

B. Równanie $tgx = 0$ jest spełnione dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. TAK / NIE

C. Asymptotami wykresu funkcji f są proste $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. TAK / NIE

D. Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = tgx$. TAK / NIE

Zadanie 2. Podaj rozwiązania równania należące do przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$.

a) $tgx = 0$ b) $tgx = 1$ c) $tgx = -\sqrt{3}$ d) $tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji $y = tgx$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$,

oraz podaj:

- dziedzinę,
- przedziały, w których funkcja rośnie,
- przedziały, w których funkcja maleje,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne.
- równania asymptot pionowych jej wykresu.

Zadanie 4. Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, wyznacz rozwiązanie równania:

a) $tg\, x = \sqrt{3}$, b) $tg\, x = -\sqrt{3}$, c) $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadanie 5. Wskaż wszystkie liczby x spełniające równanie:

a) $tg\,x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$,

b) $tg\,x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle -3\pi; -2\pi \rangle$,

c) $tg\,x = -1$ i $x \in \langle 4\pi; 5\pi \rangle$.

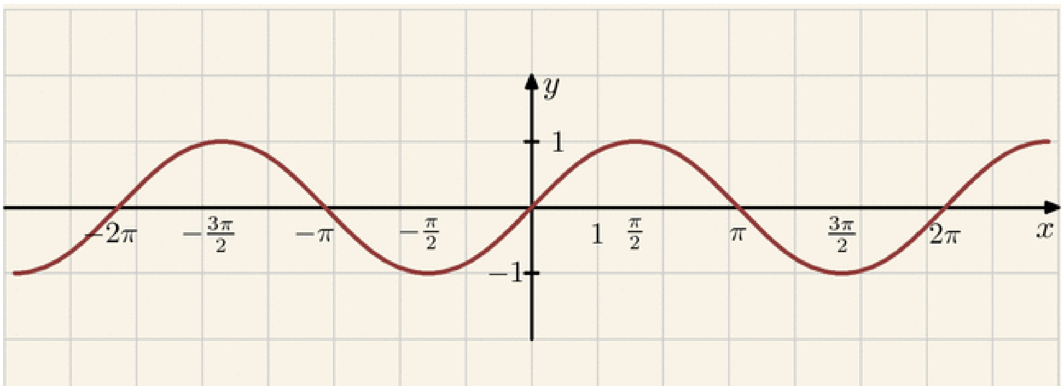
Zadanie 6. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$.

a) $\operatorname{tg} x = 0$, c) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$,

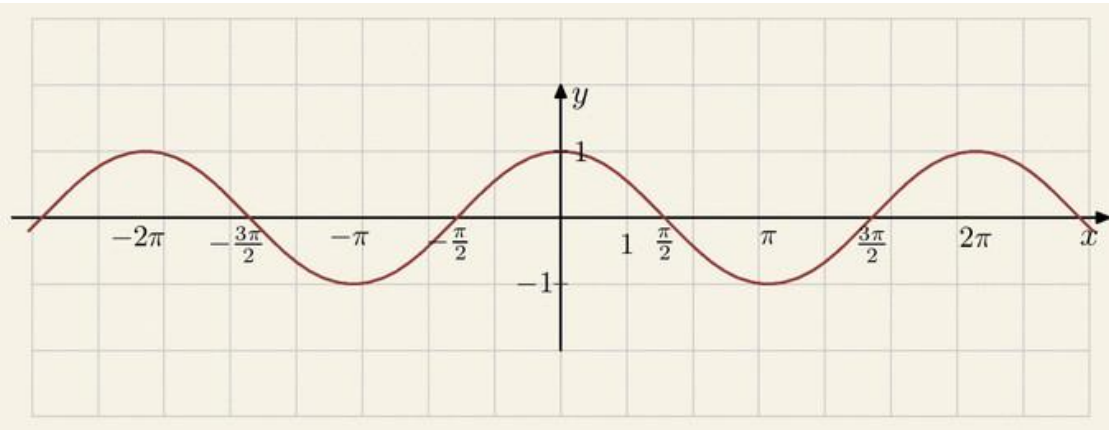
b) $\operatorname{tg} x = 1$, d) $\operatorname{tg} x = -1$, f) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Temat: PRZESUNIĘCIE WYKRESU FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNEJ O WEKTOR

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = sinx$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = sinx + 1$ i $h(x) = sinx - \frac{1}{2}$ oraz podaj ich zbiory wartości.

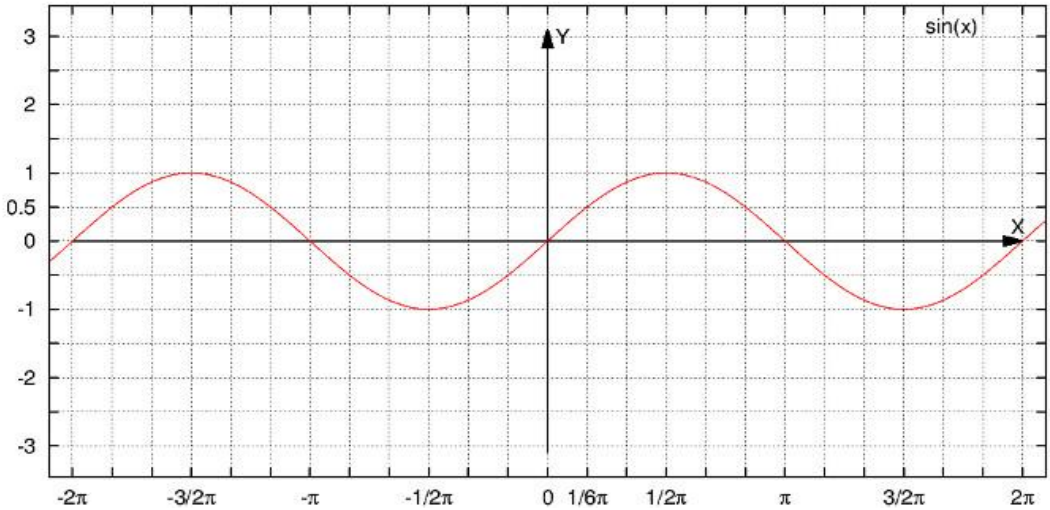


Zadanie 2. Dany jest wykres funkcji $f(x) = cosx$. Naszkicuj wykresy funkcji: $f(x) = cosx$, $g(x) = cosx + \frac{3}{2}$ i $h(x) = cosx - 1$ oraz podaj ich zbiory wartości.

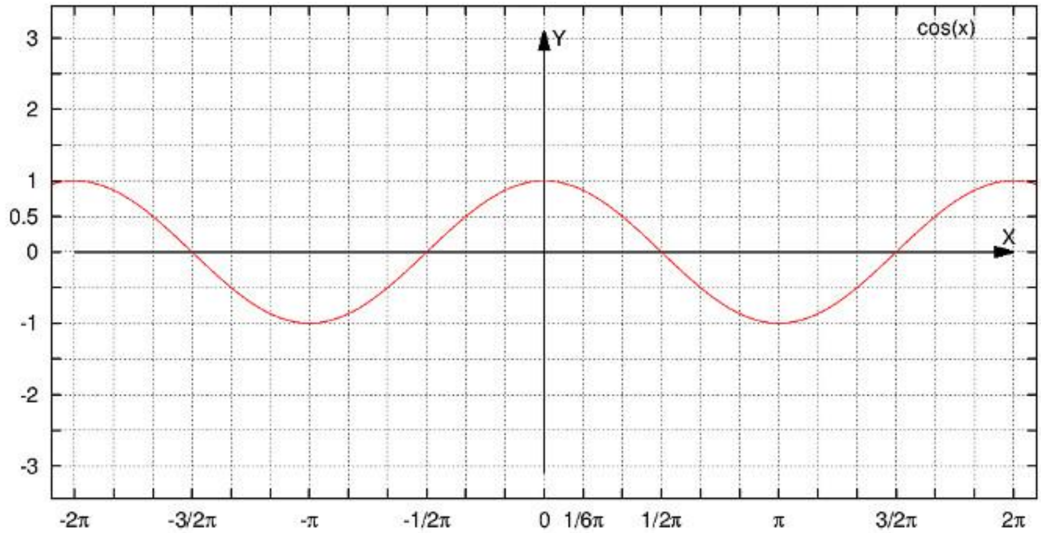


Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej zbiór wartości, okres podstawowy oraz miejsca zerowe.

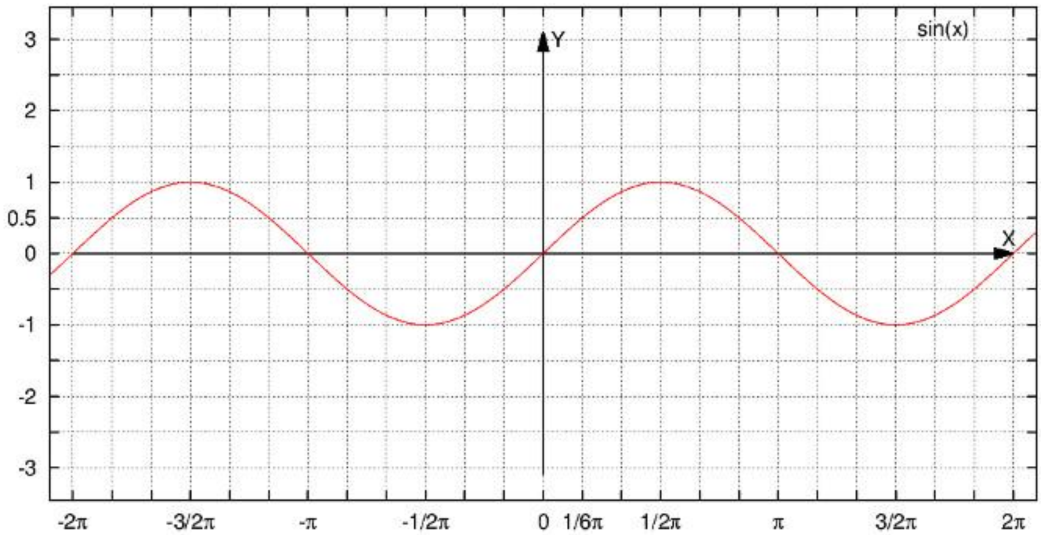
$a)\ f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$,



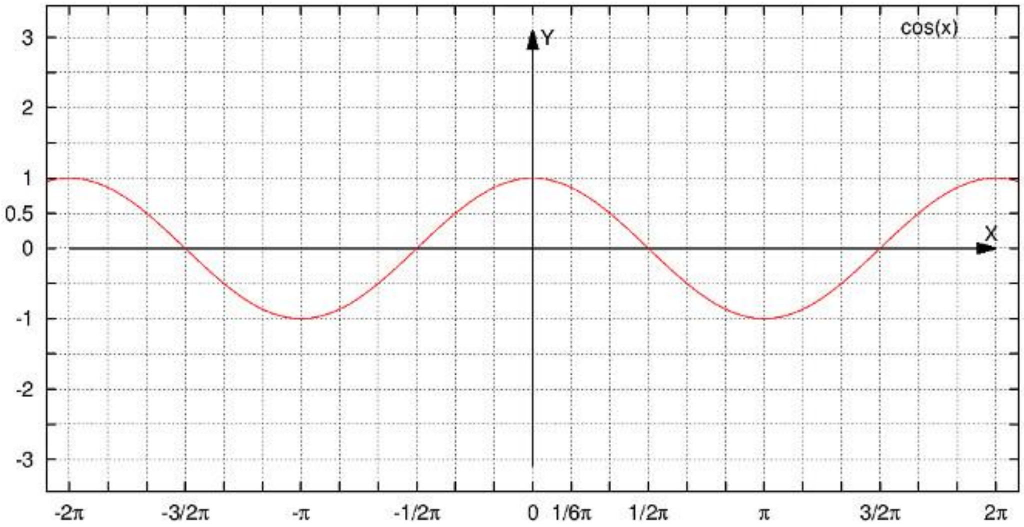
$b)\ f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,



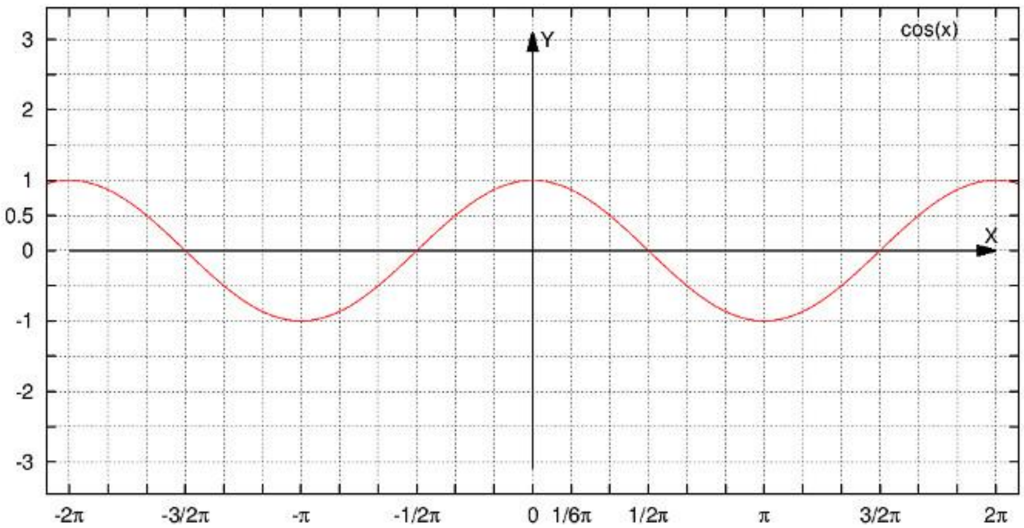
c) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



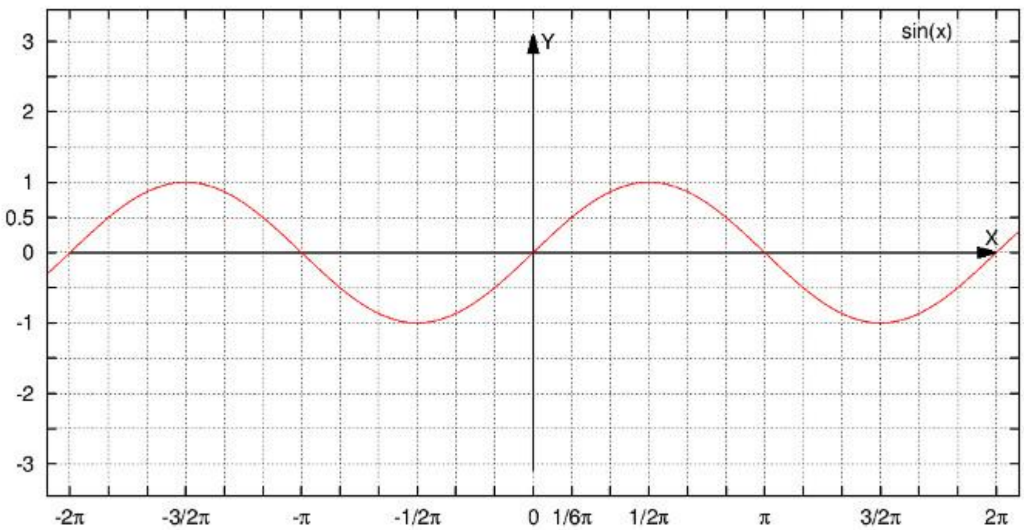
$d)\ f(x) = \cos(x+\pi)$,



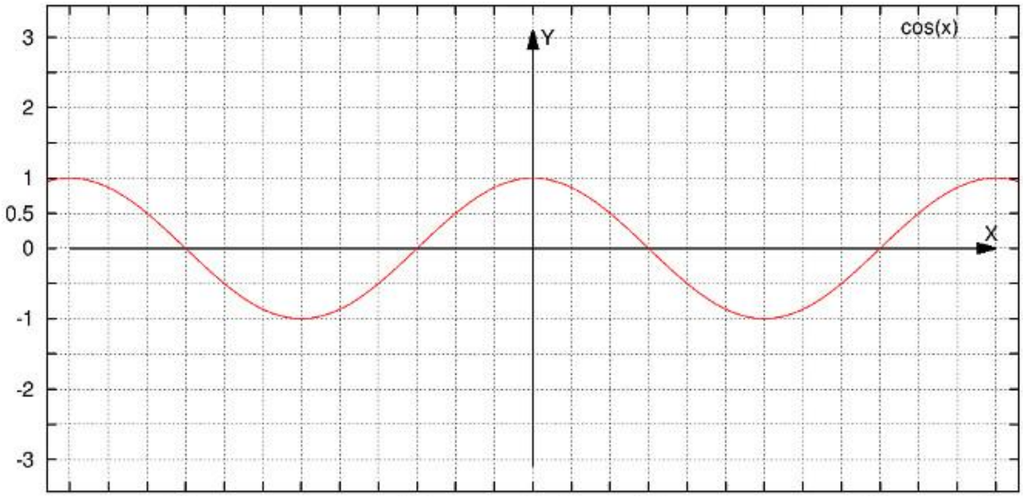
e) $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$



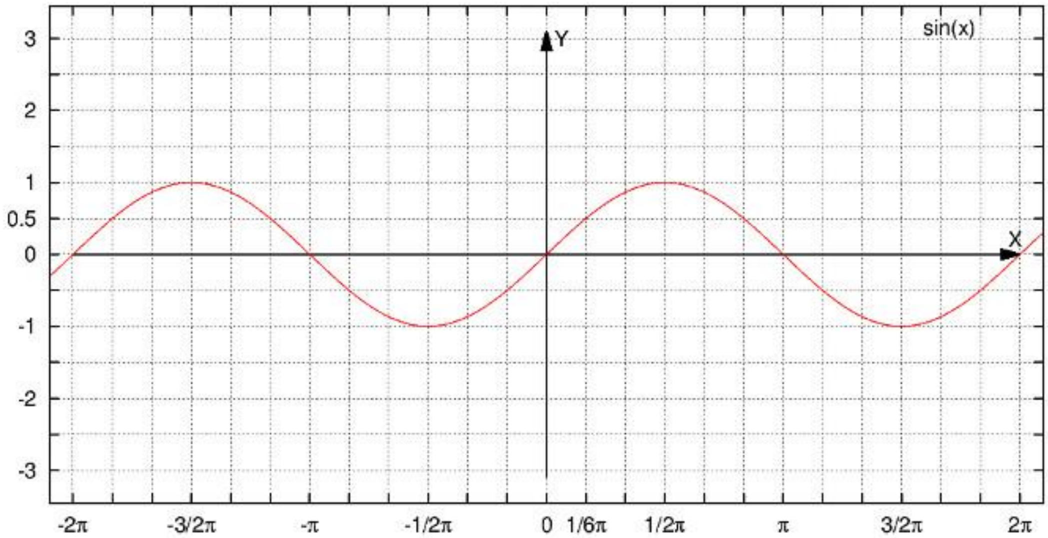
$f)\ f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,



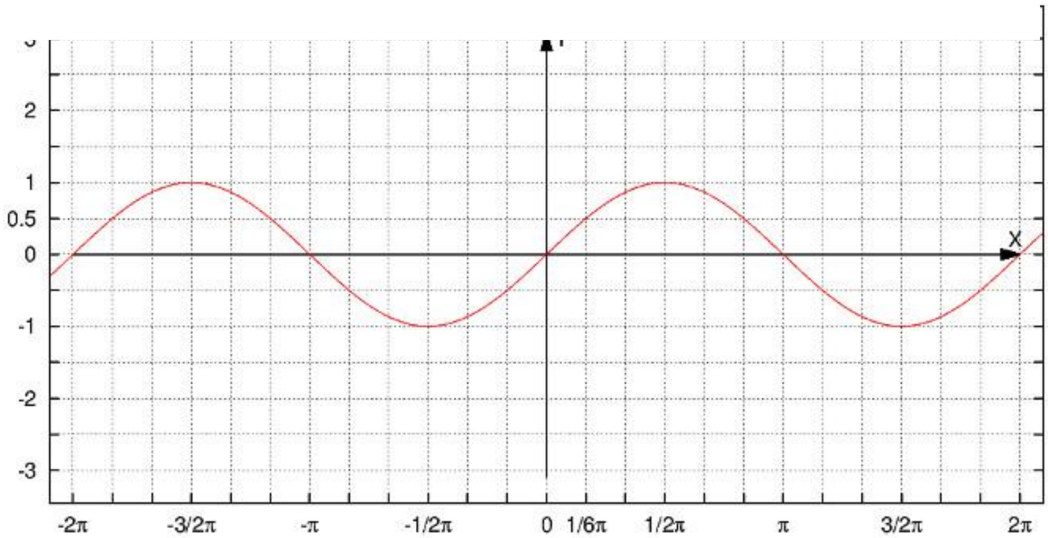
g) $f(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.



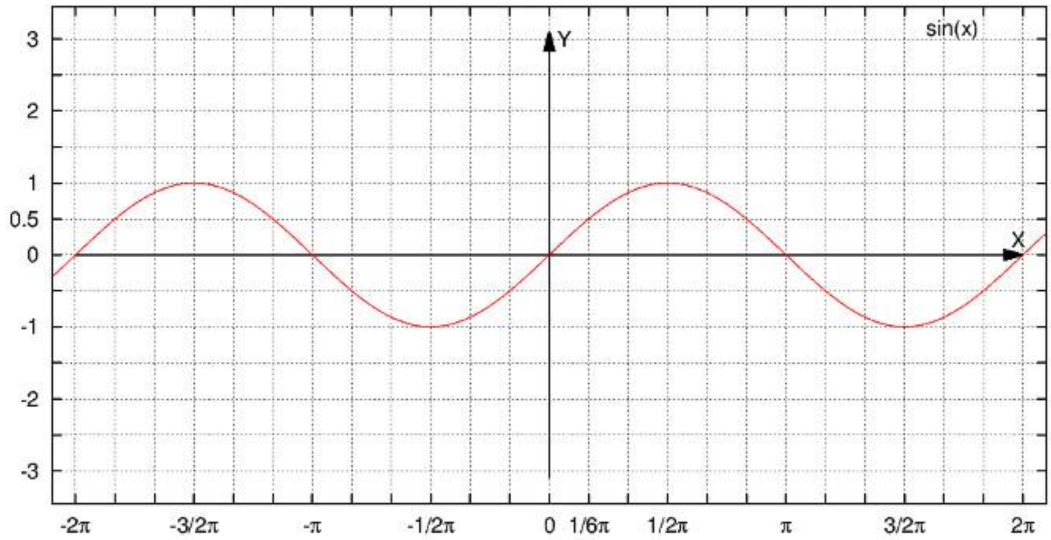
h) $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,



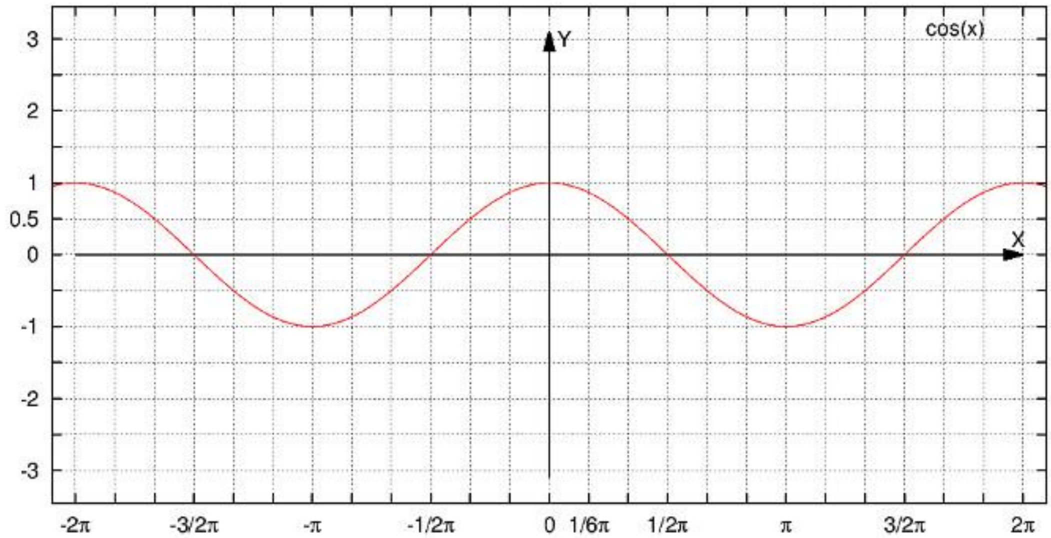
i) $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,



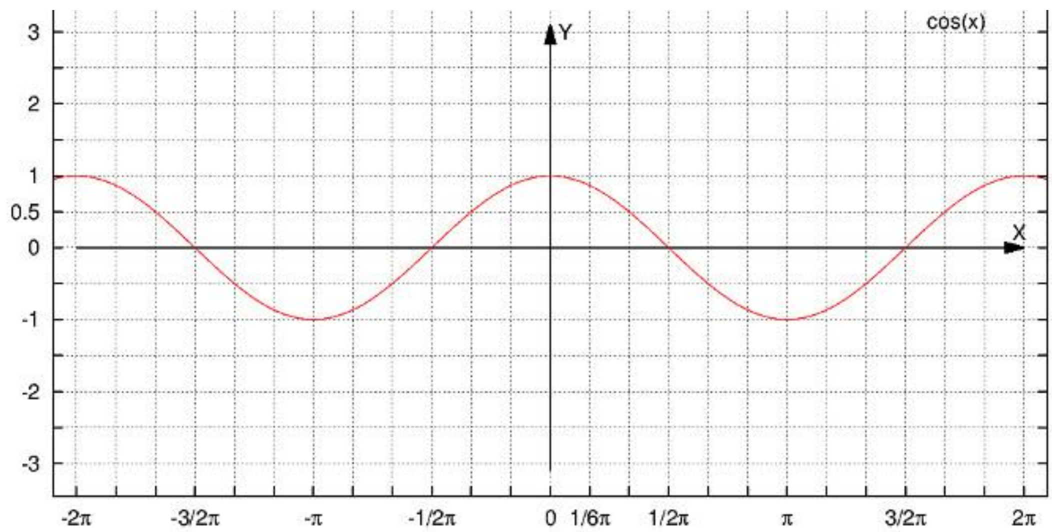
j) $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,



k) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

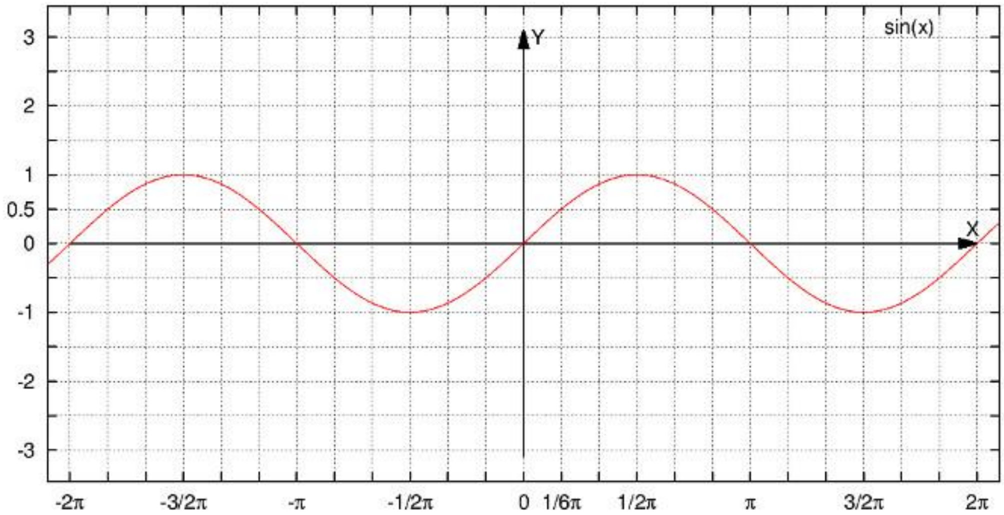


l) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

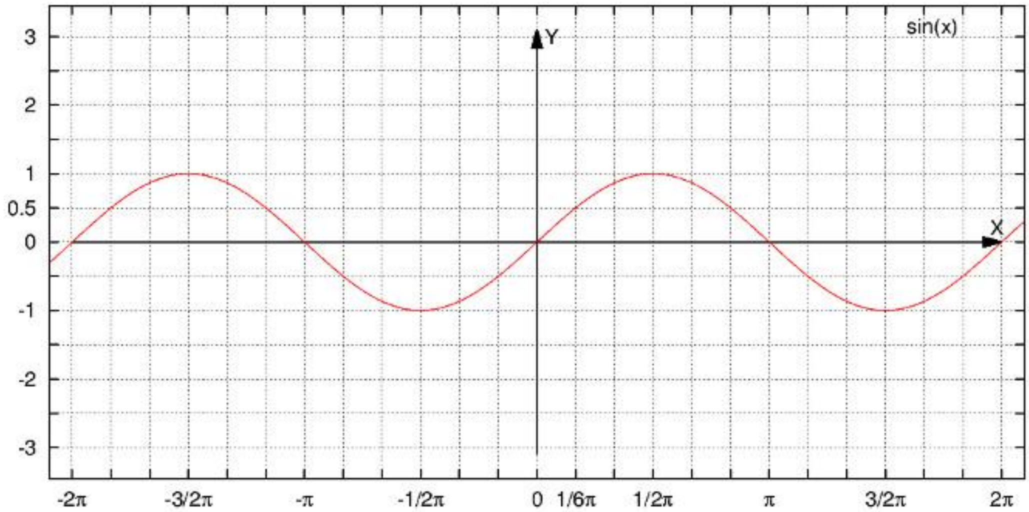


Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

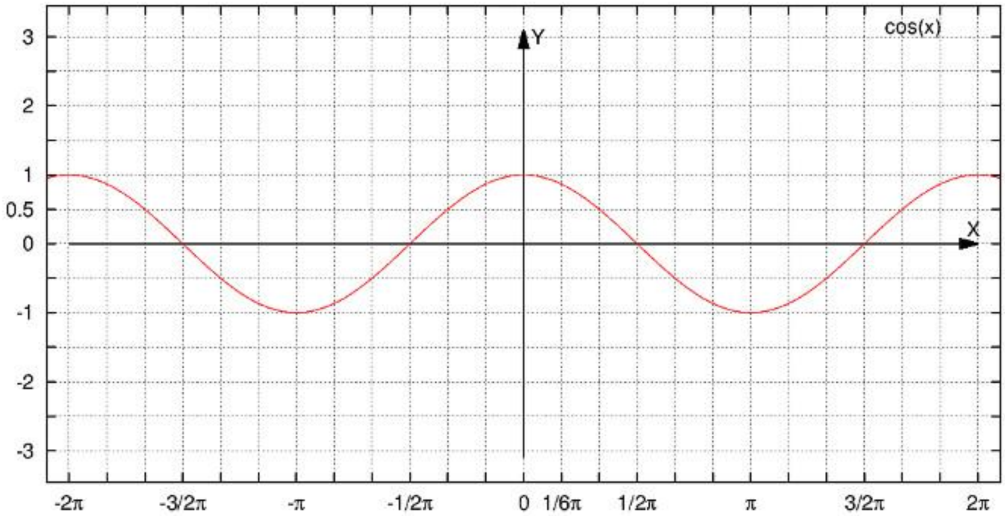
a) $f(x) = \sin x - 1$,



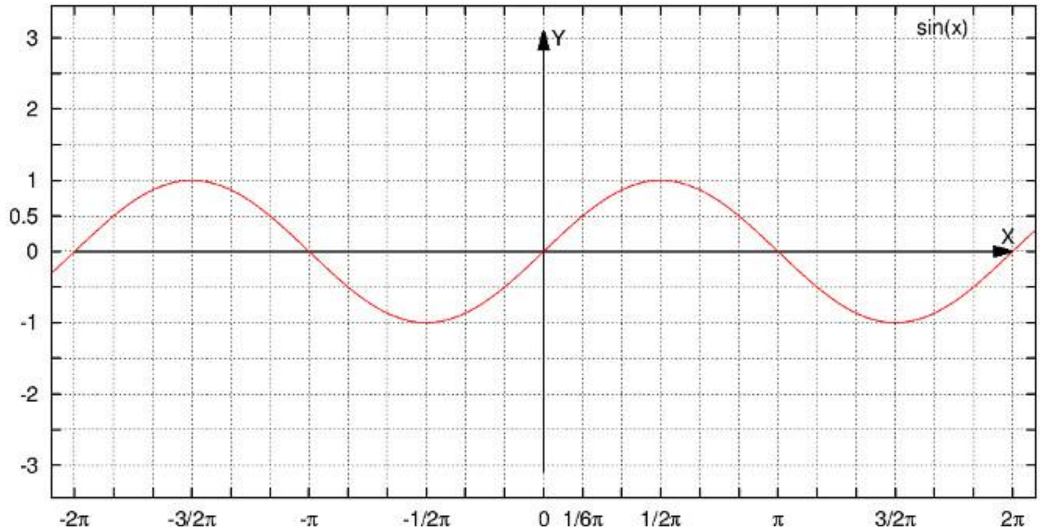
b) $f(x) = \sin x - 2$,



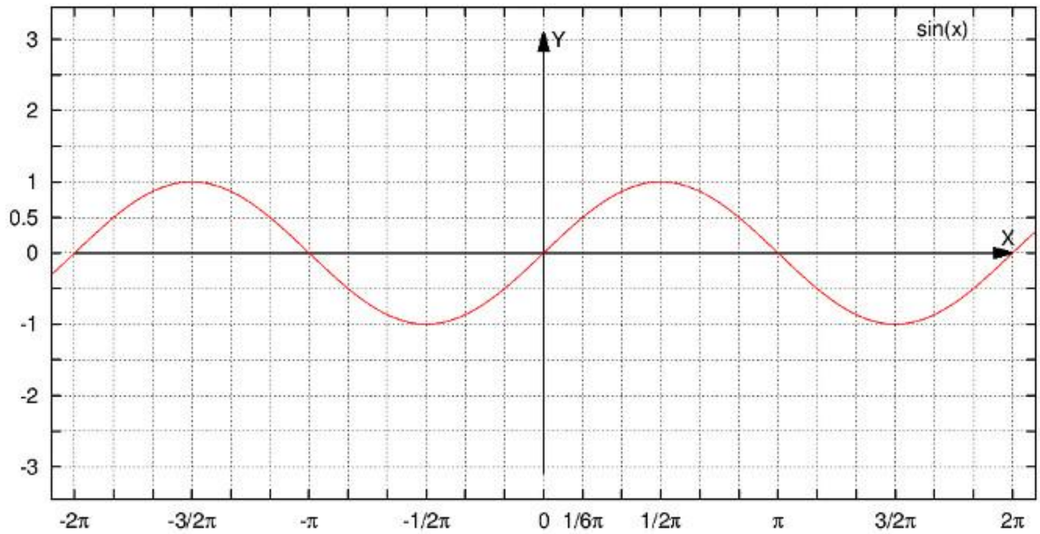
c) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}$,



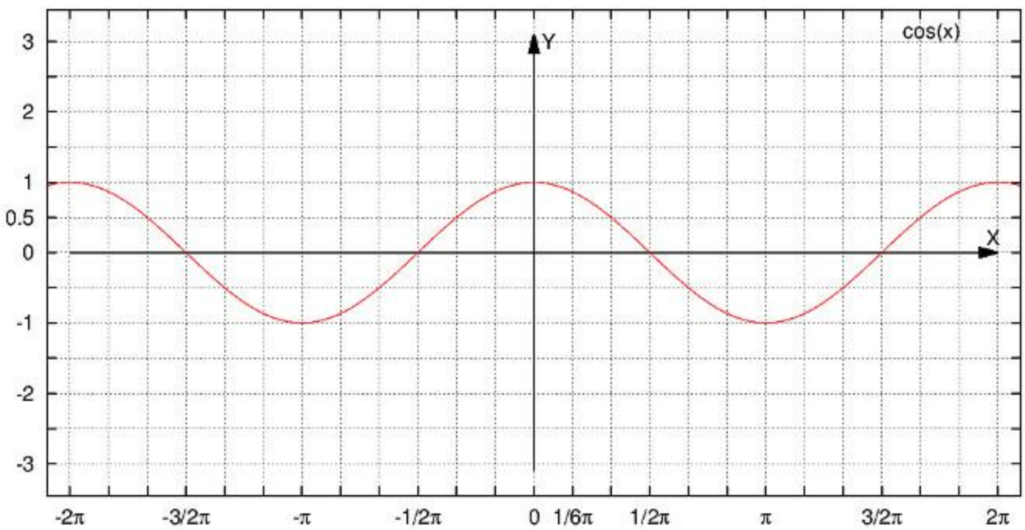
d) $f(x) = -\sin x - 2$



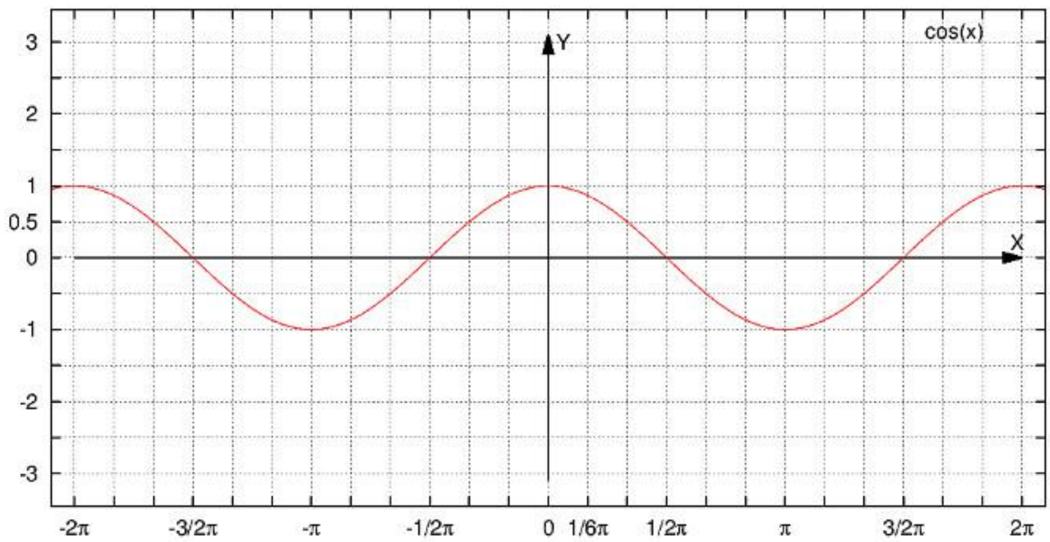
e) $f(x) = \sin x + 3$,



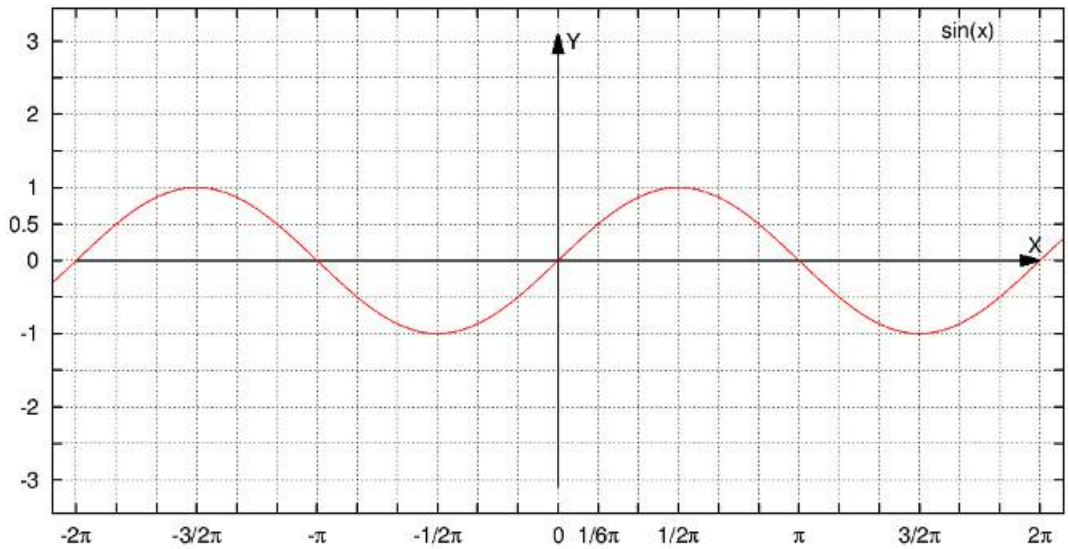
f) $f(x) = 2 - \cos x$,



g) $f(x) = \cos x + 2$,

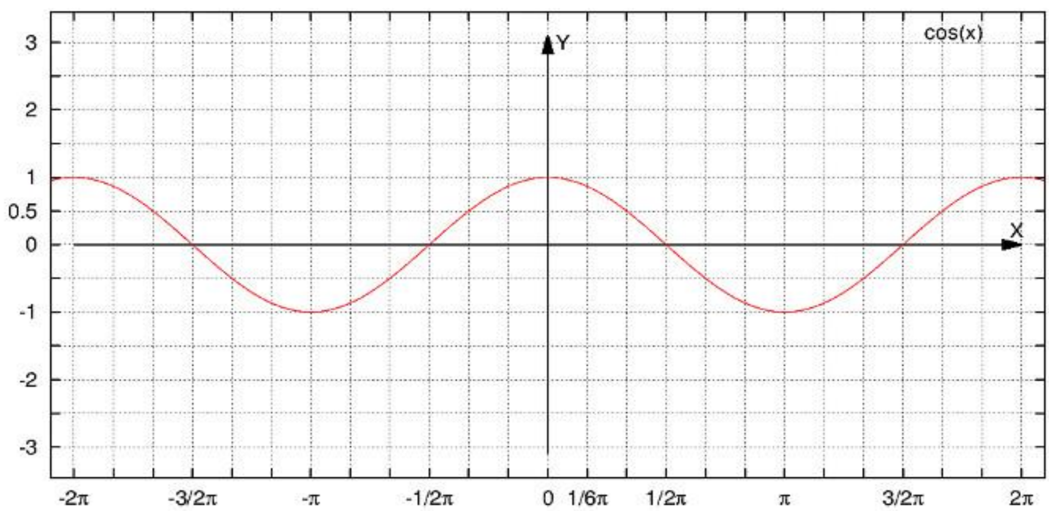


h) $f(x) = -\sin x - 3$.

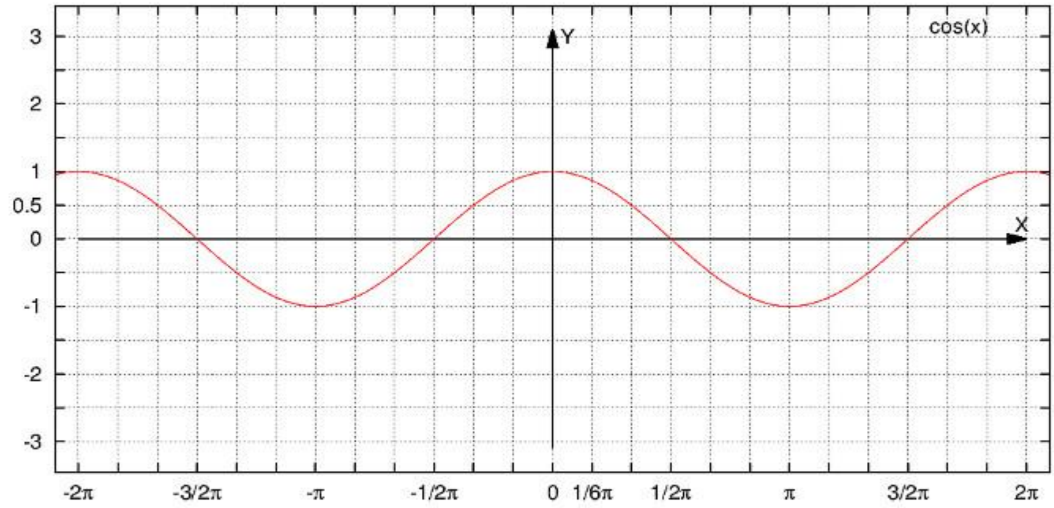


Zadanie 5. Naszkicuj wykres funkcji, podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

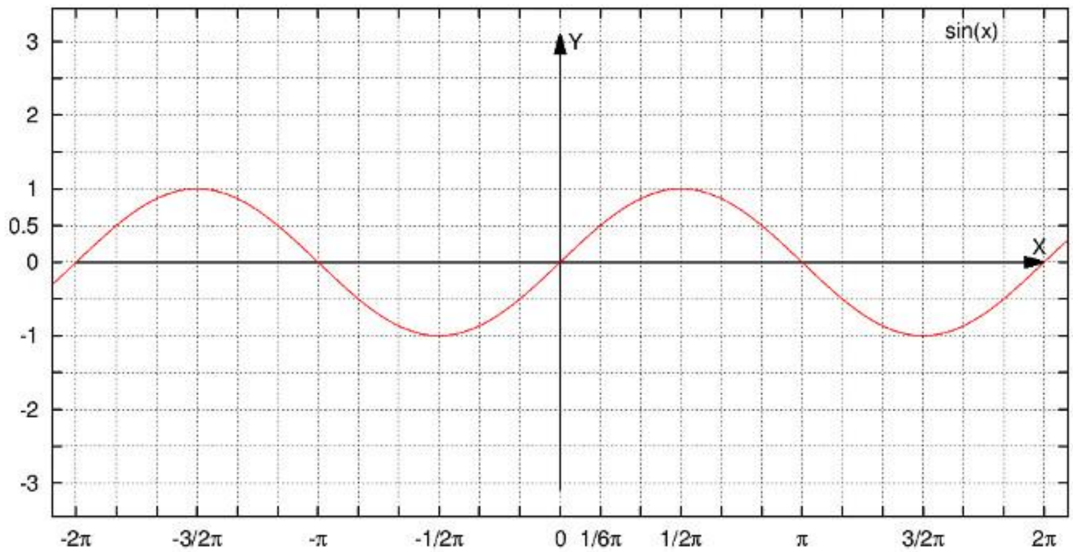
a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$,



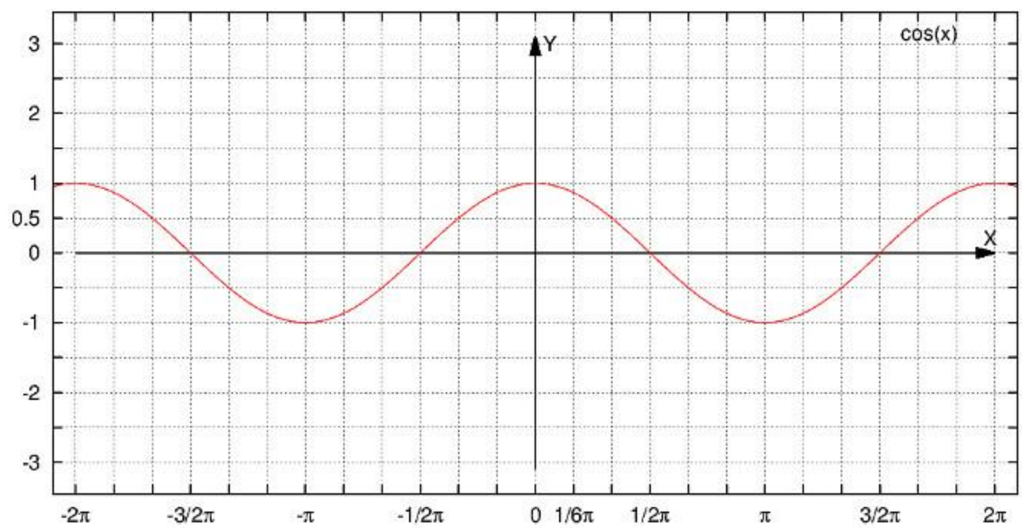
b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2,$



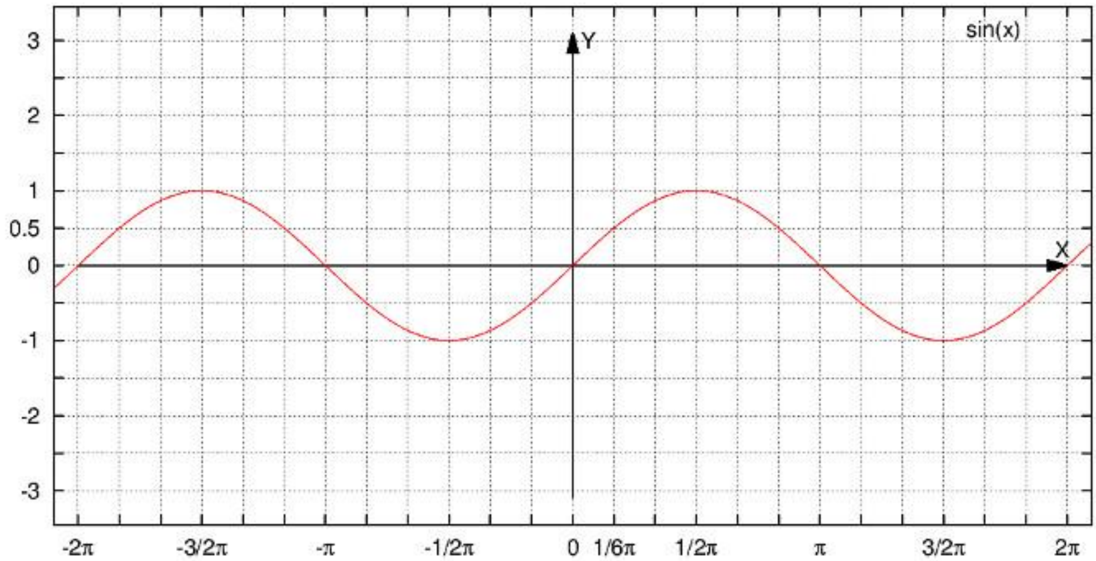
c) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2,$



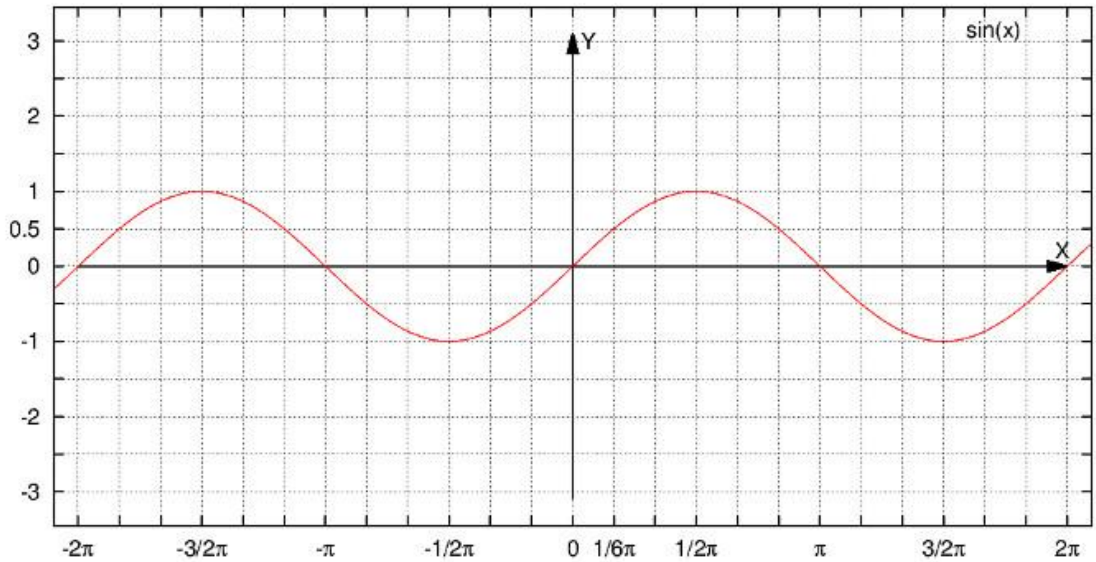
d) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2,$



e) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1,$



f) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1\frac{1}{2}$



Zadanie 6. Naszkicuj wykresy funkcji *f*, podaj dziedzinę, miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3,$

b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1,$

c) $f(x) = \sin x + 2,$

d) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2.$

Zadanie 7. Podaj zbiór wartości funkcji *f* .

a) $f(x) = \sin x + 4,$

b) $f(x) = \sin x - 3,$

c) $f(x) = \cos x - \frac{1}{3},$

d) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$

e) $f(x) = 3 - \cos x,$

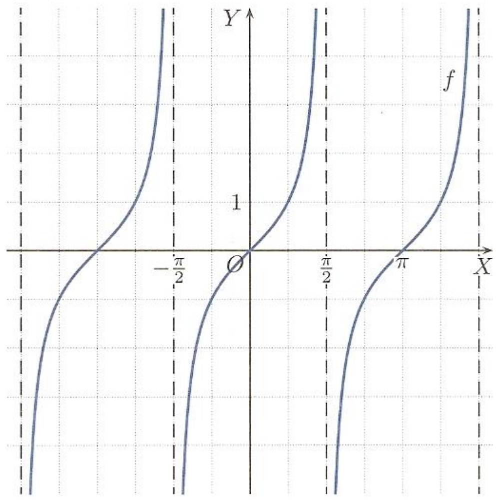
f) $f(x) = -1 - \sin x.$

Zadanie 8. Naszkicuj wykresy funkcji:

$$f(x) = sinx, \quad g(x) = -sinx, \quad h(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Dla jakich $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ zachodzi równość: $h(x) = 1$?

Zadanie 9. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = tgx$ o dziedzinie $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\right\}$. Asymptotami pionowymi tego wykresu są proste o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.



a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Podaj dziedzinę funkcji *g*.

c) Podaj równania asymptot pionowych wykresu funkcji *g*.

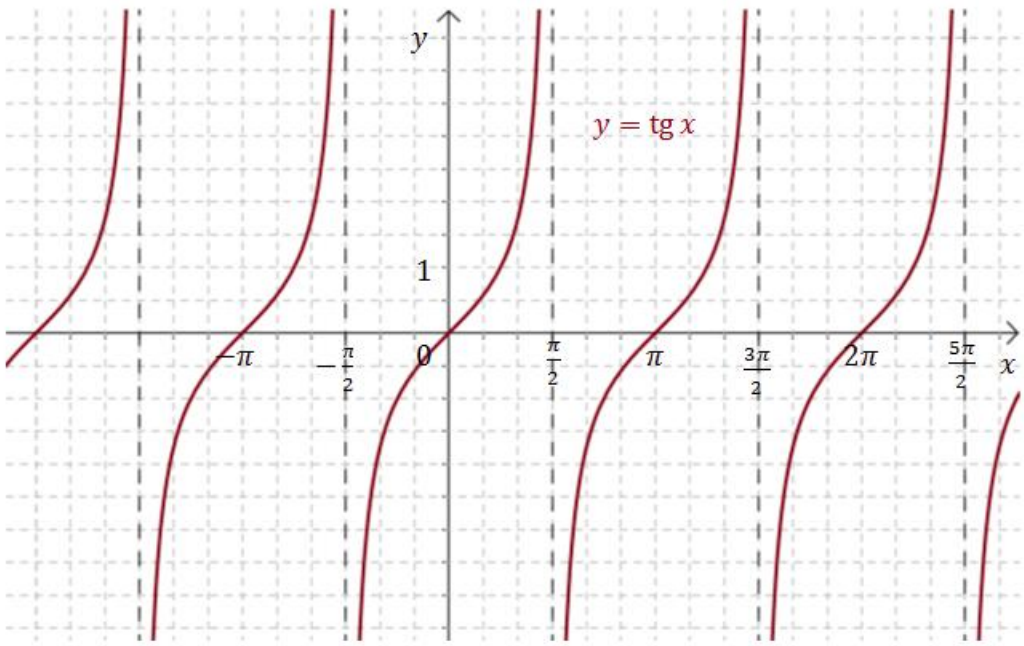
Zadanie 10. Naszkicuj wykresy funkcji $y = -f(x)$ i $y = -f(x) + 2$, jeżeli $f(x) = tgx$

Zadanie 11. Narysuj w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ wykres funkcji: $y = -2 + 2\cos x$.

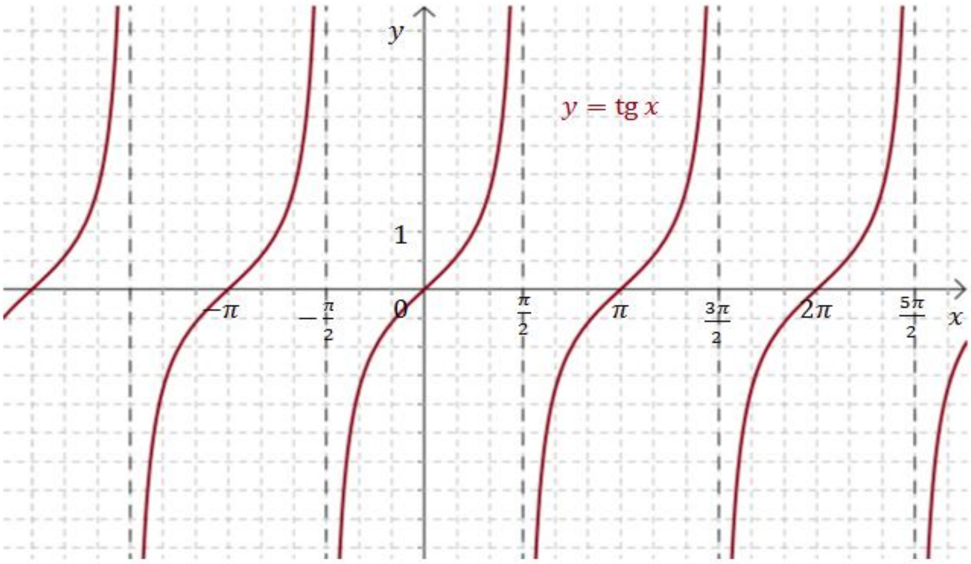
Wyznacz: zbiór wartości, miejsca zerowe i przedziały, w których funkcja rośnie.

Zadanie 12. Naszkicuj wykres funkcji *f* i podaj jej dziedzinę.

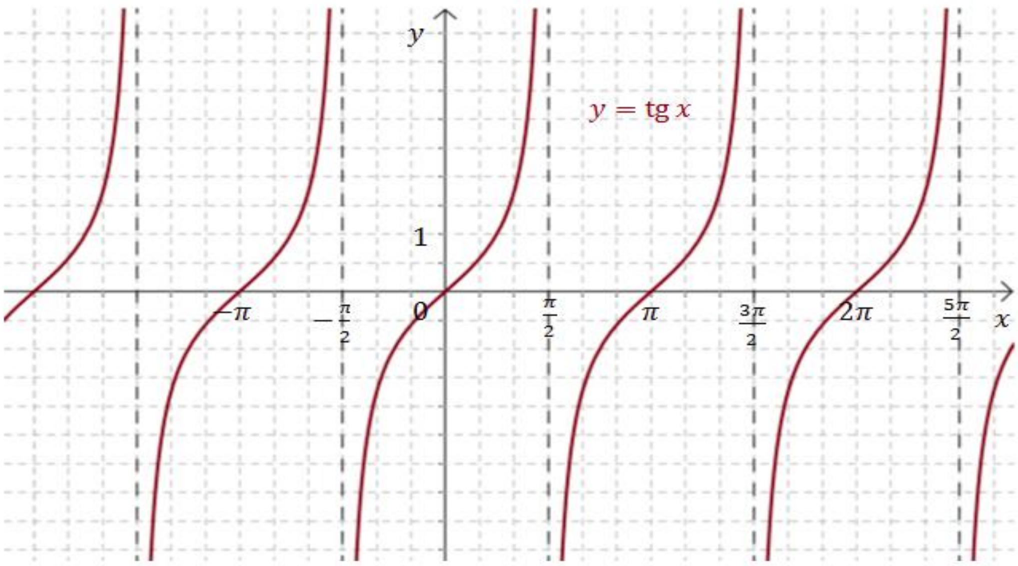
a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,



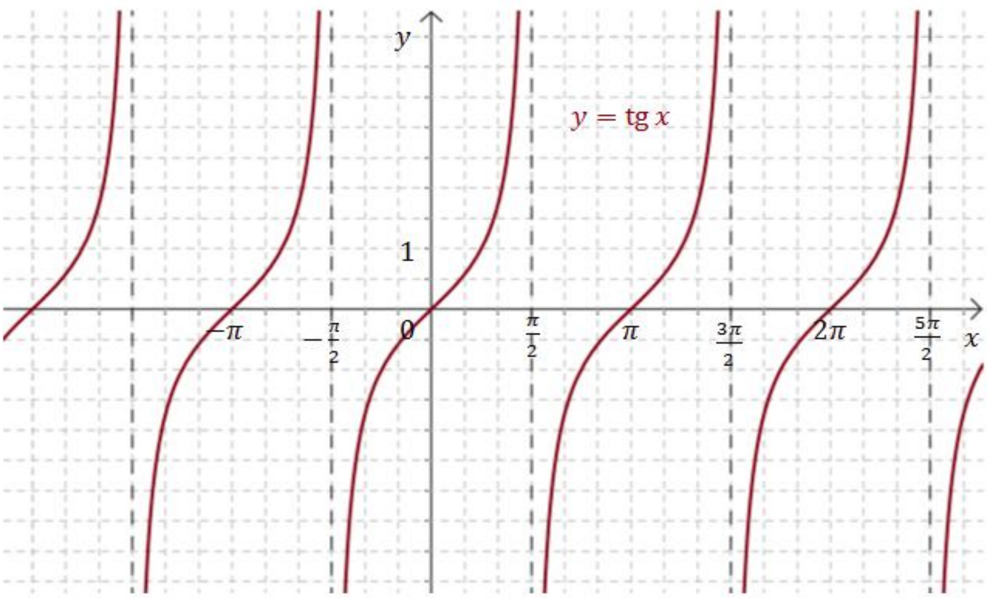
b) $f(x) = \text{tg}\, x + 1$,



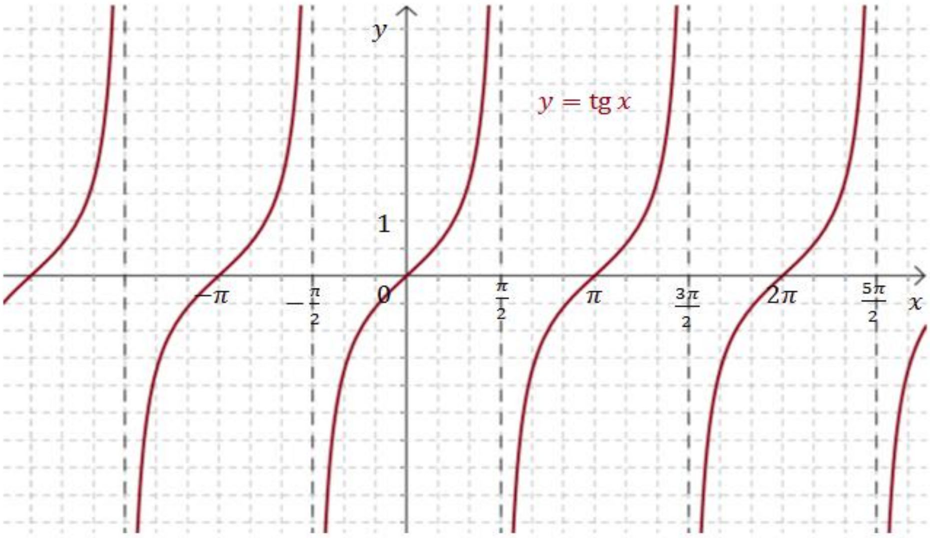
c) $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,



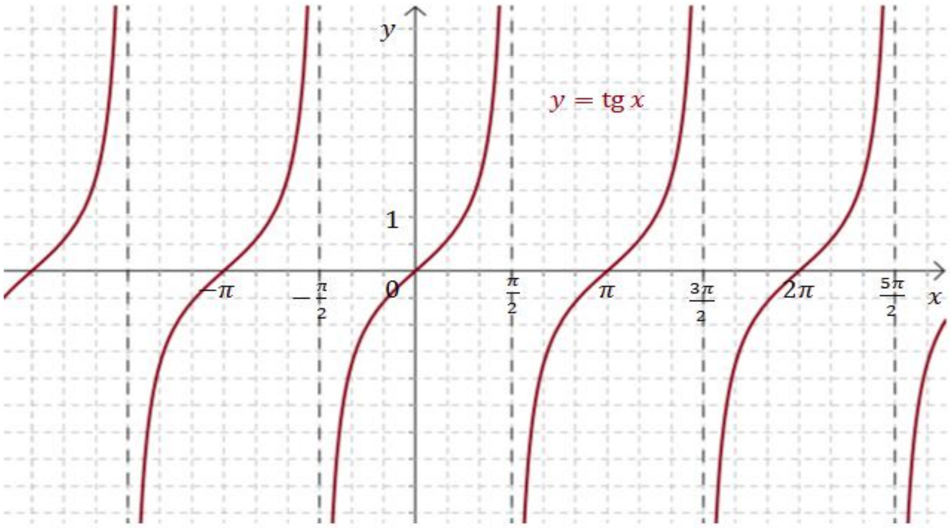
d) $f(x) = tgx - 2$



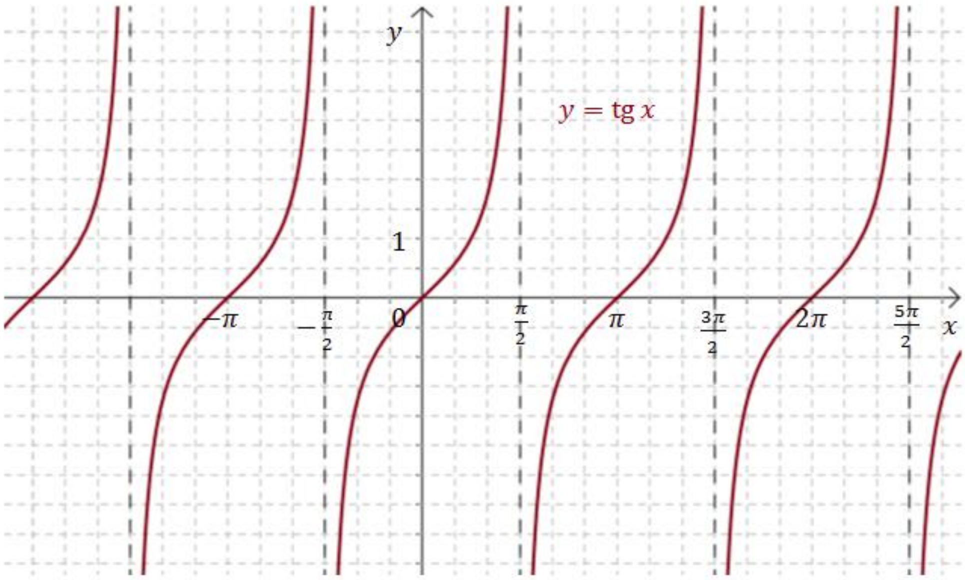
e) $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,



f) $f(x) = tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

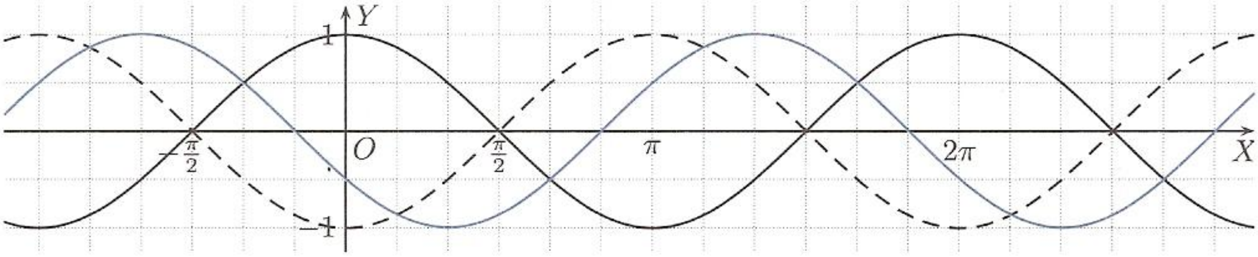


g) $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



Zadanie 13. Podpisz przedstawione poniżej wykresy funkcji:

$$f(x) = cosx, \quad g(x) = -cosx, \quad h(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

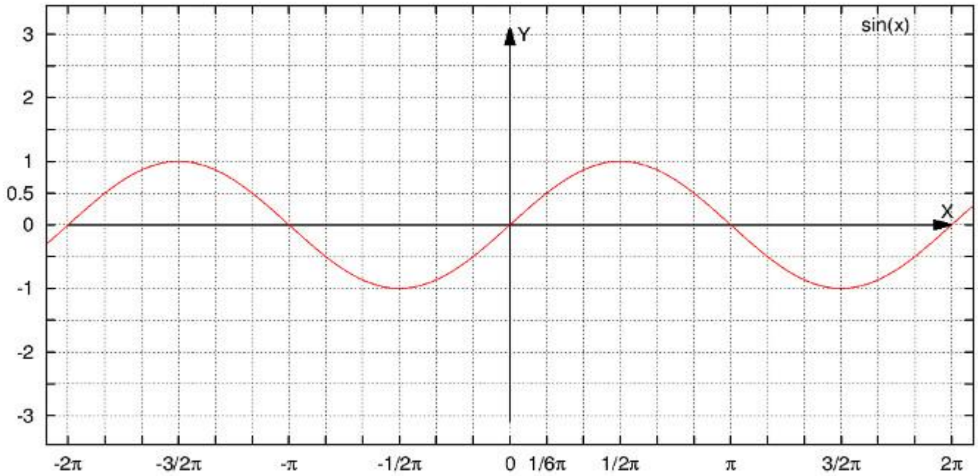


Dla jakich $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ zachodzi równość: $-\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$?

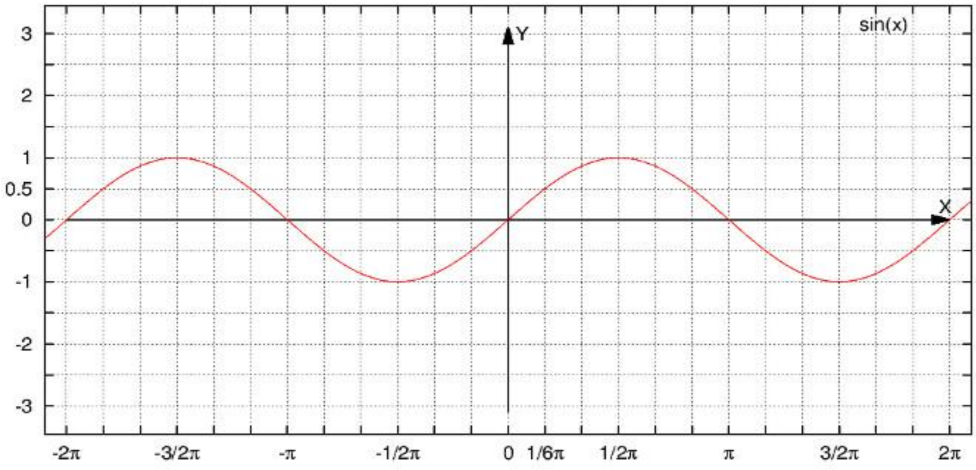
Temat: PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNEJ $y = af(x)$

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji, podaj jej zbiór wartości i amplitudę jej wykresu.

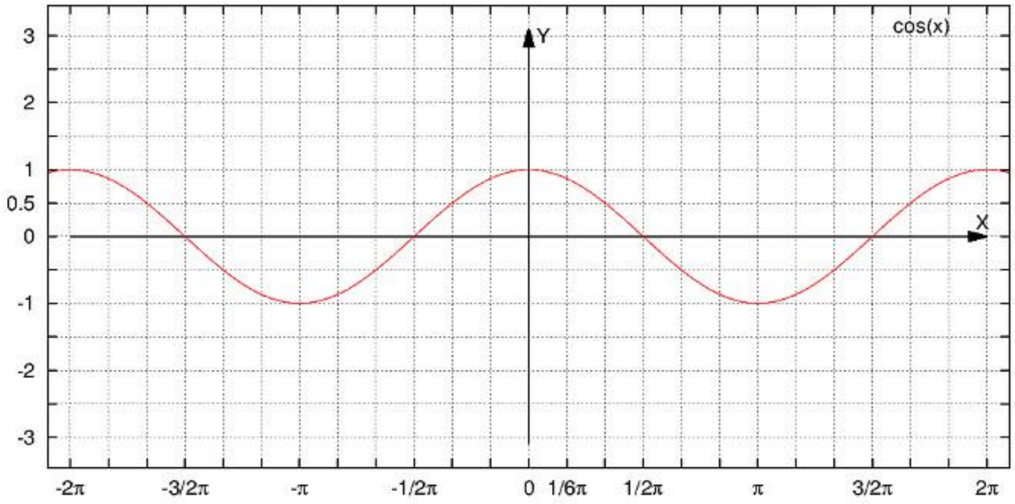
$a)\ f(x) = 3sinx,$



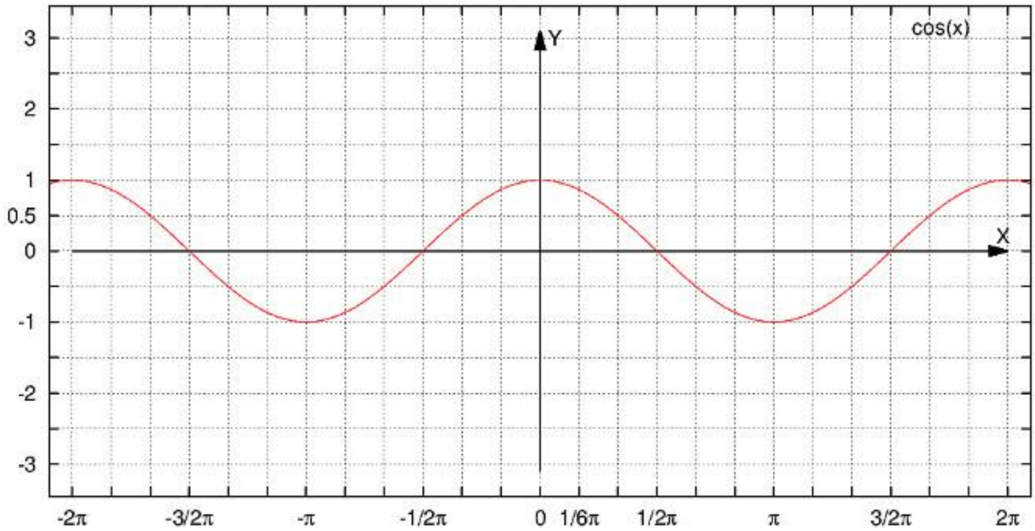
$b)\ f(x) = \frac{3}{2}sinx,$



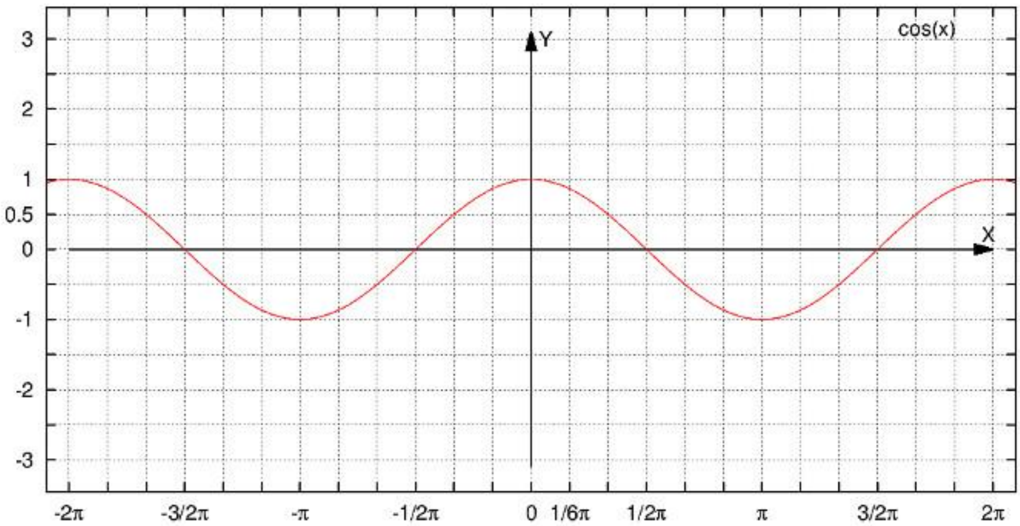
$c)\ f(x) = -\frac{1}{2} cosx$



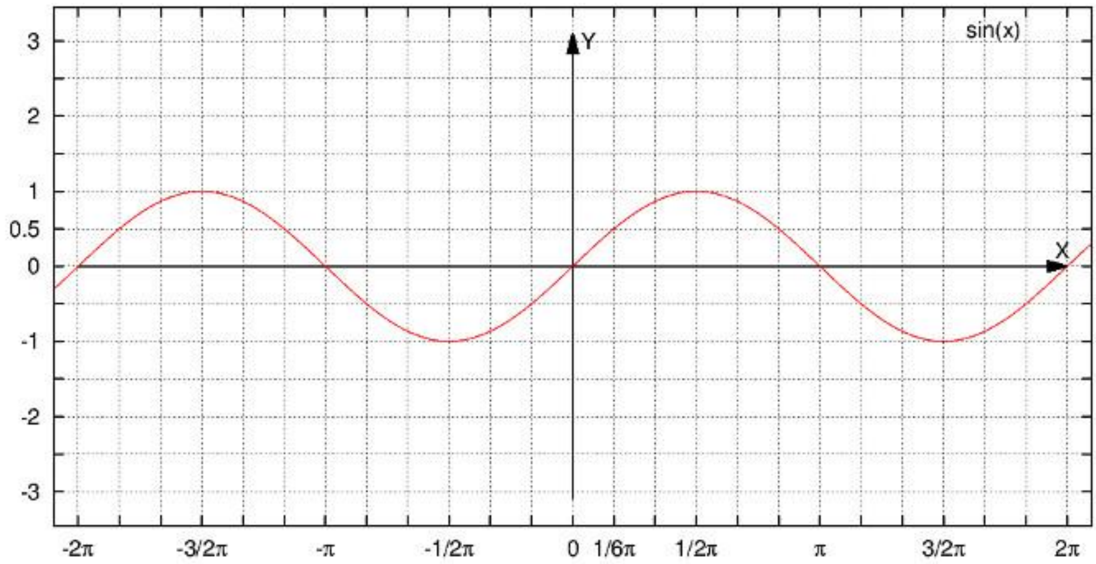
$d)\ f(x) = 4cosx$



$e)\ f(x) = -2cosx,$



$f) f(x) = -2{,}5\, sinx.$



Zadanie 2. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji *f*, *g* i *h*.

a) $f(x) = 2\sin x$, $\quad g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $\quad h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

b) $f(x) = 3\cos x$, $\quad g(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\quad h(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $\quad g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad h(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

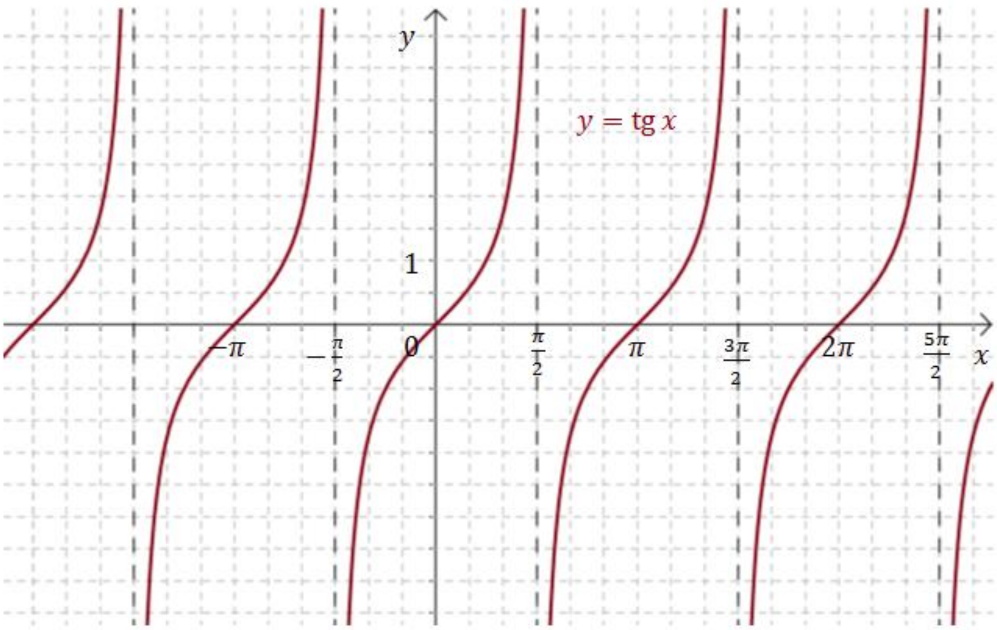
d) $f(x) = 2\cos x$, $\quad g(x) = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$, $\quad h(x) = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 3$

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji *f* i podaj jej zbiór wartości.

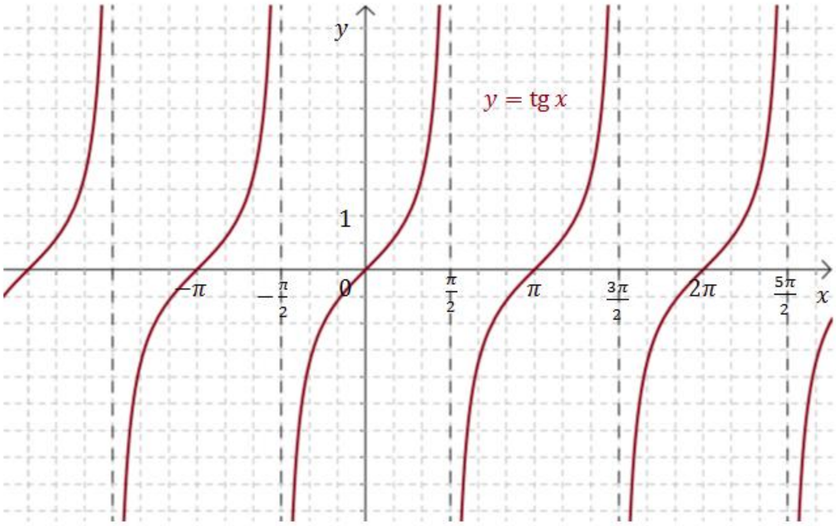
a) $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\quad$ b) $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji *f*.

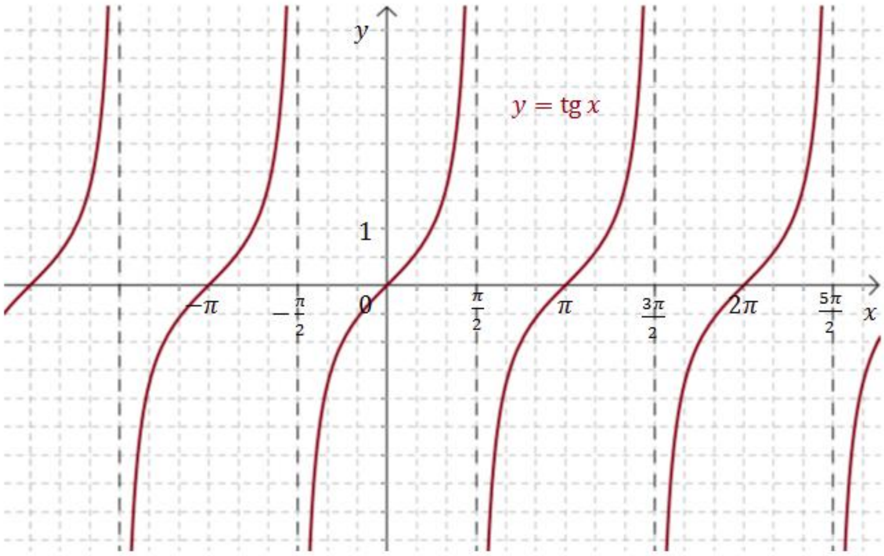
a) $f(x) = -2\,\mathrm{tg}\, x$,



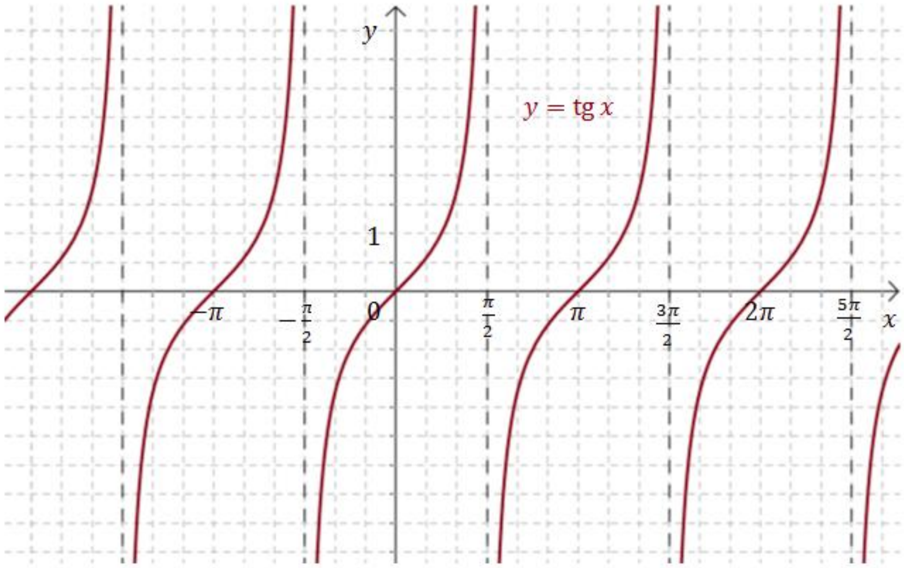
b) $f(x) = 2\,\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$,



c) $f(x) = -\frac{1}{2}\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,



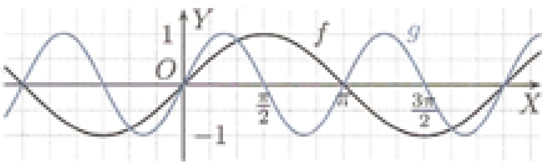
d) $f(x) = \frac{1}{2}\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,



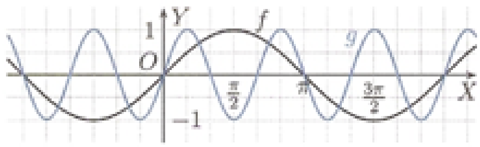
Temat: PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNEJ $y = f(ax)$

Zadanie 1. Podaj okres podstawowy T funkcji *g* (jej wykres przedstawiono kolorem niebieskim, kolorem czarnym narysowano wykres funkcji $f(x) = sinx$).

a) $g(x) = sin2x$



b) $g(x) = sin3x$



Zadanie 2. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = sin\frac{1}{2}x$ i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji f, podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $f(x) = cos4x,$
b) $f(x) = cos\frac{1}{2}x,$
c) $f(x) = -cos\frac{1}{2}x,$
d) $f(x) = sin3x,$
e) $f(x) = sin\frac{1}{3}x,$
f) $f(x) = -sin\frac{1}{2}.$

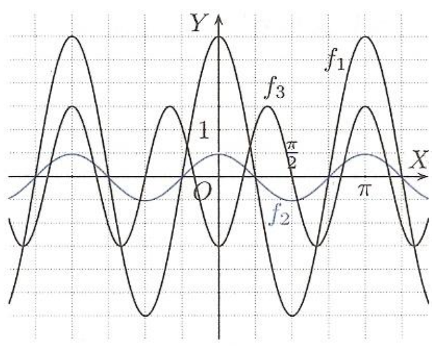
Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.

a) $f(x) = tg\frac{x}{2},$
b) $f(x) = tg3x.$

Zadanie 5. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$
b) $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$
c) $f(x) = \sin 2(x - \pi),$
d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right),$
e) $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$
f) $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right),$
g) $f(x) = |cos2x|,$
h) $f(x) = |2sin3x|,$
i) $f(x) = \left|sin\frac{1}{2}x\right|.$

Zadanie 6. Każda z funkcji f_1, f_2, f_3 określona jest wzorem $y = a \cdot cosbx$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{R}$. Podaj wzory tych funkcji.



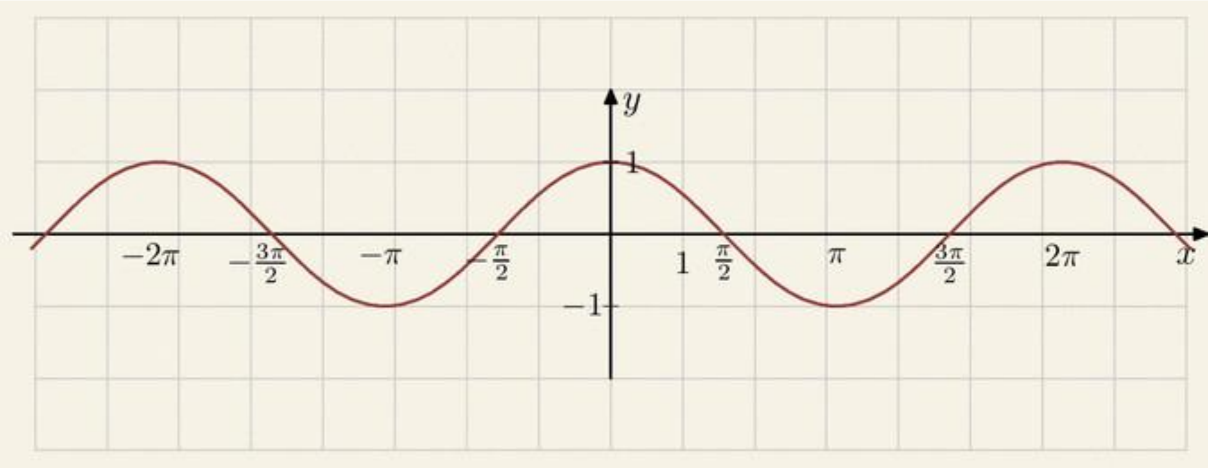
Zadanie7. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = 3sin2x$, b) $f(x) = -2sin3x$, c) $f(x) = 4cos3x$, d) $f(x) = \frac{1}{2}cos2x$.

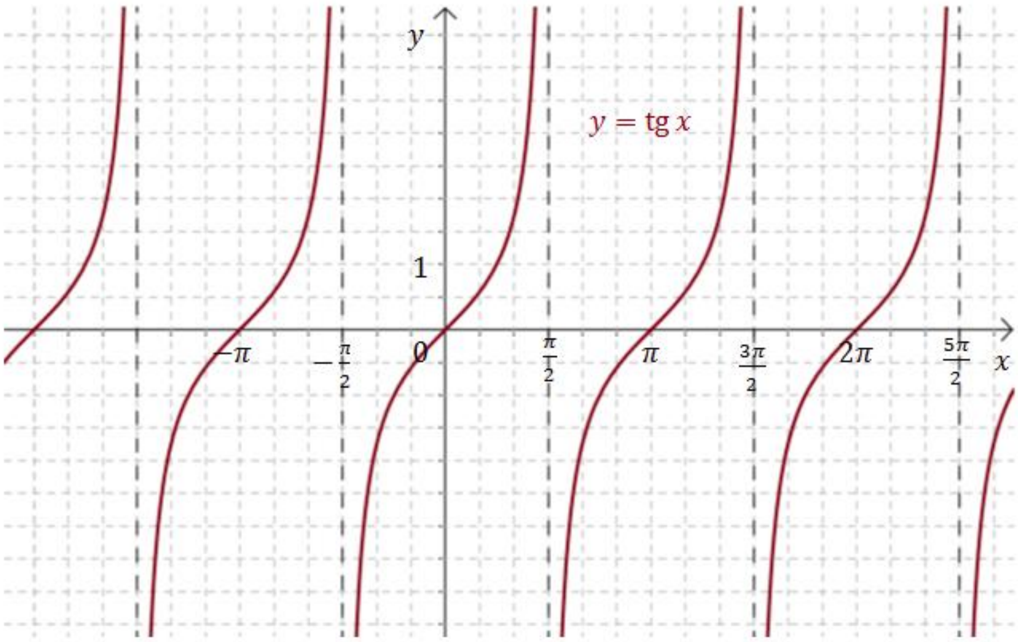
Temat: PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNEJ $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$.

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

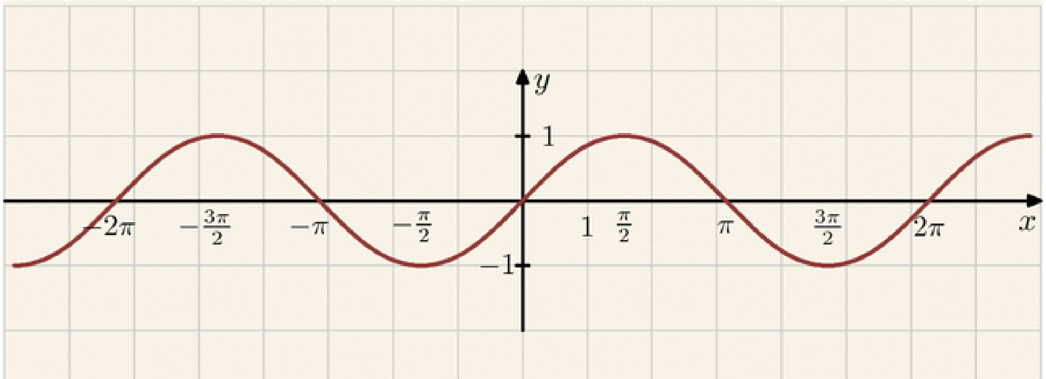
$a)\ f(x) = |cosx|$



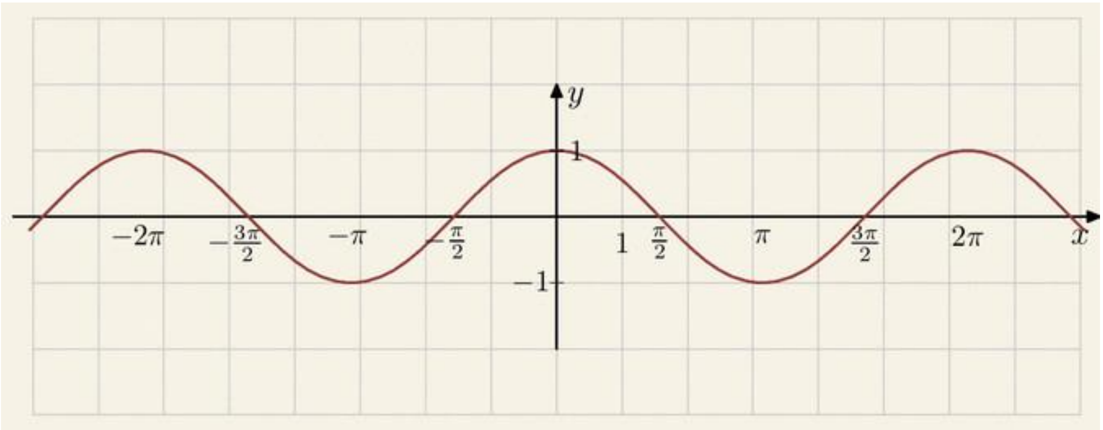
$b)\ f(x) = |tgx|$



$c)\ f(x) = -|sinx|$



Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2cosx - 1|$ i podaj jej okres podstawowy.



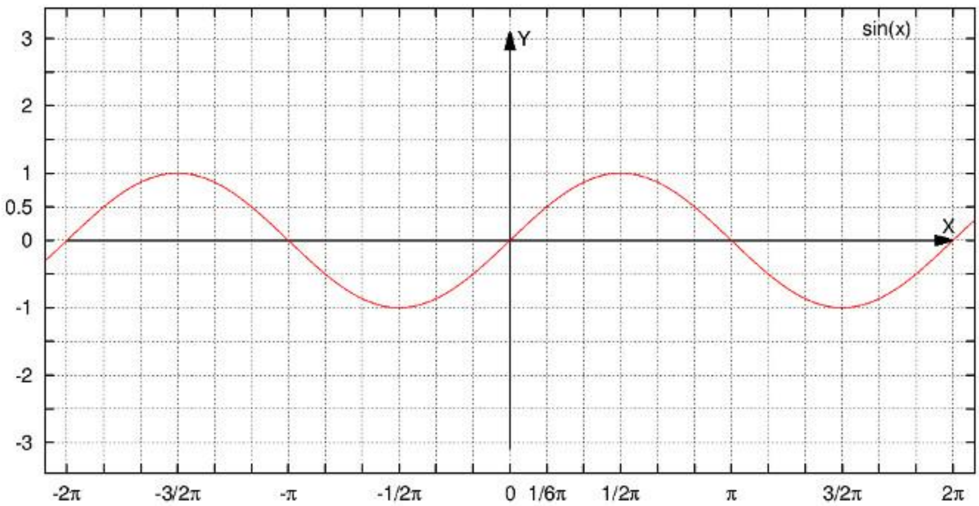
Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji $y = |\sin x| - 1$. Na podstawie wykresu omów własności.

Zadanie 4. Naszkicuj wykresy funkcji f, podaj dziedzinę, miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji $f(x) = -|sinx|$.

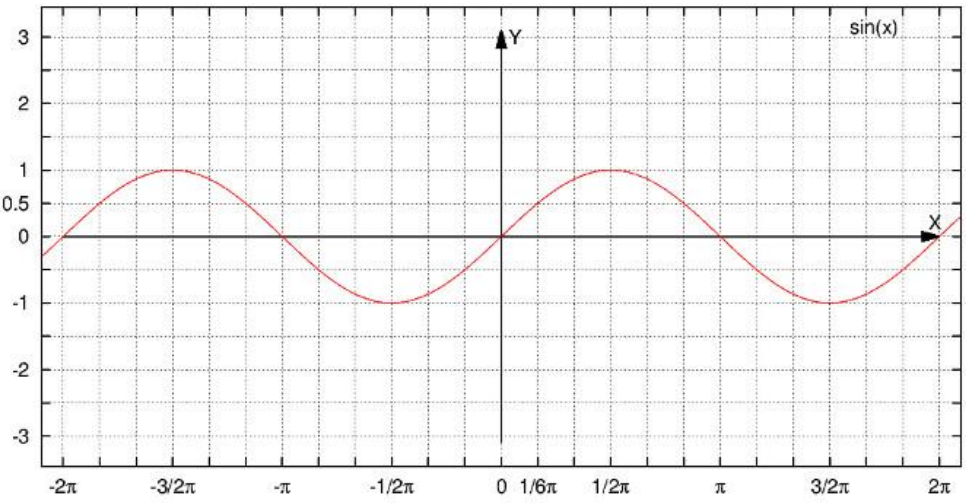
Zadanie 5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = sin|x|$. Czy funkcja ta jest okresowa?

Zadanie 6. Naszkicuj wykres funkcji f .

$a)\ \ f(x) = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$



b) $f(x) = 2|\sin x| - 1$,



Zadanie 7. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: *f*, *g*, *h*. Podaj okresy podstawowe tych funkcji.

a) $f(x) = sin2x$, $g(x) = |sin2x|$, $h(x) = |sin2x| - 1$

b) $f(x) = cos3x$, $g(x) = |cos3x|$, $h(x) = |cos3x| + 1$.

Zadanie 8. Naszkicuj wykres funkcji *f* .

a) $f(x) = 2 - |3\sin x|$, b) $f(x) = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$, c) $f(x) = -3|\cos x|$.

Zadanie 9. Naszkicuj wykres funkcji *f* .

a) $f(x) = sin|x|$,
b) $f(x) = 1 - cos|x|$,
c) $f(x) = |tg2x|$,
d) $f(x) = cos\left|\frac{1}{2}x\right|$,
e) $f(x) = 2sin|2x| - 1$,
f) $f(x) = sin|2x|$,
g) $f(x) = 3cos|2x| + 1$.

Temat: RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

$a)$ $sin3x = 1$,
b) $tg4x = -1$,
c) $cos2x = -1$,
d) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
e) $cos4x = \frac{1}{2}$,
f) $sin^2 3x = 1$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

a) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
b) $3\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$
c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
d) $j)\ 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$,
e) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$,
f) $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$,
g) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
h) $cos^2 2x = 1$.

Zadanie 3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

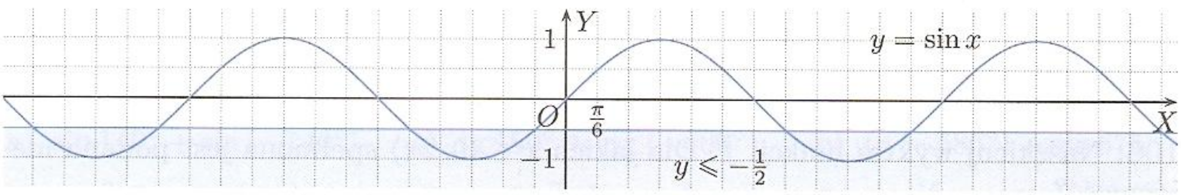
> Rozwiąż równanie $sin^2x = 3sinx$.
>
> $$sin^2x - 3sinx = 0$$
>
> $$sinx(sinx - 3) = 0$$
>
> $$sinx = 0 \text{ lub } sinx = 3$$
>
> Równanie $sinx = 3$ jest sprzeczne. Równanie $sinx = 0$ jest spełnione dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$ **–** jest to rozwiązanie równania wyjściowego.

Rozwiąż równanie.

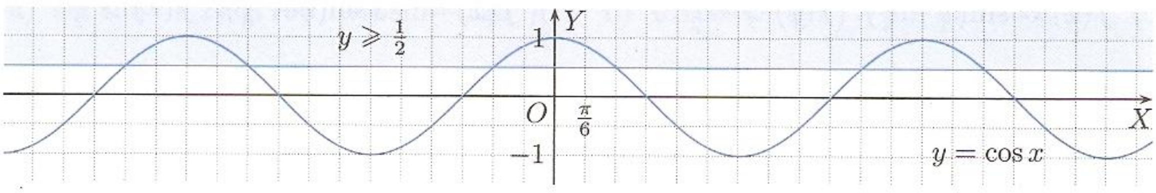
a) $sin^2x = -sinx$, c) $2cos^3x - cosx = 0$ e) $4sin^3x = sinx$

b) $sin^3x + sinx = 0$, d) $2cos^2x = -cosx$ f) $tg^3x = tgx$,

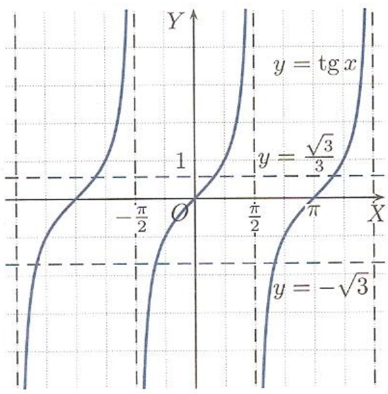
Zadanie 3. a) Odczytaj rozwiązanie nierówności $sinx \leq -\frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -2\pi; 3\pi \rangle$.



b) Odczytaj rozwiązanie nierówności $cosx \geq \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -2\pi; 3\pi \rangle$.



Zadanie 4. Dla $x \in \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ odczytaj rozwiązanie nierówności.



a) $tgx > 0$

b) $tgx > \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $tgx < -\sqrt{3}$.

Zadanie 5. Rozwiąż graficznie nierówność

a) $\sin x > \frac{1}{2}$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, *c)* $\sin x > \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$;

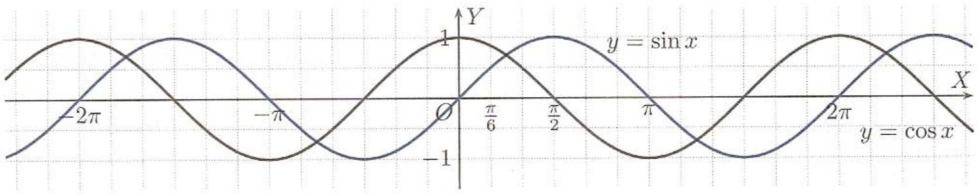
b) $\cos x < 0$, $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$, *d)* $tgx \leq 1$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$; *e)* $\operatorname{tg} x < 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

Zadanie 6. Rozwiąż nierówność:

a) $2sinx \leq 1$, c) $\sqrt{3}ctgx \leq -1$, e) $sin2x < -\frac{1}{2}$,

b) $sin3x \leq \frac{1}{2}$, d) $cosx > -\frac{1}{2}$, f) $2sin\frac{x}{2} < \sqrt{3}$.

Zadanie 7. Korzystając z poniższego rysunku, podaj rozwiązania nierówności $sinx \leq cosx$.



a) dla $x \in (-\pi; \pi)$, b) dla $x \in \mathbf{R}$.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ zamienić miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie
- ✓ zaznaczyć w układzie współrzędnych kąty skierowane
- ✓ podać miarę kąta głównego dla dowolnego kąta
- ✓ korzystać z definicji i wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach
- ✓ wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus i tangens wielokrotności kąta $\frac{\pi}{2}$, wartości sin(-a), cos(-a), tg(-a) oraz znaki wartości funkcji sinus, cosinus i tangens,
- ✓ wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta poprzez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego,
- ✓ korzystać z okresowości funkcji trygonometrycznych
- ✓ znając wartość jednej z funkcji sinus lub cosinus, wyznaczać wartości pozostałych funkcji tego samego kąta
- ✓ stosować wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów,
- ✓ stosować wzory na sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów,
- ✓ sporządzić wykresy funkcji sinus, cosinus i tangens w zadanym przedziale,

- ✓ naszkicować wykresy funkcji trygonometrycznych: $y = \sin(x + \mathrm{p})$, $y = \cos(x + \mathrm{p})$, $y = tg(x + \mathrm{p})$, $y = sin\,x + \mathrm{q}$, $\mathrm{y} = \cos x + \mathrm{q}$, $\mathrm{y} = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{q}$, $y = -sin\,x$, $\mathrm{y} = -\cos x$, $\mathrm{y} = -\mathrm{tg}\,x$, $y = \sin(-x)$, $y = \cos(-x)$, $y = tg(-x)$, oraz $y = |sin\,x|$, $y = |cos\,x|$, $y = |tg\,x|$, $y = c \cdot sin\,x$, $\mathrm{y} = \mathrm{c} \cdot \cos x$, $\mathrm{y} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{tg}\,x$, $y = \sin(c \cdot x)$, $y = \cos(c \cdot x)$, $y = tg(c \cdot x)$,
- ✓ posługiwać się wykresami funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania nierówności typu: $sin\,x > a$, $cos\,x \le \mathrm{a}$, $tg\,x > a$

Zadanie 1. Uzupełnij tabelę.

Miara łukowa		$\frac{2}{3}\pi$		$\frac{5}{12}\pi$		7π
Miara kątowa	300°		120°		9°	

Zadanie 2. Zaznacz w układzie współrzędnych (każdy w osobnym) kąty skierowane

a) 405° b) -150°.

Zadanie 3. Określ miarę kąta głównego dla

a) $\alpha = 900^\circ$ b) $\alpha = -100^\circ$.

Zadanie 4. Określ z tablic korzystając z własności funkcji trygonometrycznych wartość:

a) $\sin 223^\circ$ d) $\sin(-192^\circ)$ g) $\sin 1125^\circ$

b) $\cos(-105^\circ)$ e) $\cos 840^\circ$ h) $\cos(-302^\circ)$

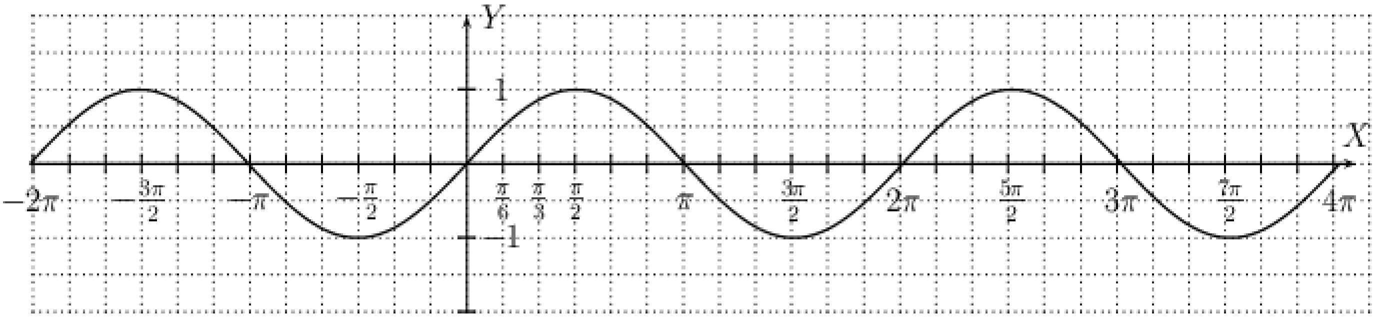
c) $tg(-325)^\circ$ f) $tg(-155^\circ)$ i) $tg\,445^\circ$

Zadanie 5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych jeśli

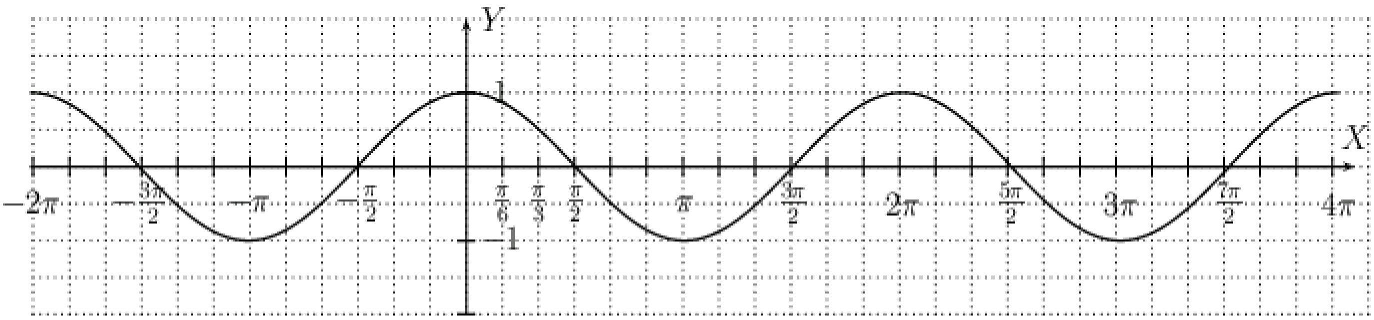
a) $\sin\alpha = \frac{7}{100}$ α należy do II ćwiartki

b) $\cos\alpha = \frac{2}{9}$ α należy do IV ćwiartki

Zadanie 6. Określ przebieg funkcji $y = |\sin x - 1|$



Zadanie 7. Określ przebieg funkcji $y = \frac{3}{2}\cos(x - \frac{\pi}{3})$



Zadanie 8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią osi x, a na drugim ramieniu leży punkt P.

a)P = (-2,4), b) P = (8,-3), c) P = (-7,-2),

Zadanie 9. Sprawdź tożsamość: $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2$.

Zadanie 10. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$ .Podaj dziedzinę, miejsca zerowe oraz zbiór wartości tej funkcji.

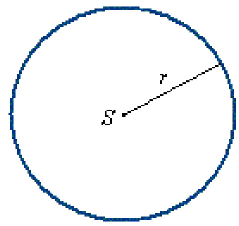
Zadanie 11. Określ z tablic wartość funkcji trygonometrycznych

$a)\ \sin 150^\circ$ $b)\ tg120^\circ$ $c)\ \frac{\cos 150^\circ + \sin 120^\circ}{6tg120^\circ}$ $d)\ 6tg135^\circ - \sin 135^\circ$.

Zadanie 12. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych oblicz przybliżoną wartość wyrażenia. Wynik podaj z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.

$a)\ \sin 125^\circ + \sin 105^\circ$ $b)\ \cos 153^\circ + \cos 163^\circ$ c) $tg145^\circ - tg154^\circ$.

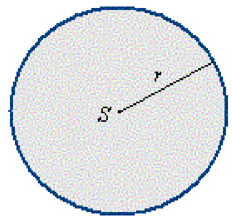
2. OKRĄG I KOŁO



Okręgiem nazywamy krzywą, której wszystkie punkty leżą w tej samej odległości od danego punktu zwanego środkiem okręgu.

r - promień okręgu

S - środek okręgu



Koło to część płaszczyzny ograniczona okręgiem wraz z tym okręgiem.

r - promień koła

S - środek koła

Def. *Okręgiem* *o środku S i promieniu r (r>0) nazywamy zbiór punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r.*

Promień r okręgu jest długością odcinka, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim końcem dowolny punkt leżący na tym okręgu.

Cięciwą okręgu nazywamy odcinek, którego końcami są dwa różne punkty okręgu.

Średnicą okręgu nazywamy cięciwę, która przechodzi przez środek okręgu.

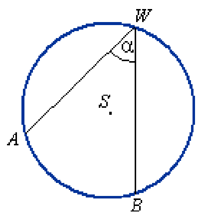
Pole koła (*P*) i długość okręgu (*L*):

$P = \pi r^2$

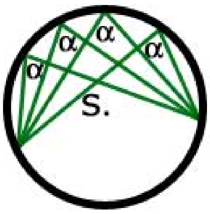
$L = 2\pi r$

gdzie π (pi) to stosunek długości okręgu do długości jego średnicy, który jest wielkością stałą i wynosi w przybliżeniu 3,1415..., a *r* to długość promienia koła.

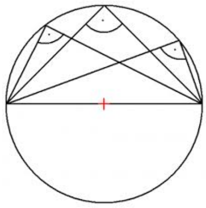
Temat: KĄT ŚRODKOWY I POLE WYCINKA KOŁA



Kąt wpisany - to taki kąt wypukły, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy tego koła.

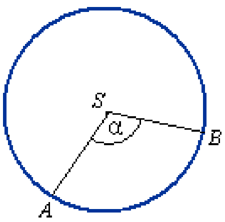


Twierdzenie. Miary kątów wpisanych w koło, opartych na tych samych łukach są równe.



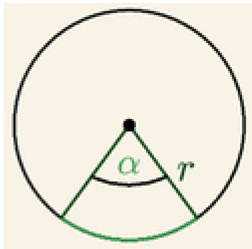
Twierdzenie. Kąt wpisany oparty na półokręgu, jest kątem prostym.

Kąt środkowy - to kąt, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramiona są półprostymi zawierającymi promienie koła.



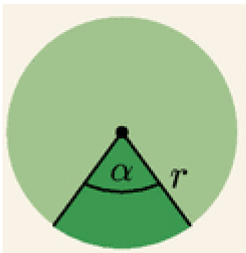
Długość łuku

$$l = \frac{\alpha}{360^o} \cdot 2\pi r$$



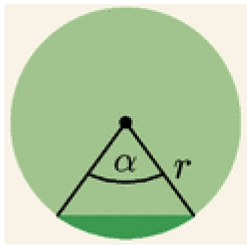
Pole wycinka koła

$$P = \frac{\alpha}{360^o} \cdot \pi r^2$$



Odcinek koła

Pole odcinka koła = pole wycinka koła – pole trójkąta



Zadanie 1. Oblicz jaką częścią okręgu jest łuk oparty o kąt środkowy o mierze

a) 60^o, c) 30^o, e) 270^o,

b) 20^o, d) 90^o, f) 240^o.

Zadanie 2. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na łuku, którego długość jest równa

a) $\frac{1}{12}$ długości okręgu, b) $\frac{5}{6}$ długości okręgu, c) $\frac{3}{5}$ długości okręgu.

Zadanie 3. Oblicz długość łuku opartego na kącie środkowym o mierze

a) 60^o jeśli promień $r = 12$,

b) 45^o jeśli promień $r = 10$,

c) 100^o jeśli promień $r = 4$.

Zadanie 4. Oblicz pole wycinka koła o promieniu 6 i kącie środkowym o mierze

a) 40^o, b) 135^o, c) 150^o, d) 225^o, e) 330^o.

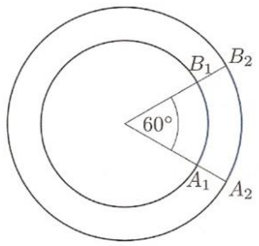
Zadanie 5. Oblicz miarę kąta środkowego jeśli wiadomo, że

a) promień koła ma długość 10, a pole wycinka wynosi 25π,

b) promień koła ma długość 6, a pole wycinka wynosi 27π,

c) promień koła ma długość 8, a pole wycinka wynosi 56π.

Zadanie 6. Na rysunku przedstawiono okręgi o promieniach $r_1 = 2{,}5$ i $r_2 = 3{,}5$.



a) Oblicz długości tych okręgów.

b) Oblicz długości łuków $\widehat{A_1B_1}$ i $\widehat{A_2B_2}$.

Zadanie 7. Uzupełnij tabelę

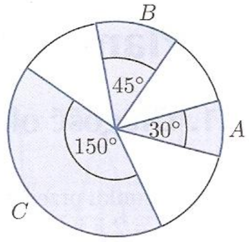
a)

	Okrąg O_1	Okrąg O_2	Okrąg O_3
Promień	3,6 cm		
Długość okręgu			9,6 cm
Długość łuku wyznaczonego przez kąt 30°		7π cm	

b)

	Okrąg O_1	Okrąg O_2	Okrąg O_3
Promień	6 dm		9 cm
Kąt α	75°	20°	
Długość łuku wyznaczonego przez kąt α		2π cm	4π cm

Zadanie 8. Dane jest koło o promieniu 12. Oblicz pola zaznaczonych wycinków tego koła.

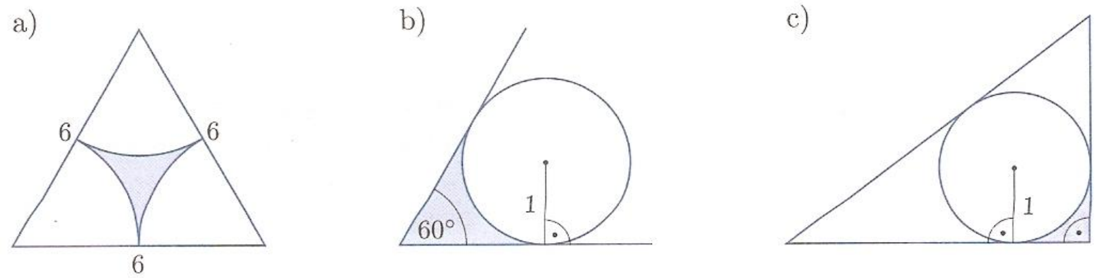


P_A = ……………………………………………………..

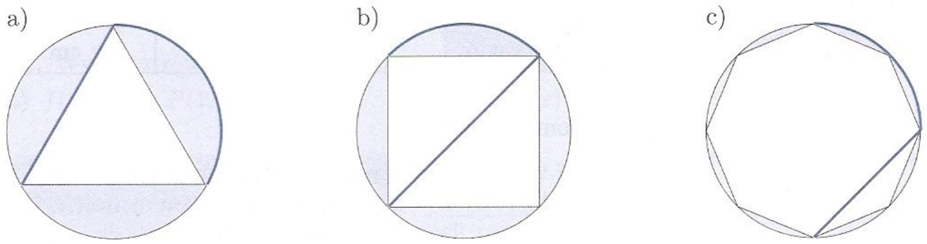
P_B = ……………………………………………………...

P_C = ………………………………………………………

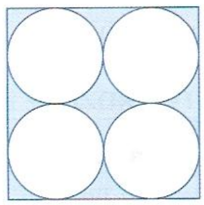
Zadanie 9. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



Zadanie 10. Dany jest wielokąt foremny wpisany w koło o promieniu 2. Oblicz długość zaznaczonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.



Zadanie 11. Bok kwadratu ma długosc 6 (rysunek obok). Wykaż, ze pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9.

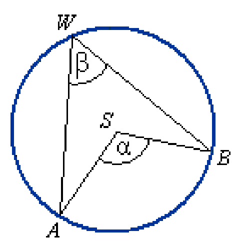


Zadanie 12. Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miarę kąta wpisanego opartego na łuku tego okręgu, jeśli łuk ten ma długość:

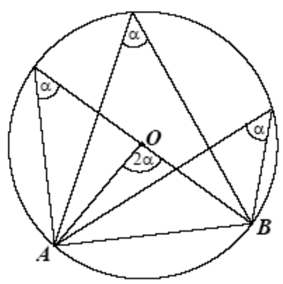
a) 2π, b) 3π, c) $\frac{15}{2}\pi$, d) $\frac{\pi}{4}$.

Temat: KĄT WPISANY I JEGO ZWIĄZEK Z KĄTEM ŚRODKOWYM

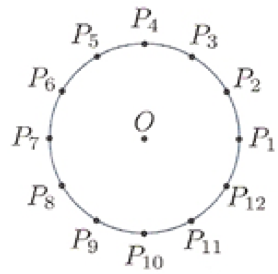
Kąt środkowy i kąt wpisany oparty na tym samym łuku



Twierdzenie. Miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku co kąt środkowy.



Zadanie 1. Punkty: $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku.

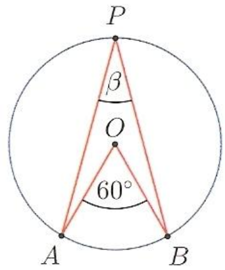


a) $\overset{\frown}{P_1P_2P_3}$, b) $\overset{\frown}{P_4P_7P_{12}}$, c) $\overset{\frown}{P_6P_1P_7}$.

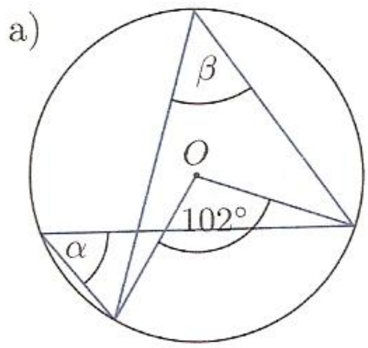
Zadanie 2.

a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).

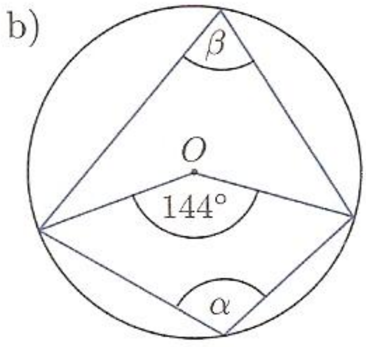
b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy α = 120° i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α. Podaj miarę tych kątów.



Zadanie 3. Wyznacz miary kątów α i β.

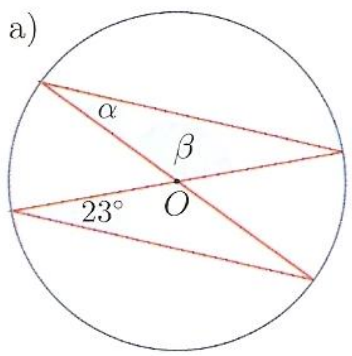


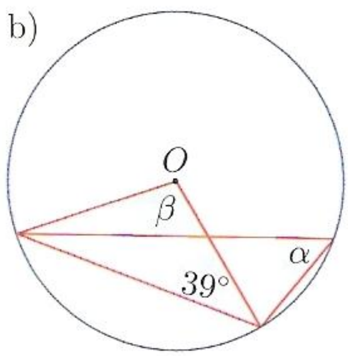
$\alpha =$ ...., $\beta =$ ....

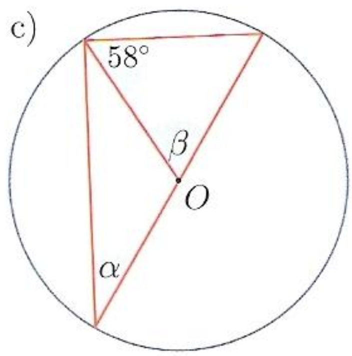


$\alpha =$ ...., $\beta =$ ....

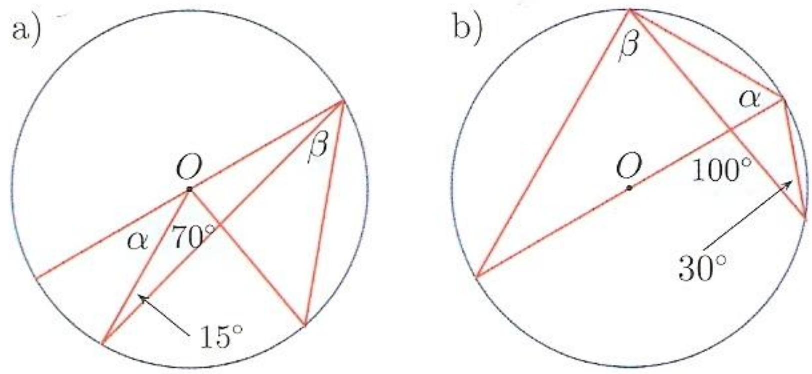
Zadanie 4. Wyznacz miary kątów α i β.



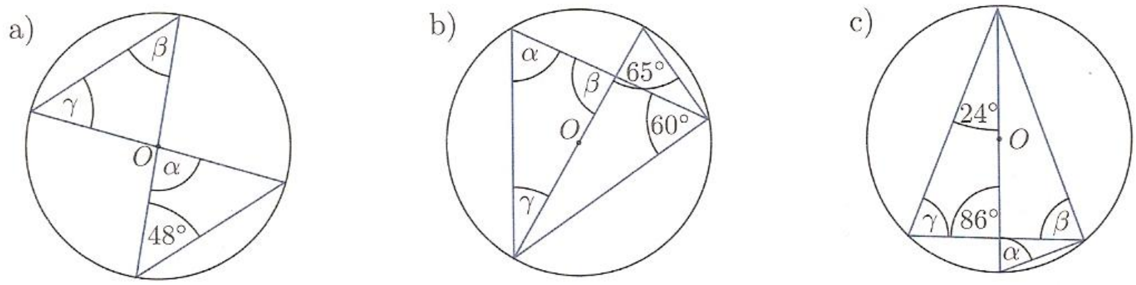




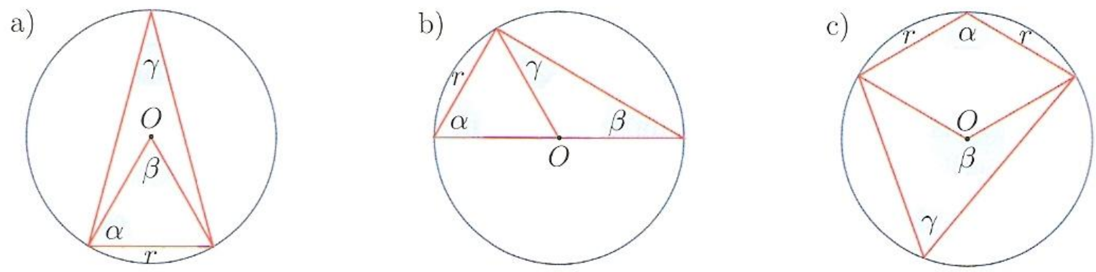
Zadanie 5. Wyznacz miary kątów α i β.



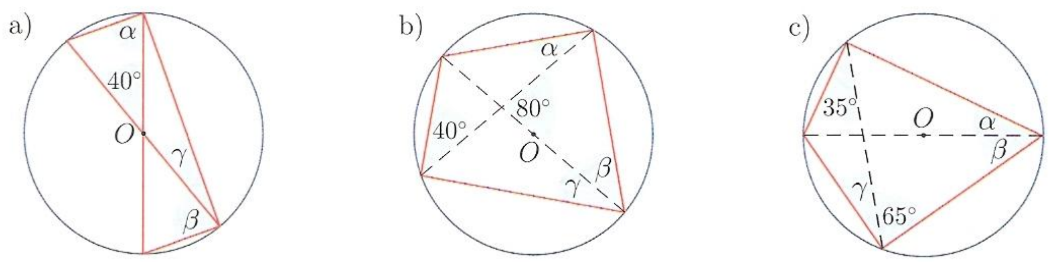
Zadanie 6. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.



Zadanie 7. Promień okręgu jest równy *r*. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

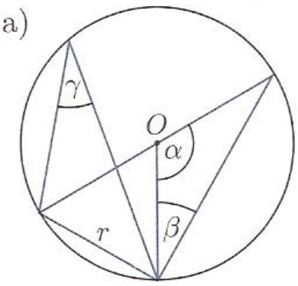


Zadanie 8. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.



Zadanie 9. Promień okręgu jest równy *r*. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

a)

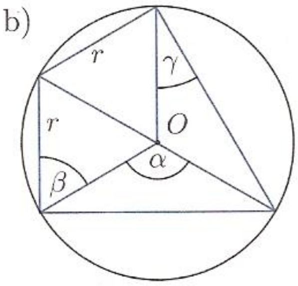


$\alpha =$ ....

$\beta =$ ....

$\gamma =$ ....

b)



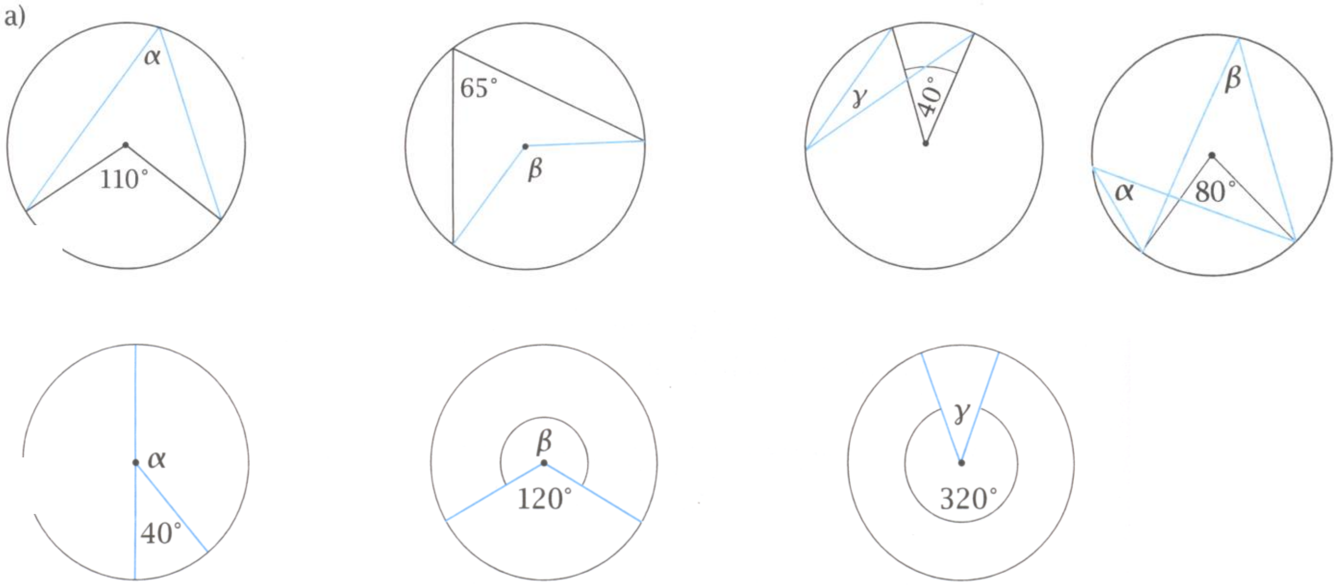
$\alpha =$ ....

$\beta =$ ....

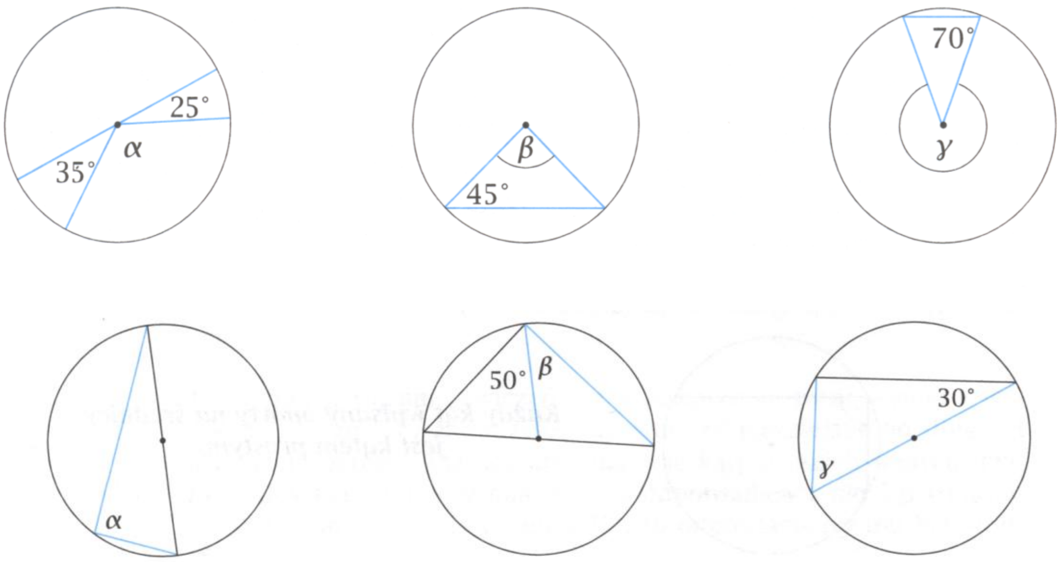
$\gamma =$ ....

Zadanie 10. Oblicz miary kątów: α , β , γ .

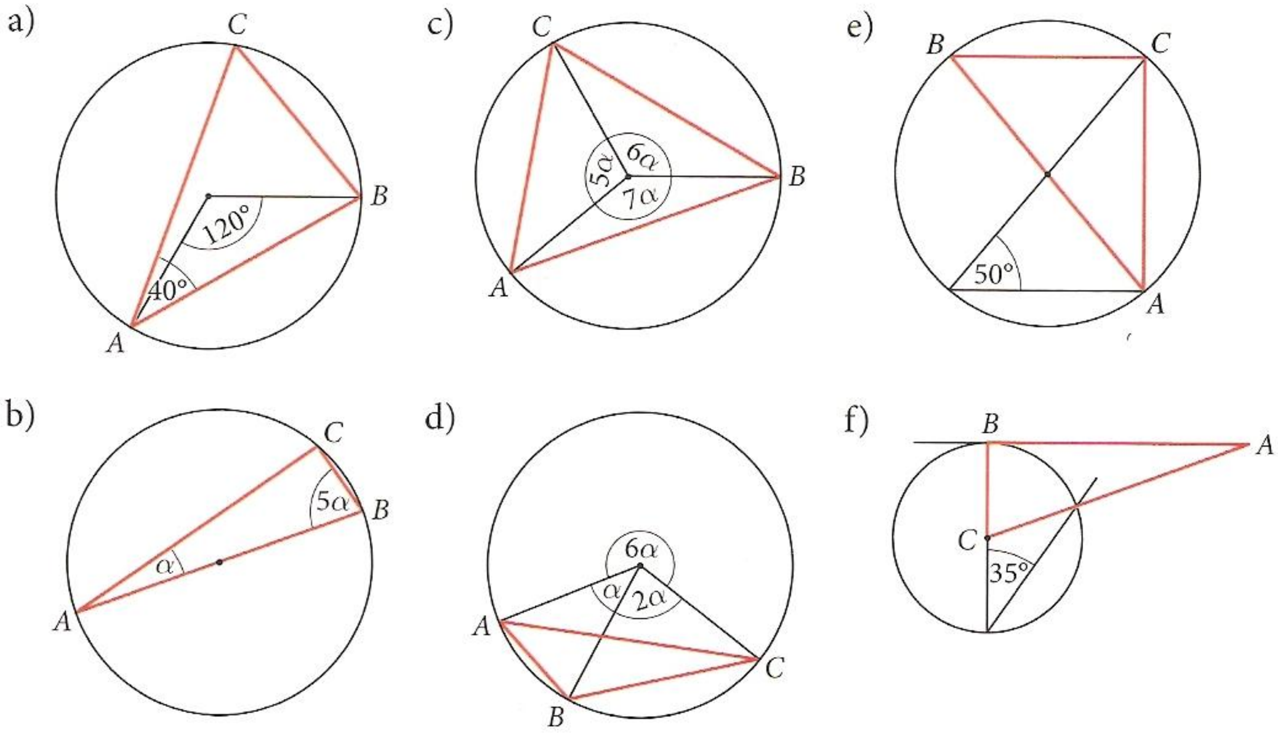
a)



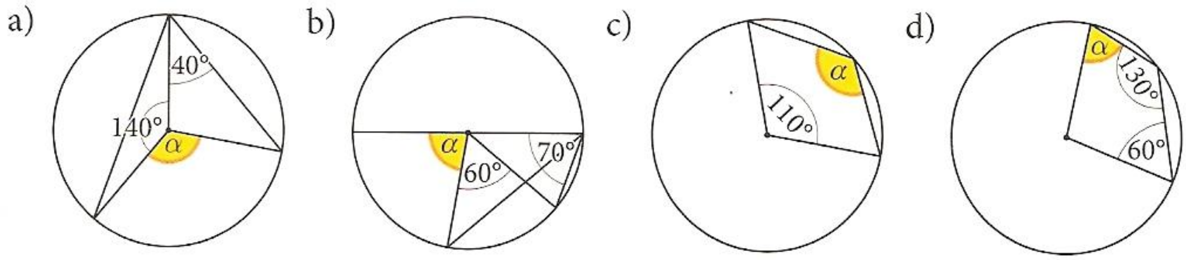
b)



Zadanie 11. Wyznacz kąty trójkąta *ABC*.



Zadanie 12. Wyznacz miarę kąta α.



Zadanie 13. Kąt wpisany jest o 50° mniejszy od kąta środkowego wyznaczonego przez ten sam łuk. Oblicz miary obu kątów.

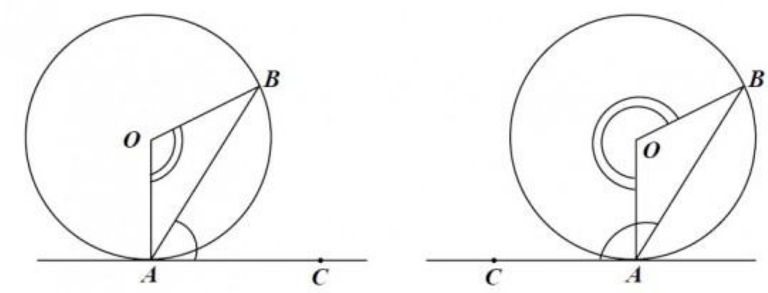
Zadanie 14. Suma kata wpisanego i dwukrotności kąta środkowego opartych na tym samym łuku wynosi 250° . Oblicz miary obu kątów.

Zadanie 15. Różnica trzykrotności kąta środkowego i dwukrotności wpisanego opartych na tym samym łuku wynosi 84°. Oblicz miary obu kątów.

Temat: STYCZNA DO OKRĘGU W ZADANIACH

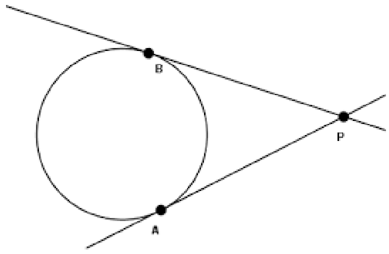
Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A. Wtedy $|\angle AOB| = 2 \cdot |\angle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.



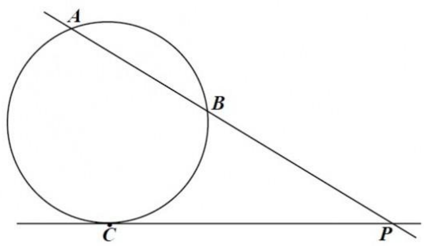
Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to $|PA| = |PB|$.



Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

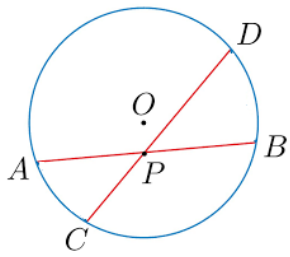
Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to:



$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2.$$

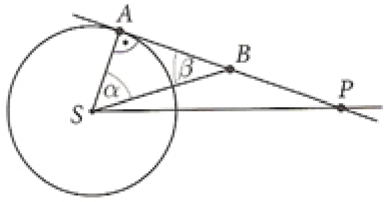
Twierdzenie o cięciwach

Jeżeli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P to: $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

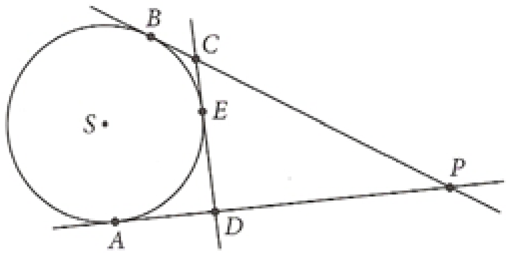


Zadanie 1. W okręgu o środku *S* kąt między promieniami *SA* i *SB* jest równy 140°. Wyznacz kąt między stycznymi do okręgu poprowadzonymi w punktach *A* i *B*.

Zadanie 2. Z punktu *P* poprowadzono styczną do okręgu w punkcie *A* (rysunek obok). Punkt *S* jest środkiem okręgu. Odcinek *SB* jest środkową w trójkącie *SPA*. Oblicz długość odcinka *SP*, wiedząc, ze promień okręgu jest równy 4 oraz α = β.

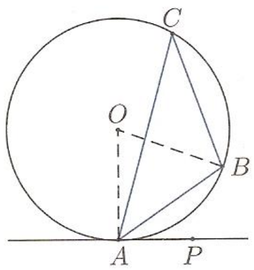


Zadanie 3. Wypisz pary odcinków równych, wiedząc, że punkty *A*, *B*, *E* są punktami styczności odpowiednich prostych do okręgu o środku *S* (rysunek obok).

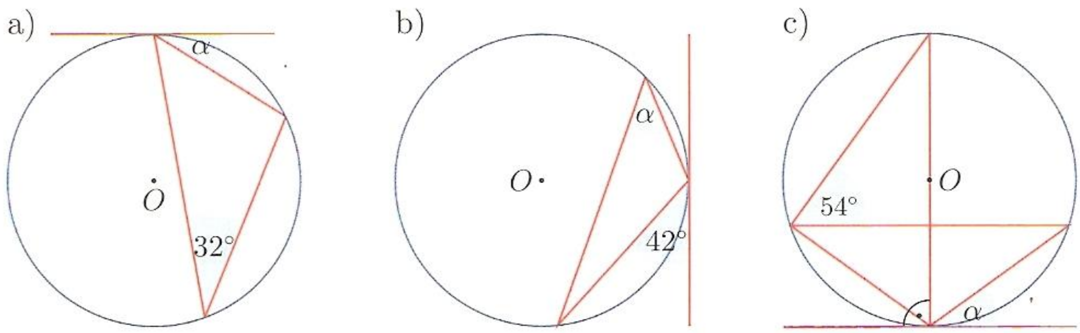


Zadanie 4. Kąt *PAB* ma miarę 36° (rysunek obok). Podaj miary kątów *ACB* i *AOB*.

$\sphericalangle ACB =$ .... $\sphericalangle AOB =$ ....



Zadanie 5. Wyznacz miarę kąta α.

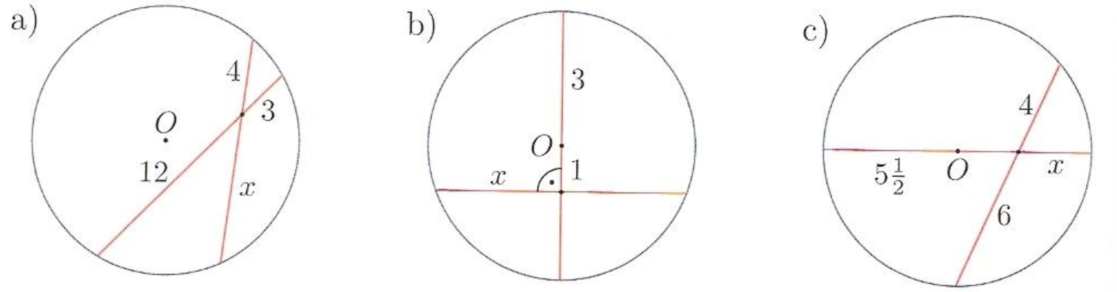


Zadanie 6.

a) W okręgu o środku *O* poprowadzono cięciwę *AB*. Jeden z kątów trójkąta *AOB* ma miarę 96°. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą *AB* a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie *A*.

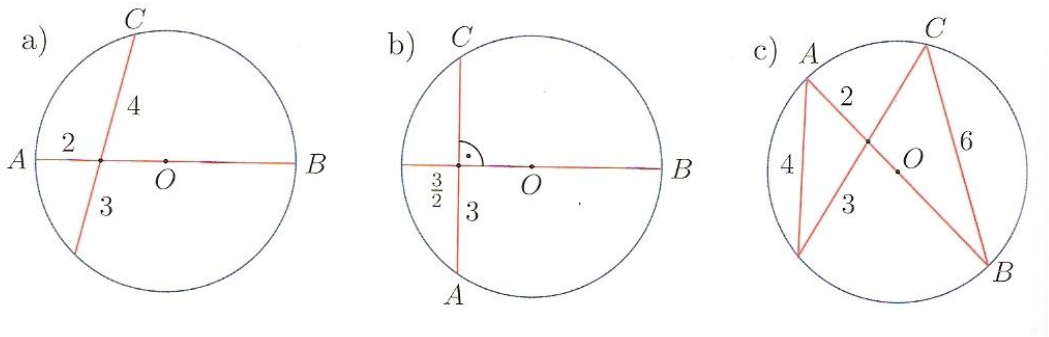
b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę *AB*. Długość łuku $\widehat{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą *AB* a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie *B*.

Zadanie 7. Oblicz x.



Zadanie 8. Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt *P*, odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt *P* dzieli cięciwę.

Zadanie 9. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta *ABC*.

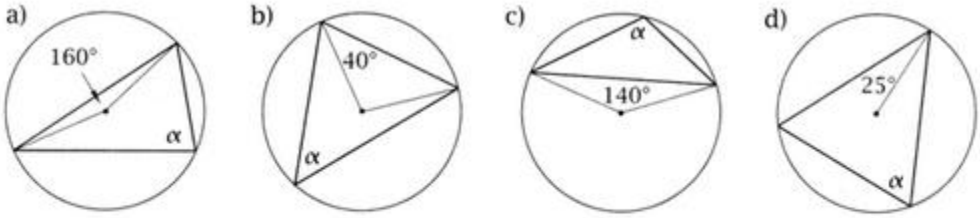


Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – OKRĄG I KOŁO

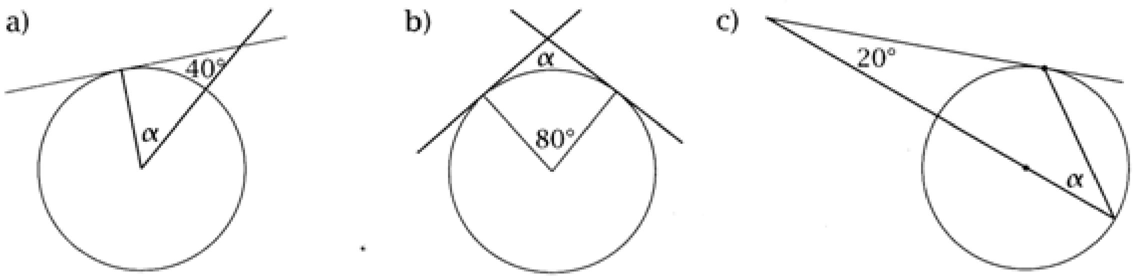
Sprawdz czy już umiesz:

- ✓ rozpoznawać kąty środkowe,
- ✓ obliczać długość okręgu i łuku okręgu,
- ✓ obliczać pole koła, wycinka kołowego,
- ✓ stosować zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym,
- ✓ rozpoznawać styczną do okręgu,
- ✓ korzystać z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności,
- ✓ korzystać z własności stycznej do okręgu,
- ✓ korzystać z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą.
- ✓ korzystać z twierdzenia o odcinkach stycznych,
- ✓ korzystać z twierdzenia o odcinkach siecznej i stycznej
- ✓ korzystać z twierdzenia o cięciwach,

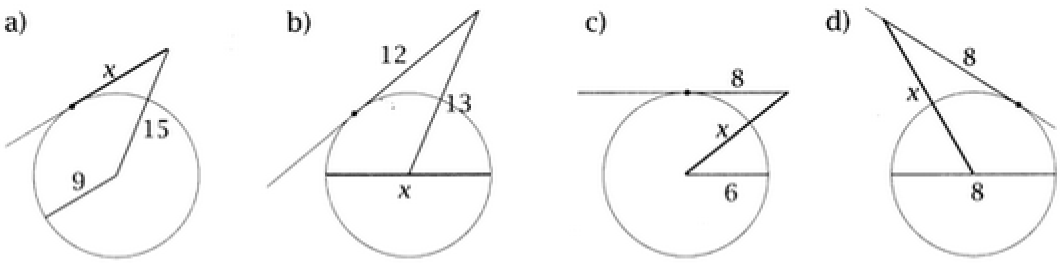
Zadanie 1. Oblicz miarę kąta α.



Zadanie 2. Narysowane proste są styczne do okręgów. Oblicz miarę kąta α.



Zadanie 3. Narysowane proste są styczne do okręgów. Oblicz długość odcinka x.



Zadanie 4. Oblicz miarę kąta wpisanego i miarę kąta środkowego opartych na tym samym łuku, jeżeli suma miar ich kątów jest równa 255^0.

Zadanie 5. Wyznacz miarę kąta wpisanego opartego na łuku stanowiącym 20% okręgu.

Zadanie 6. Oblicz pole wycinka i długość łuku koła o promieniu 8cm wyznaczonego przez kąt α, jeśli:

a)) $\alpha = 40^{\circ}$, b)$\alpha = 120^{\circ}$

WIELOKĄTY

Wielokątem (n - kątem) nazywamy płaską figurę geometryczną ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą o n bokach, wraz z tą łamaną, gdzie $n \in N \;\; i \, n \geq 3$.

Odcinki łączące wierzchołki wielokąta i nie będące jego bokami nazywamy **przekątnymi wielokąta**.

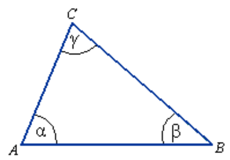
1. Liczba przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka n – kąta jest równa (n – 3)
2. Liczba przekątnych w n – kącie jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$, gdzie $n \in N \;\; i \, n > 3$.
3. Suma miar kątów wewnętrznych w n – kącie jest równa $(n-2) \cdot 180^{\circ}$ dla $n \in N \;\; i \, n \geq 3$.
4. Liczba wierzchołków n – kąta jest równa n.

Wielokąt, którego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty wewnętrzne przystające, nazywamy **wielokątem foremnym.** Kąt wewnętrzny n – kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}$.

TRÓJKĄTY

Wielokąt o najmniejszej liczbie boków to trójkąt.

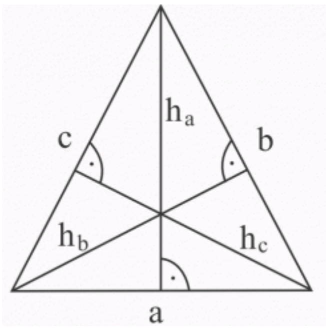
Trójkąt to płaszczyzna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą złożoną z trzech odcinków.

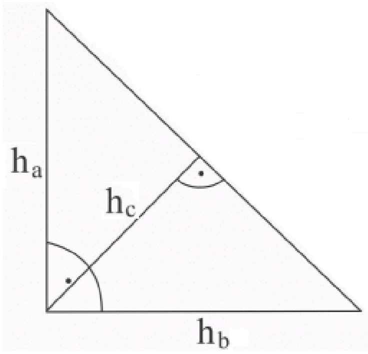


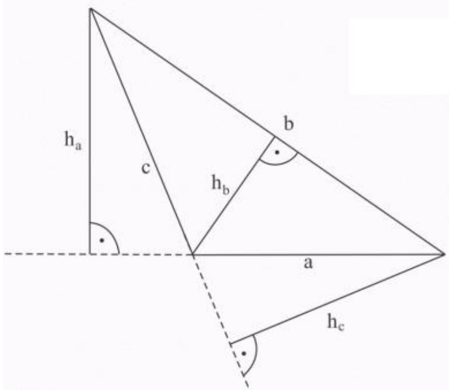
punkty *A*, *B*, *C* to wierzchołki trójkąta,
odcinki *AB*, *BC*, *CA* to boki trójkąta,
kąty α, β, γ to kąty wewnętrzne trójkąta.

Często jeden z boków nazywamy jego **podstawą**, a dwa pozostałe **ramionami** trójkąta.

Wysokością trójkąta nazywamy najkrótszy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem). Jest on zawsze prostopadły do tego boku.







Każdy trójkąt ma trzy wysokości, które przecinają się w jednym punkcie zwanym ***ortocentrum.***

Kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego. Miara kąta zewnętrznego trójkąta jest równa sumie miar dwóch kątów wewnętrznych do niego nie przyległych.

Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości pozostałych boków. Każdy trójkąt ma trzy dwusieczne przecinające się w jednym punkcie, który jest środkiem koła wpisanego w trójkąt.

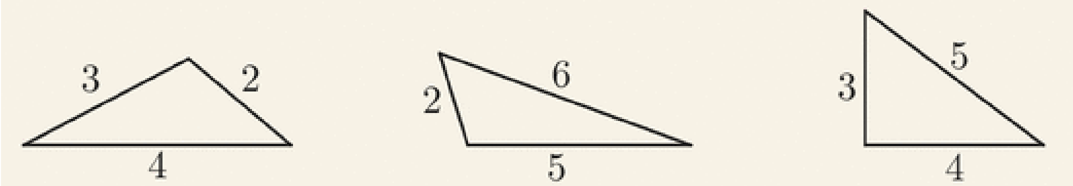
Symetralną boku trójkąta nazywamy prostą prostopadłą do tego boku i przechodzącą przez jego środek. Każdy trójkąt ma trzy symetralne boków, przecinające się w jednym punkcie, który jest środkiem koła opisanego na tym trójkącie.

Środkowe trójkąta przecinają się w punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych na dwie części, z których odcinek łączący wierzchołek z punktem jest dwa razy dłuższy od pozostałej części tej środkowej.

Temat: TRÓJKĄTY

Nierówność trójkąta – dowolny bok trójkąta ma mniejszą długość od sumy długości pozostałych boków.

Przykłady:



$3 < 4+2$	$6 < 2+5$	$5 < 3+4$
$4 < 3+2$	$5 < 2+6$	$4 < 3+5$
$2 < 3+4$	$2 < 6+5$	$3 < 5+4$

Zadanie 1. Sprawdź, czy z poniższych odcinków zbudujemy trójkąt.

a) 2, 2, 5, b) 1, 2, 3, c) 2, 2 ,1, d) 1, 2 , $\frac{1}{2}$

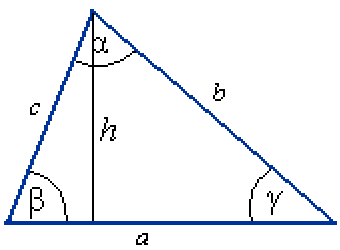
Zadanie 2. Sprawdź czy podane długości mogą być długościami boków trójkąta:

a) $\sqrt{27}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{75}$ c) 4; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$

b) 6 mm; 0,1 dm; 12 cm d) 2 dm; 4 cm; 0,07 m.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180°.

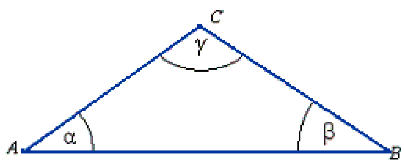
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



Zadanie 3. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC, wiedząc że są w stosunku 1:3:5.

Trójkąt równoramienny

- Trójkąt, którego dwa boki są równej długości nazywamy trójkątem równoramiennym.
  $|AC| = |CB|$



- Boki równe nazywamy **ramionami**, trzeci bok nazywamy **podstawą**.
  W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają tę samą miarę:
  $\alpha = \beta$.
- Trójkąt równoramienny posiada co najmniej jedną oś symetrii przecinającą podstawę w połowie długości oraz przechodzącą przez wierzchołek kąta łączącego ramiona.
- W trójkącie równoramiennym dwie wysokości są równe. Trzecia wysokość opuszczona na podstawę dzieli ją na dwie równe części, a półprosta, w której leży ta wysokość, dzieli kąt między ramionami trójkąta na dwa kąty o równych miarach.

Zadanie 4. Oblicz miary kątów trójkąta równoramiennego, w którym kąt przy podstawie ma miarę cztery razy większą od kąta między ramionami.

Zadanie 5. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 30° mniejszą od miary kąta między ramionami. Oblicz miarę kąta między ramionami.

Zadanie 6. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę o 15° mniejszą od miary kąta między ramionami. Oblicz miary kątów w tym trójkącie.

Zadanie 7. Obwód trójkąta równoramiennego wynosi $L = 162$. Długość podstawy jest o 24% większa od długości ramienia. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 8. W trójkącie równoramiennym ABC podstawą jest bok AB. Wysokość opuszczona z wierzchołka C przecina dwusieczną kąta BAC w punkcie S. Kąt ACB ma miarę 28°. Oblicz miarę kąta ASC.

Zadanie 9. W trójkącie równoramiennym stosunek długości wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta do długości jego ramienia jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uzasadnij, że jest to trójkąt równoboczny.

Trójkąt prostokątny

- Trójkąt prostokątny - trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest prosty.
- Dwa boki trójkąta wyznaczające ramiona kąta prostego nazywane są ***przyprostokątnymi***, trzeci bok ***przeciwprostokątną***.

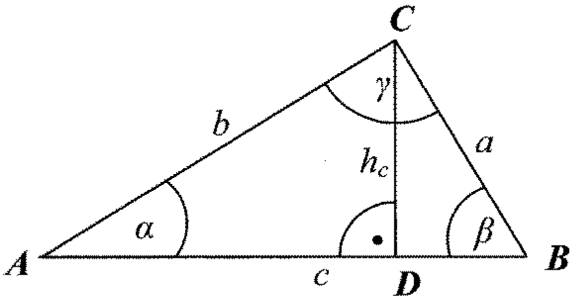
Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c, to $a^2 + b^2 = c^2$.

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie o bokach a, b, c prawdziwa jest zależność $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt ten jest prostokątny o przyprostokątnych a i b.

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$

$$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha = b \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$$

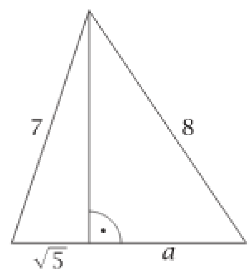
$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{a \cdot b}}{\boldsymbol{2}} \quad \text{lub } \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{c \cdot h_c}}{\boldsymbol{2}}$$

Zadanie 10. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest o 35° mniejszy od drugiego. Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 11. W trójkącie ABC boki mają długości 16, 30 i 34, a w trójkącie DEF boki mają długości 7, 24 i 26. Który z trójkątów jest prostokątny?

Zadanie 12. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o krótszej przyprostokątnej długości 12cm i przeciwprostokątnej długości 13cm.

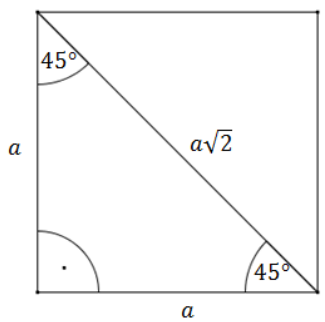
Zadanie 13. Korzystając z danych na rysunku obok oblicz pole trójkąta.



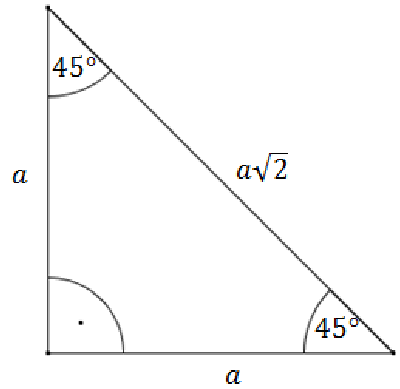
Trójkąt prostokątny 45° 45° 90°

Trójkąt prostokątny z kątem ostrym 45° możemy uzyskać w kwadracie po narysowaniu przekątnej.

Przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$.

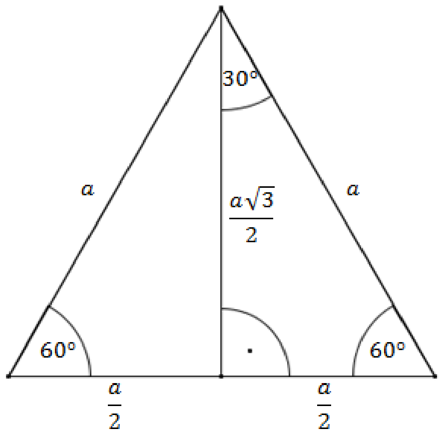


Przedstawmy na osobnym rysunku sam trójkąt prostokątny.

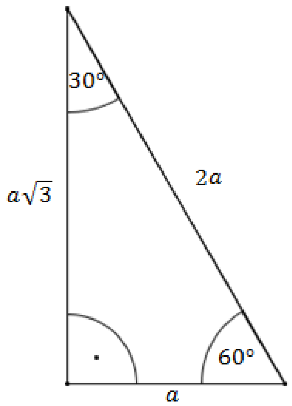


Trójkąt prostokątny 30° 60° 90°

Kąty 30° i 60° mamy w trójkącie prostokątny, który jest połówką trójkąta równobocznego.

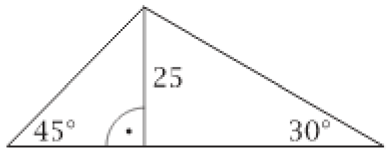


Gdy każdy z boków podwoimy wówczas otrzymamy trójkąt prostokątny:

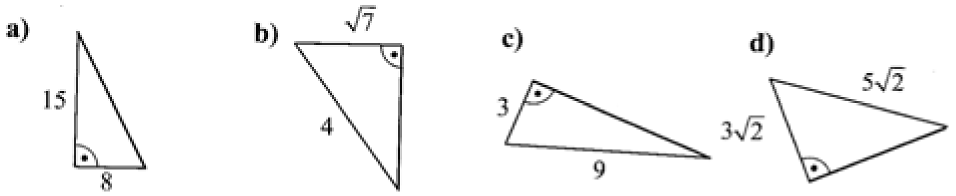


Zadanie 14. Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o kącie ostrym 30° i krótszej przyprostokątnej 10.

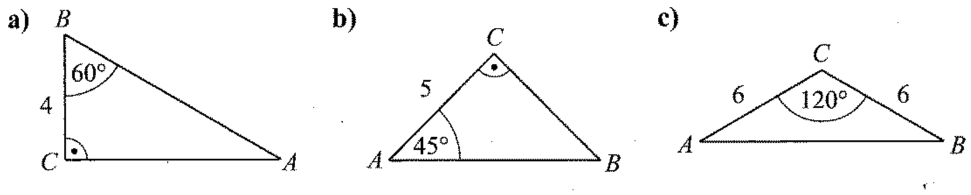
Zadanie 15. Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku obok.



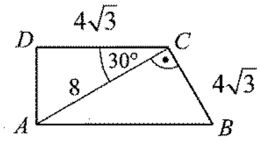
Zadanie 16. Oblicz obwód i pole trójkąta przedstawionego na rysunku poniżej.



Zadanie 17. Oblicz obwód poniższych trójkątów.



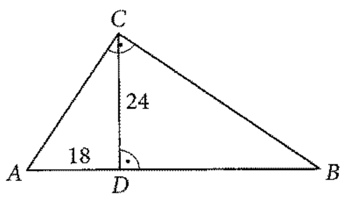
Zadanie 18. Korzystając z danych na rysunku obok oblicz pole trapezu.



Zadanie 19. Oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 3 i 4.

Zadanie 20. Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Zadanie 21. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości CD, opuszczonej z wierzchołka kąta prostego. Korzystając z informacji podanych na rysunku, wyznacz długość odcinka DB.

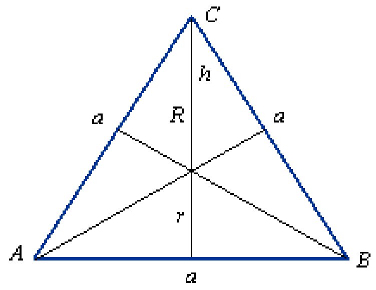


Zadanie 22. W trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 6. Wysokość ta podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki, których długości różnią się o 5. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 23. W trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość $2\sqrt{3}$. Wysokość ta podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki, których długości różnią się o 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

Trójkąt równoboczny

Trójkąt, który ma wszystkie boki równej długości nazywamy trójkątem równobocznym.



Trójkąt równoboczny to szczególny trójkąt, który posiada takie oto własności:

- wszystkie kąty są równe i mają miarę 60°,
- wysokość trójkąta równobocznego h = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$,
- wysokość trójkąta równobocznego dzieli go na dwa przystające trójkąty prostokątne,
- wysokości trójkąta i dwusieczne jego kątów zawierają się w symetralnych boków tego trójkąta,
- wysokości trójkąta równobocznego dzielą się w stosunku 1:2,
- punkt przecięcia wysokości jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt oraz środkiem okręgu opisanego na trójkącie,
- promień okręgu wpisanego w trójkąt r=$\frac{1}{3}$h ,
- promień okręgu opisanego na trójkącie R=$\frac{2}{3}$h,
- pole trójkąta P=$\frac{1}{2}ah$ lub P=. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Zadanie 24. Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm.

Zadanie 25. Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie równym 27cm.

Zadanie 26. Oblicz pole trójkąta równobocznego o wysokości $h = 16\sqrt{3}$.

Zadanie 27. Oblicz pole trójkąta równobocznego o wysokości równej 9cm.

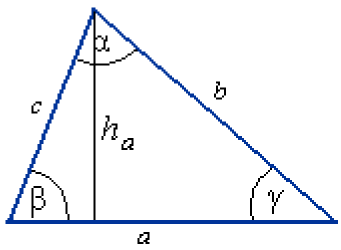
Zadanie 28. Pole trójkąta równobocznego jest równe $9\sqrt{3}$. Oblicz jego obwód.

Zadanie 29. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o polu $12\sqrt{3}cm^2$.

Zadanie 30. Bok *a* trójkąta równobocznego jest dłuższy od jego wysokości o 6. Oblicz *a*.

Zadanie 31. Długości boków trójkąta równobocznego powiększono o 20%. O ile procent zwiększyło się pole tego trójkąta?

Wzory na pole trójkąta dowolnego:



P=$\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

P=$\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$

wzór Herona

P = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p = $\frac{a+b+c}{2}$ - połowa obwodu trójkąta.

Zadanie 32. W trójkącie ABC bok BC ma długość 40, wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa 24, a wysokość opuszczona z wierzchołka A jest równa 30. Oblicz długość boku AB.

Zadanie 33. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o ramionach długości 40 i kącie między nimi 30°.

Zadanie 34. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o ramionach długości 8cm i kącie zawartym między ramionami o mierze 60°.

Zadanie 35. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie 37^0,

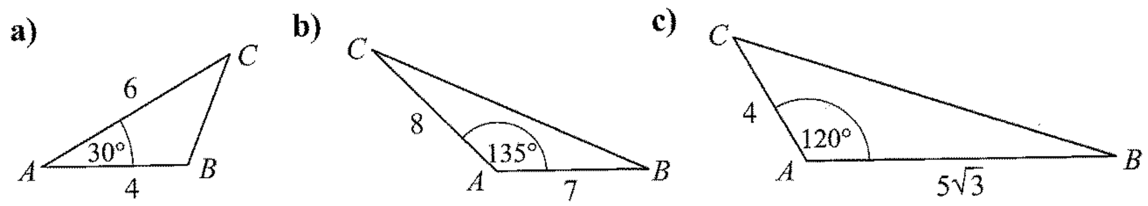
Zadanie 36. Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 8, a kąt między nimi ma miarę 135°. Oblicz pole trójkąta.

Zadanie 37. Oblicz pole trójkąta ABC, w którym $|AB|=14$, $|AC|=10$ i $|\angle BAC|$ = 48°.

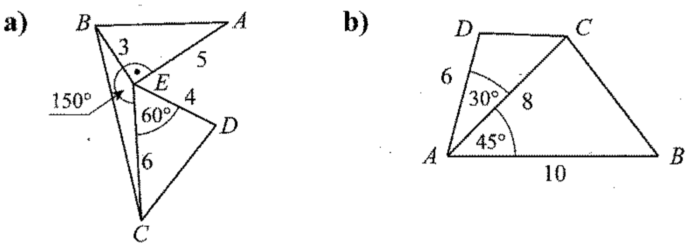
Zadanie 38. Długości dwóch boków trójkąta są odpowiednio równe a i b, a miara kąta między nimi jest równa α. Oblicz pole P tego trójkąta i wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku, gdy:

a) $a=7\sqrt{3}, b=8$ i $\alpha=60^o$, b) $a=5, b=6$ α=42°, c) $a=4, b=10,$ α=128°.

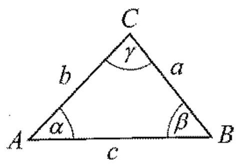
Zadanie 39. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole trójkąta ABC.



Zadanie 40. Oblicz pola wielokątów przedstawionych na rysunkach poniżej.



Zadanie 41. W trójkącie ABC o polu P dane są długości dwóch boków. Oblicz wartość sinusa jednego z kątów tego trójkąta, gdy:



a) $a = 3, c = 4 \ i \ P = 4$ b) $c = 0{,}03, b = 0{,}06 \ i \ P = 0{,}0001$.

Zadanie 42. Boki trójkąta mają długość 5, 7 i 8, a jego pole jest równe $10\sqrt{3}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

Zadanie 43. Oblicz pole trójkąta:

a) o bokach długości 5, 6 i 9, b) o bokach długości 13, 14, 15,

c) o wierzchołkach A, B, C, gdy A = (1, 3), B = (5, 0), C = (-3, 0).

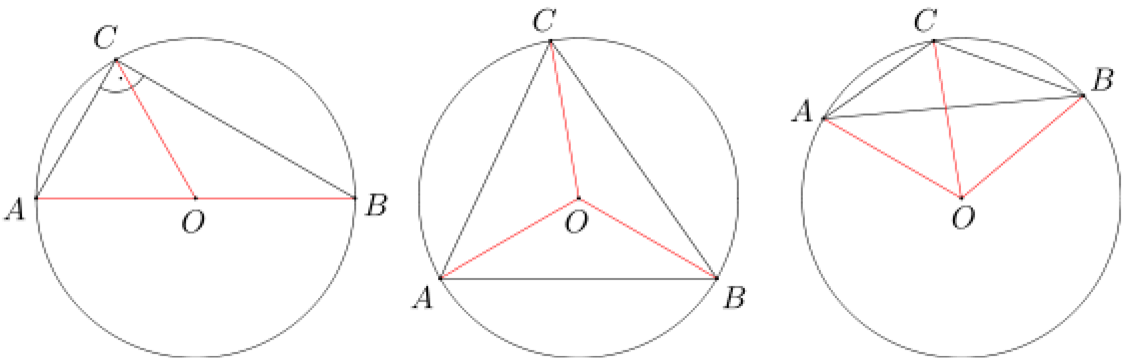
Zadanie 44. Długości boków trójkąta są odpowiednio równe: m, m + 5, m + 7. Oblicz pole P trójkąta, gdy:

a) m=20, b) m=12, c) m=6.

Temat: OKRĄG OPISANY NA TRÓJKĄCIE I OKRĄG WPISANY W TRÓJKĄT

Okrąg nazywamy **opisanym na trójkącie**, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do okręgu. Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

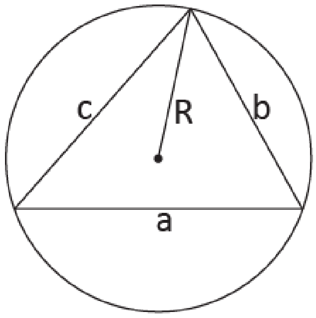
Twierdzenie. Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



W trójkącie prostokątnym środek okręgu opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej.			W trójkącie ostrokątnym środek okręgu opisanego leży wewnątrz trójkąta.			W trójkącie rozwartokątnym środek okręgu opisanego leży na zewnątrz trójkąta.

Wzór na pole trójkąta

$$P = \frac{abc}{4R}$$



i promień okręgu opisanego na trójkącie:

$$R = \frac{abc}{4P}$$

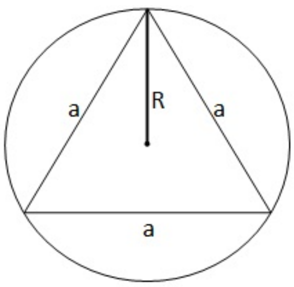
W trójkącie równobocznym

$R = \frac{2}{3}h$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

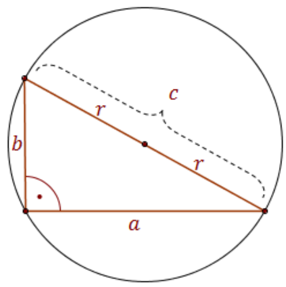
zatem:

$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



W trójkącie prostokątnym:

$R = \frac{1}{2}c.$



Zadanie 1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 7 cm i 12 cm.

Zadanie 2. Oblicz promień koła opisanego na trójkącie o bokach 3 cm, 4 cm i 5 cm.

Zadanie 3. Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm^2. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 4. Wierzchołki trójkąta prostokątnego równoramiennego leżą na okręgu o promieniu 5 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Zadanie 5. Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równy 3:4. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 10 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 6. W okrąg o promieniu 5 wpisano trójkąt prostokątny. Oblicz pole P tego trójkąta, gdy cosinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

Zadanie 7. Oblicz wysokość oraz pole trójkąta równobocznego na którym opisano okrąg o promieniu 6 cm.

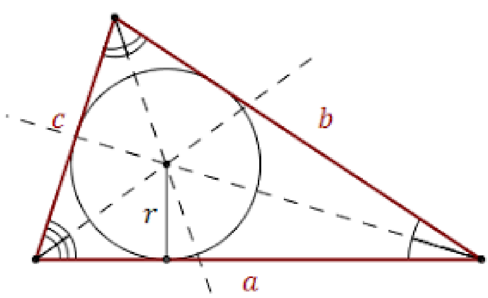
Zadanie 8. Oblicz pole P trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu r, gdy:

a) $r = 8\sqrt{3}$ cm, b) $r = \frac{2}{3}$ cm, c) $r = 2\sqrt{2}$ cm.

Zadanie 9. W kole o polu równym 25π cm^2 z punktu A, leżącego na jego obwodzie, poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy, których stosunek długości jest równy 2 : 1. Oblicz ich długości.

Okrąg nazywamy **wpisanym w trójkąt**, jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

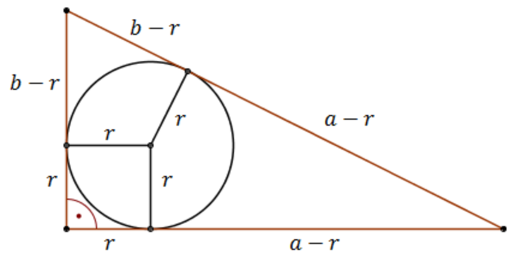
Twierdzenie. Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Twierdzenie. Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$P = p \cdot r$$

Promień okrąg wpisanego w trójkąt prostokątny:



$$r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$$

gdzie: a, b - przyprostokątne, c - przeciwprostokątna, $p = \frac{a+b+c}{2}$ - połowa obwodu trójkąta prostokątnego.

Zadanie 10. Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości 8 i 10.

Zadanie 11. Oblicz pole trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o promieniu długości $2\sqrt{3}$.

Zadanie 12. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach A = (- 2, 4), B = (6, - 2), C = (5, 5) jest prostokątny. Oblicz długość promienia R okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz długość promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 13. Punkty A = (3, 0), B = (3, 6), C = (0, 3) są wierzchołkami trójkąta. Oblicz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 14. Wykaż, że trójkąt o bokach długości x, y, z jest prostokątny i oblicz długość promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

a) $x=2\sqrt{3}$, $y=3\sqrt{5}$, $z=\sqrt{57}$,

b) $x=2\sqrt{2}$, $y=1+\sqrt{5}$, $z=\sqrt{26+2\sqrt{5}}$.

Zadanie 15. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach A = (4, -5), B = (2, 1), C = (1, - 6) jest prostokątny. Wyznacz współrzędne środka O okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz oblicz długość promienia R tego okręgu.

Zadanie 16. Oblicz długość promienia R okręgu opisanego i długość promienia r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach m, n, k, gdy:

a) m=3, n=5, k=6,

b) m=36, n=29, k=25.

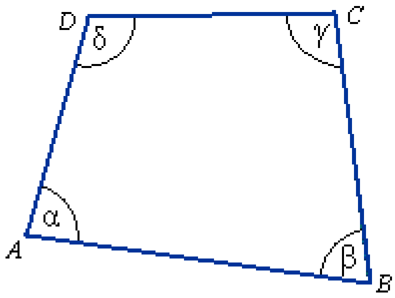
Zadanie 17. Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 18. W trójkącie prostokątnym punkt styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 5 i 12. Oblicz Długości przyprostokątnych trójkąta.

Temat: PROSTOKĄTY

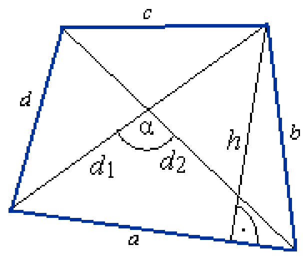
Czworokąty

Czworokąt to wielokąt o czterech bokach i o czterech kątach wewnętrznych. Czworokąt to płaszczyzna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą złożoną z czterech odcinków.



punkty A, B, C, D, to wierzchołki czworokąta,
odcinki AB, BC, CD, DA to boki czworokąta,
kąty α, β, γ, δ to kąty wewnętrzne czworokąta.

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360°.
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.



Wysokością czworokąta nazywamy odcinek wychodzący z jednego z wierzchołków czworokąta i opadający na przeciwległą podstawę (lub jej przedłużenie). Wysokość jest zawsze prostopadła do podstawy. Każdy czworokąt posiada cztery wysokości.

Przekątną czworokąta nazywamy odcinek łączący przeciwległe wierzchołki. Przekątne w czworokącie są dwie, oznaczamy je najczęściej jako d_1, d_2.

Dla dowolnego czworokąta:

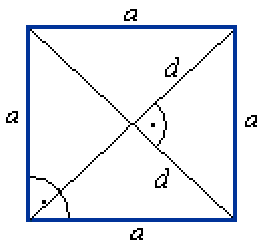
Obwód czworokąta: $Ob = a + b + c + d$.

Pole czworokąta: $P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot sin\alpha$.

Czworokąt jest figurą **wypukłą** wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego kąty wewnętrzne są kątami wypukłymi, czworokąt jest figurą **wklęsłą** wówczas, gdy jeden z jego kątów wewnętrznych jest kątem wklęsłym.

Kwadrat

Kwadratem nazywamy taki czworokąt, który ma wszystkie boki i kąty równe.



$Ob = 4a$

$P = a^2$

$P = \frac{1}{2} d^2$

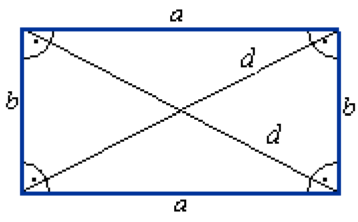
$d = a\sqrt{2}$

Własności:

- wszystkie boki są równe,
- przeciwległe boki są równoległe,
- wszystkie kąty są proste,
- przekątne są równej długości,
- przekątne dzielą się na połowę pod kątem prostym,
- przekątne zawierają się w dwusiecznych kątów kwadratu,
- przekątna dzieli prostokąt na dwa przystające trójkąty prostokątne.

Prostokąt

Prostokątem nazywamy czworokąt, którego wszystkie kąty wewnętrzne to kąty proste.



$Ob = 2a + 2b$

$P = a \cdot b$

$d = a^2 + b^2$

Własności:

- przeciwległe boki są równe i równoległe,
- sąsiednie boki są prostopadłe,
- każdy z kątów jest kątem prostym,
- przekątne są równe i dzielą się na połowy,
- przekątna dzieli prostokąt na dwa przystające trójkąty prostokątne.

Zadanie 1. Ile wynosi odległość środka boku kwadratu o boku długości 6 do najdalszego punktu kwadratu?

Zadanie 2. Oblicz stosunek pól kół wpisanego w kwadrat i opisanego na kwadracie o boku długości 4.

Zadanie 3. Dany jest kwadrat o przekątnej długości 8 cm. Z wierzchołka kwadratu zakreślamy koło o promieniu równym długości boku kwadratu. Oblicz pole powierzchni będącej częścią wspólną kwadratu i koła.

Zadanie 4. Oblicz pole kwadratu, którego przekątna jest o 2 cm dłuższa od boku.

Zadanie 5. Każdy bok prostokąta zmniejszono 8 razy. Ile razy zmalało jego pole?

Zadanie 6. Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku $17\sqrt{2}$.

Zadanie 7. Przekątna kwadratu ma długość 72. Oblicz długość boku kwadratu.

Zadanie 8. Oblicz obwód prostokąta, którego jeden z boków ma długość 14, a przekątna d = 50.

Zadanie 9. Obwód prostokąta jest równy 44 cm, zaś długości jego boków różnią się o 2 cm. Oblicz pole prostokąta.

Zadanie 10. Oblicz pole prostokąta o obwodzie 46, którego jeden z boków jest o 87,5% dłuższy od drugiego.

Zadanie 11. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 120°. Oblicz obwód tego prostokąta, jeśli jego pole jest równe $81\sqrt{3}$.

Zadanie 12. Obwód prostokąta jest równy 60 cm. Dwusieczna jednego z kątów dzieli prostokąt na dwie figury, których długości obwodów różnią się o 16 cm. Oblicz pole P prostokąta.

Zadanie 13. Oblicz pole P prostokąta, którego przekątne o długości 6 cm tworzą kąt o mierze:

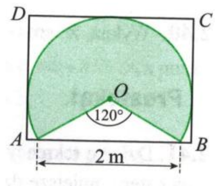
a) 60°, b) 40°.

Zadanie 14. W prostokącie różnica odległości punktu przecięcia się przekątnych od jego boków jest równa 3. Oblicz pole P prostokąta, gdy jego obwód ma długość 68.

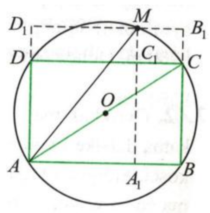
Zadanie 15. Długości boków a i b prostokąta różnią się o 7. Średnica okręgu opisanego na tym prostokącie równa się 17. Oblicz długości boków a i b tego prostokąta.

Zadanie 16. Prostokąt wpisano w koło o obwodzie długości 6π. Oblicz obwód L prostokąta, wiedząc, że jeden z jego boków ma długość 2.

Zadanie 17. Część koła o środku w punkcie O jest figurą wpisaną w prostokąt ABCD tak, jak na rysunku obok. Uwzględniając dane na rysunku, oblicz długości boków prostokąta ABCD.

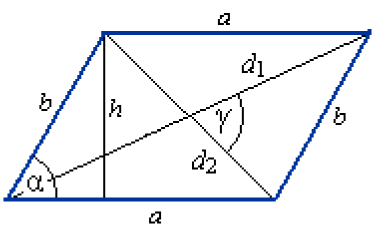


Zadanie 18. Na prostokącie ABCD opisano okrąg o środku w punkcie O (rysunek obok). Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu M należącego do okręgu od czterech boków prostokąta jest stała i równa kwadratowi długości przekątnej AC tego prostokąta.



Temat: RÓWNOLEGŁOBOKI

Równoległobok jest szczególnym przypadkiem trapezu równoramiennego - o dwóch parach boków równoległych. Równoległobokiem nazywamy czworokąt, w którym przeciwległe boki są parami równe i równoległe.



$Ob = 2a + 2b$

$P = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\alpha = a \cdot h_a = b \cdot h_b$,

gdzie $h_a - wysokość\ opuszczona\ na\ bok\ a$,

$h_b - wysokość\ opuszczona\ na\ bok\ b$

$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\gamma$.

Własności:

- przeciwległe boki są równoległe,
- przeciwległe boki są tej samej długości,
- przekątne dzielą się na połowy,
- przeciwległe kąty są równe,
- suma dwóch sąsiednich kątów równa jest 180°,
- przekątna dzieli równoległobok na dwa przystające trójkąty

Zadanie 1. Oblicz miary kątów równoległoboku, którego boki mają długość 6cm i 15 cm, a pole jest równe $45\sqrt{3}cm^2$.

Zadanie 2. W równoległoboku ABCD kąt ostry BAD ma miarę 40°. Boki AB i AD mają długości odpowiednio 9 i 10. Oblicz wysokość h opuszczoną z punktu D na bok BC.

Zadanie 3. Pole równoległoboku jest równe P, a długości jego boków są równe a i b. Oblicz wartość sinusa kąta ostrego tego równoległoboku, gdy:

a) P=60, a = 8, b=10, b) P=40, a=6, b=8.

Zadanie 4. Pole równoległoboku jest równe połowie iloczynu długości jego boków. Oblicz miary kątów α i β w tym równoległoboku.

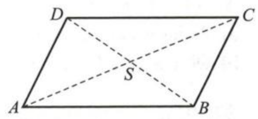
Zadanie 5. Przekątne równoległoboku o długościach odpowiednio 6 i 8 przecinają się pod kątem 60°. Oblicz pole P tego równoległoboku.

Zadanie 6. W równoległoboku o bokach 5 cm i 12 cm poprowadzono dwusieczną kata rozwartego 120°. Podaj długości odcinków, na jakie podzieliła ona bok równoległoboku.

Zadanie 7. Stosunek długości odpowiednich boków równoległoboku jest równy 2 : 5, a kąt ostry ma miarę α. Wiedząc, że długość krótszego boku jest równa a, oblicz pole P równoległoboku, gdy:

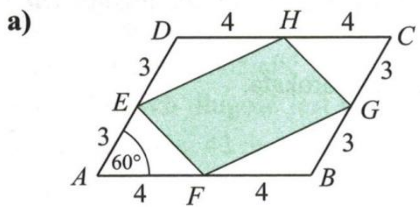
a) a= 4, α = 25°, b) a = 5, α = 35°, c) a=10, α=52°.

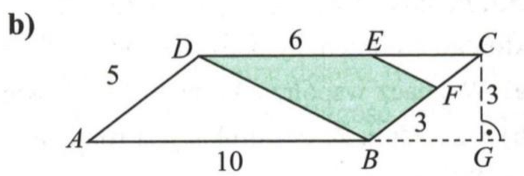
Zadanie 8. Czworokąt ABCD jest równoległobokiem. Przyjmując oznaczenia jak na rysunku obok, wykaż, że:



a) $P_{\Delta ABS} = P_{\Delta DSC}$, b) $P_{\Delta ASD} = P_{\Delta BCS}$, c) $P_{\Delta ABS} = P_{\Delta BCS}$

Zadanie 9. Czworokąt ABCD jest równoległobokiem. Uwzględniając dane na rysunku, oblicz pole P figury wyróżnionej kolorem.





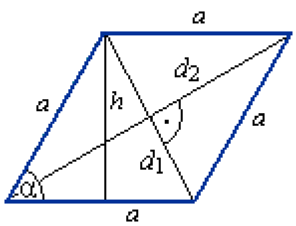
Zadanie 10. W równoległoboku, w którym jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego, kąt ostry ma miarę 60°, a krótsza przekątna ma długość $4\sqrt{3}$ cm.

a) Oblicz długości boków równoległoboku.

b) Oblicz długość wysokości równoległoboku poprowadzonej na dłuższy bok.

Romb

Rombem nazywamy czworokąt, którego wszystkie boki są równe. Jest to szczególny przypadek równoległoboku.



$Ob = 4a$

$P = a \cdot h = a^2 \cdot \sin\alpha$

$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

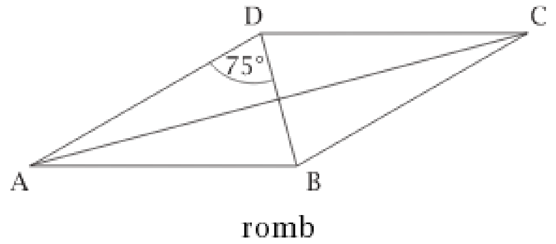
Własności:

- wszystkie boki są równe,
- przeciwległe boki są równoległe,
- suma miar dwóch kątów sąsiednich wynosi 180°,
- przekątne zawierają się w dwusiecznych kątów,
- przekątne rombu dzielą się na połowy pod kątem prostym,
- punkt przecięcia przekątnych rombu wyznacza środek okręgu wpisanego w romb,
- przekątne rombu dzielą go na cztery przystające trójkąty prostokątne,
- punkt przecięcia przekątnych jest środkiem symetrii rombu.

Zadanie 11. Oblicz miary kątów.

$| \sphericalangle ABC| =$ ....

$| \sphericalangle BCD| =$ ....



Zadanie 12. Przekątne rombu mają długość 6 cm i 8 cm. Oblicz długość wysokości tego rombu.

Zadanie 13. Pole rombu, którego dłuższa przekątna wynosi 8, równe jest 21. Oblicz długość drugiej przekątnej rombu.

Zadanie 14. Pole rombu wynosi 6, a jedna z przekątnych tego rombu ma długość 4. Oblicz długość boku i wysokość tego rombu.

Zadanie 15. Bok rombu tworzy z przekątnymi kąty, z których jeden jest większy od drugiego o 18°. Oblicz miary kątów tego rombu.

Zadanie 16. Bok rombu ma długość $\sqrt{2}$, zaś pole rombu jest równe 1. Oblicz miarę kąta ostrego w tym rombie.

Zadanie 17. Oblicz pole rombu o boku 17 cm, w którym długości przekątnych różnią się o 14 cm.

Zadanie 18. Oblicz miary kątów rombu, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli przeciwległy bok rombu na połowy.

Zadanie 19. Działka ma kształt rombu, w którego wierzchołkach postawiono słupy ogrodzeniowe. Ścieżki łączące przeciwległe słupy mają odpowiednio długości 14,2 m i 20,8 m. Ile metrów bieżących siatki potrzeba na ogrodzenie tej działki?

Zadanie 20. Przekątne rombu mają długości 12 cm i $12\sqrt{3}$ cm. Oblicz miary kątów tego rombu.

Zadanie 21. Jeden z kątów rombu ma miarę a. Długość promienia okręgu wpisanego w ten romb jest równa r. Oblicz pole P i długość obwodu L rombu, gdy:

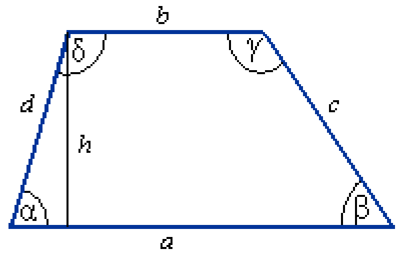
a) a=30°, r=5,6, b) a=120°, r=$2\sqrt{5}$, c) a=45°, r=18.

Zadanie 22. Romb o boku długości m opisano na okręgu o promieniu r. Oblicz pole P rombu oraz miarę kąta ostrego a tego rombu, gdy:

a) m=10, r=3, b) m=5, r=2, c) m=3, r=1.

Temat: TRAPEZY I DELTOIDY

Trapez



Trapezem nazywamy taki czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych. Boki równoległe w trapezie nazywamy podstawami, pozostałe boki nazywamy ramionami trapezu. Odcinek łączący podstawy nazywamy wysokością trapezu.

a - podstawa dolna trapezu

b - podstawa górna trapezu

c, *d* - ramiona trapezu,

h - wysokość trapezu.

Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa 180°.

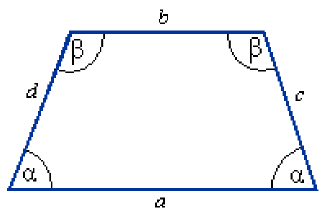
$\alpha + \delta = 180°$,

$\beta + \gamma = 180°$.

Obwód trapezu: $Ob = a + b + c + d$.

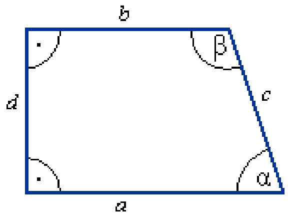
Pole trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Trapez, który ma dwa równe ramiona ($c = d$), to **trapez równoramienny**.



Kąty przy tej samej podstawie trapezu równoramiennego mają równe miary. Przekątne w trapezie równoramiennym mają równe długości. Trapez równoramienny posiada oś symetrii będącą symetralną jednej z podstaw.

Trapez, którego jedno ramię tworzy kąty proste z podstawami, nazywa się **trapezem prostokątnym**.

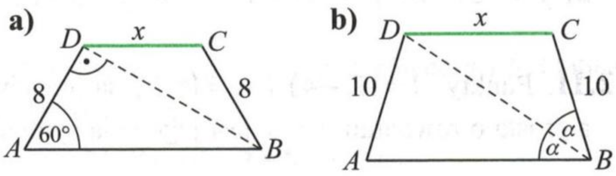


W trapezie prostokątnym ramię prostopadłe jest wysokością trapezu.

Zadanie 1. W trapezie prostokątnym miara kąta ostrego jest równa 45°. Krótsza przekątna ma długość 10 cm, a krótsza podstawa ma długość 8 cm. Oblicz pole P trapezu.

Zadanie 2. Wyznacz wysokość trapezu równoramiennego o kącie ostrym 60° i ramieniu długości $2\sqrt{3}$.

Zadanie 3. Uwzględniając dane na rysunku obok, wyznacz długość x krótszej podstawy trapezu równoramiennego ABCD.



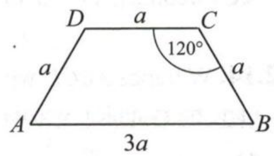
Zadanie 4. Dany jest trapez równoramienny o kącie ostrym 30° i podstawach 16 i 12. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 5. Wykaż, że w trapezie równoramiennym, w którym przekątna zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego, ramię i krótsza podstawa są tej samej długości.

Zadanie 6. W trapezie równoramiennym o obwodzie długości 52 cm przekątna jest dwusieczną kąta ostrego, a stosunek długości podstawy krótszej do podstawy dłuższej jest równy 3 : 4. Oblicz długości boków trapezu.

Zadanie 7. Ramię trapezu równoramiennego ma długość 10, a kąt ostry ma miarę 60°. Przekątna trapezu jest prostopadła do ramienia. Oblicz pole P trapezu.

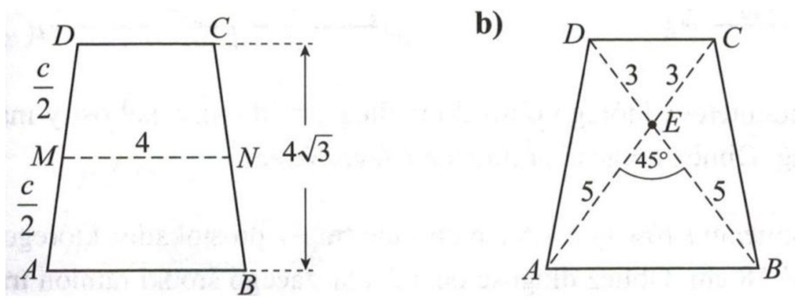
Zadanie 8. Czworokąt ABCD jest trapezem. Uzasadnij, że podane na rysunku obok wymiary są ze sobą sprzeczne, czyli na rysunku przedstawiona jest sytuacja niemożliwa.



Zadanie 9. Wykaż, że w trapezie równoramiennym ABCD dwusieczne jego kątów przyległych do tego samego ramienia są prostopadłe.

Zadanie 10. Uwzględniając dane na rysunku poniżej, oblicz pole P trapezu równoramiennego ABCD.

a.

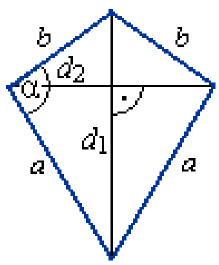


Zadanie 11. W trapezie ABCD, w którym boki AB i CD są równoległe, dane są: |AB| = 28, |CD| = 15, |AD| = $6\sqrt{2}$ i |∠DAB| = 45°. Oblicz sin(∠ADB).

Zadanie 12. Dany jest trapez równoramienny ABCD. Ramię tego trapezu ma długość 10 cm, a obwód wynosi 40 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że $tg\alpha = \frac{3}{4}$, gdzie α jest kątem ostrym tego trapezu.

Deltoid

Deltoidem nazywamy czworokąt posiadający dwie pary boków sąsiednich równych, w którym żadne dwa boki nie są wzajemnie równoległe.



$$Ob = 2a + 2b$$

$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$$

$$P = a \cdot b \cdot sin\alpha$$

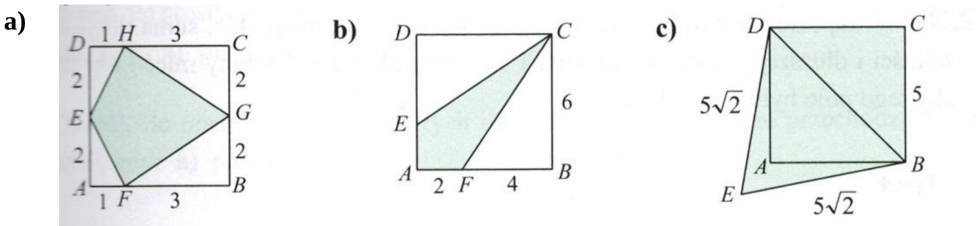
Własności

- kolejne boki są równe,
- kąty między różnymi bokami są równe,
- przekątne są prostopadłe,
- przekątna d_2 dzieli deltoid na dwa trójkąty równoramienne

Zadanie 13. Przekątne deltoidu mają długości 6 i 9. Oblicz pole P deltoidu.

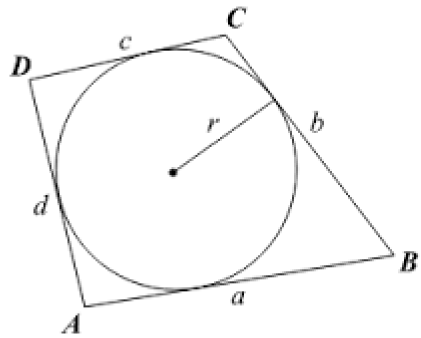
Zadanie 14. Pole deltoidu jest równe $12\sqrt{3}$, a jedna z przekątnych ma długość równą $2\sqrt{3}$. Oblicz długość drugiej przekątnej deltoidu.

Zadanie 15. Czworokąt ABCD jest kwadratem. Uwzględniając dane na rysunku, oblicz pole P figury wyróżnionej kolorem.



Zadanie 16. Deltoid, w którym stosunek długości przeciwległych boków jest równy 1 : 2, opisany jest na okręgu o promieniu 3. Oblicz długości boków deltoidu, wiedząc, że jego pole jest równe 54.

Temat: *OKRĄG WPISANY W CZWOROKĄT*



Twierdzenie. W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe:

$$a + c = b + d$$

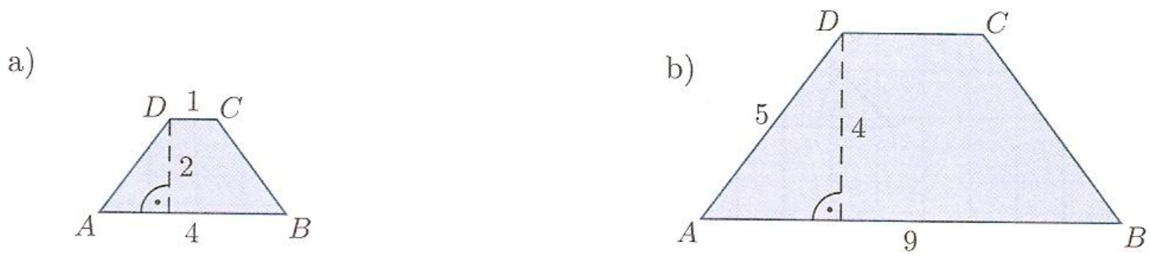
Zadanie 1. Czy w czworokąt wypukły o podanych kolejnych bokach można opisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

a) 1, 5, 3, 7, b) 14, 9, 8, 13, c) 25, 16, 15, 24.

Zadanie 2. Czy w poniższy czworokąt można wpisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

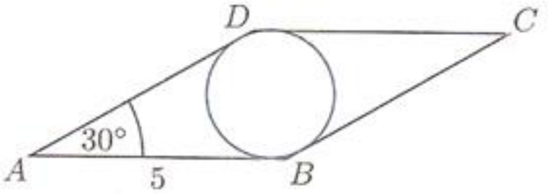
a) kwadrat b) romb c) deltoid

Zadanie 3. Czy w trapez równoramienny przedstawiony na rysunku można wpisać okrąg?

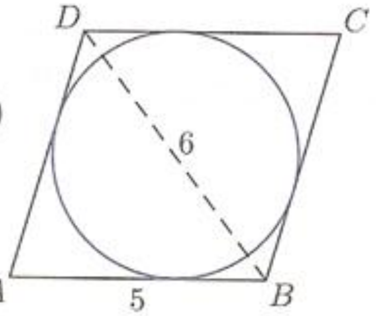


Zadanie 4. Oblicz promień okręgu wpisanego w romb *ABCD*.

a)

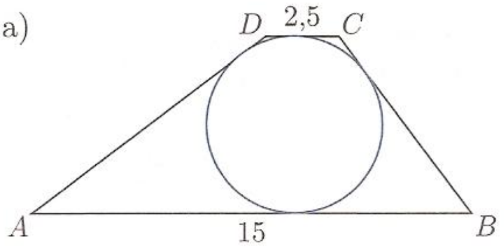


b)

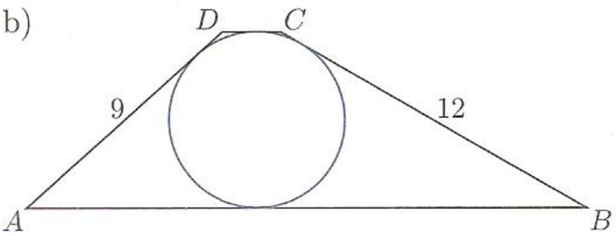


Zadanie 5. Trapez *ABCD* jest opisany na okręgu o promieniu 3. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

a)



b)



Zadanie 6. Oblicz pole trapezu równoramiennego o ramieniu długości 10 cm opisanego na okręgu o promieniu 4 cm.

Zadanie 7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 5 cm i 9 cm. Oblicz długość ramion i pole tego trapezu, jeżeli można w niego wpisać okrąg.

Zadanie 8. Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 1 cm i 3 cm. Oblicz długości ramion tego trapezu, jeśli można w niego wpisać.

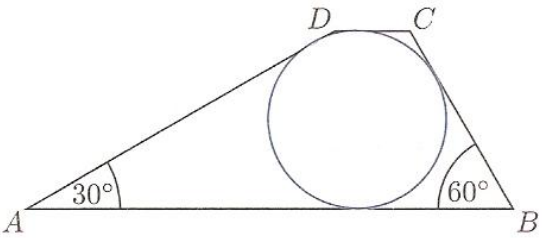
Zadanie 9. W trapez o kątach ostrych przy dłuższej podstawie 30° i 60° wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

Zadanie 10. Dłuższa podstaw trapezu prostokątnego ma długość 6 cm, a promień okręgu wpisanego jest równy 1 cm. Oblicz długość krótszej podstawy tego trapezu.

Zadanie 11. W romb o boku długości 2 cm i kącie ostrym 60° wpisano koło. Oblicz pole tego koła.

Zadanie 12. W romb o kącie ostrym 30° wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole tego rombu.

Zadanie 13. Trapez *ABCD* o kątach ostrych 30° i 60° jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz pole i obwód tego trapezu.



Zadanie 14. Ramię trapezu równoramiennego opisanego na okręgu ma długość 5, a jego dłuższa podstawa jest równa 8. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trapez oraz pole trapezu.

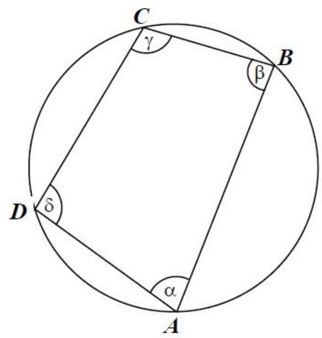
Zadanie 15. W trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm jest wpisany okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 16. Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trapez, którego ramiona mają długości 5 cmi 7 cm. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

Zadanie 17. Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu o promieniu 4 cm, jeśli jedna z podstaw jest o 12 cm dłuższa od drugiej.

Zadanie 18. W trapezie równoramiennym (niebędącym rombem) o kącie 45° wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

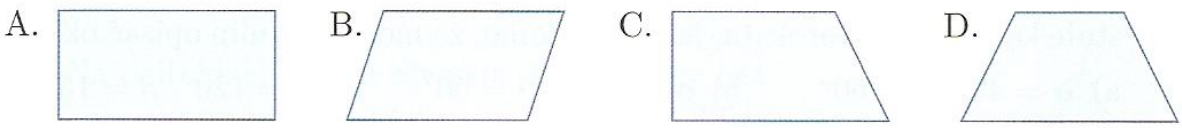
Temat: *OKRĄG OPISANY NA CZWOROKĄCIE*



Twierdzenie. Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180^0:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0.$$

Zadanie 1. Na którym z poniższych czworokątów można opisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 2. Czy na czworokącie o podanych kolejnych kątach można opisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

a) $30^o, 60^o, 120^o, 150^o$ b) $78^o30', 86^o20', 101^o30', 93^o40'$

c) $25^o, 105^o, 155^o, 75^o$ d) $54^o36', 70^o5', 125^o24', 109^o55'$

Zadanie 3. Kąty α i β są sąsiednimi kątami wewnętrznymi czworokąta. Oblicz pozostałe kąty tego czworokąta, jeżeli wiadomo, że można na nim opisać okrąg.

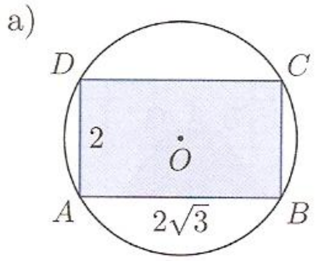
a) $\alpha = 45^o, \beta = 60^o$, b) $\alpha = 100^o, \beta = 50^o$, c) $\alpha = 120^o, \beta = 150^o$.

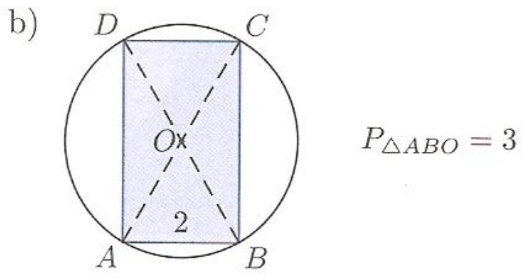
Zadanie 4. Czy na czworokącie o podanych kolejnych kątach, gdzie $\alpha > 0$, można opisać okrąg?

a) α,2α, 3α, 4α b) 2α, α, 4α, 5α c) 3α,4α, 3α, 2α

Zadanie 5. Oblicz promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach długości 3 i 4.

Zadanie 6. Oblicz długość okręgu opisanego na prostokącie *ABCD*.





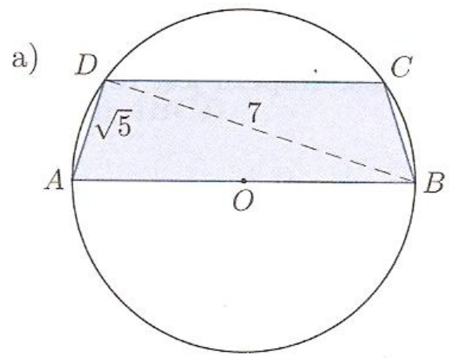
Zadanie 7. Na trapezie o kolejnych katach: α, β, γ i δ można opisać okrąg. Oblicz miary kątów tego trapezu, wiedząc, że γ = 4α.

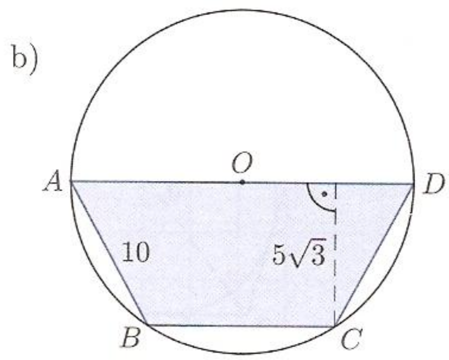
Zadanie 8.

a) Oblicz pole koła opisanego na prostokącie o bokach długości 6 cm i 10 cm.

b) W okrąg o promieniu 20 cm wpisano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 3:4. Oblicz pole tego prostokąta.

Zadanie 9. Oblicz pole koła opisanego na trapezie *ABCD*.





Zadanie 10. Jedna z podstaw trapezu jest średnicą opisanego na nim okręgu. Kąt między przekątną tego trapezu a tą podstawą ma miarę 30°, a wysokość trapezu jest równa 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

Zadanie 11. Jedna z podstaw trapezu, wpisanego w okrąg o promieniu 2, jest średnicą tego okręgu, a jeden z jego kątów ma miarę 60°. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

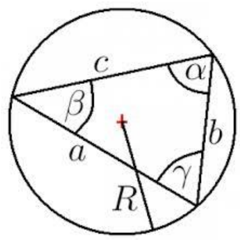
Zadanie 12. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 60°. Oblicz pole koła opisanego na tym prostokącie, jeśli:

a) jego krótszy bok ma długość 6 cm, b) jego dłuższy bok ma długość 6 cm.

Zadanie 13. Na trapezie, którego wysokość jest równa 4 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu, jeśli jedna z jego podstaw jest średnicą tego okręgu.

Temat: TWIERDZENIE SINUSÓW

Twierdzenie sinusów



W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$$

Zadanie 1. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC.

a) $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = 3$, $\angle BAC = 60°$

b) $|AC| = 3\sqrt{6}$, $|BC| = 9$, $\angle BAC = 120°$

c) $|AB| = 3\sqrt{2}$, $|AC| = 6$, $\angle ABC = 45°$

Zadanie 2.

a) Najdłuższy bok trójkąta ma długość 10 cm, a jego dwa kąty mają miary 20° i 120°. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 ma miarę 135°. Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta.

c) Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę 15°. Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość równą długości podstawy trójkąta.

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC, w którym A=(0, 0), B=(4, 0). Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

a) $|BC| = 4\sqrt{3}$, $\angle CAB = 120°$

b) $|AC| = 4\sqrt{2}$, $\angle ACB = 30°$

Zadanie 4. Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a=4, b=6, \alpha=30°$, c) $b=11, c=12, \beta=60°$, e) $a=9, b=10, \alpha=45°$,

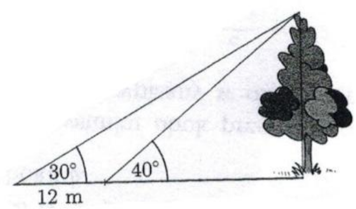
b) $a = 10, c=20, \gamma = 150°$, d) $a=5, b=9, \alpha=30°$, f) $a=7, b=10, \alpha=45°$.

Zadanie 5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli:

a) $a=4, \alpha =135°$, c) $a=7, \beta=107°, \gamma=43°$, e) $b =10, \beta = 135°$,

b) $a=7, \alpha =120°$, d) $a=3, \beta=30°, \alpha=4\gamma$, f) $c =11, \alpha = \beta = 45°$.

Zadanie 6. W momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 30°, cień drzewa jest o 12 m dłuższy niż wtedy, gdy tworzą one kąt 40°. Oblicz wysokość drzewa.



Zadanie 7. Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

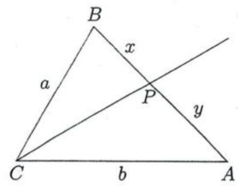
a) b=10, a=30°, β=75°, c) b=6, a=45°,γ=75°, e) a=12, b =16, a = 30°,

b) b=6, c=5, β=20°, d) a=5, c=7, γ=110°, f) a=6, c=3, γ=40°.

Zadanie 8. Dane są kąty a i β trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 cm. Nie korzystając z tablic, oblicz obwód trójkąta, jeśli:

a) a = 45°, β = 60°, b) a = 30°, β= 135°.

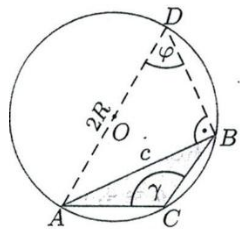
Zadanie 9. Dany jest trójkąt ABC, w którym półprosta CP jest dwusieczną kąta ACB (rysunek obok). Wykaż, że długości odcinków, na które dwusieczna dzieli bok AB, są proporcjonalne do długości boków AC i BC: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$



Zadanie 10. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku a. Punkty P i Q dzielą bok BC tego trójkąta na trzy równe części. Wyznacz sinusy kątów PAB i QAB oraz długość odcinka AP.

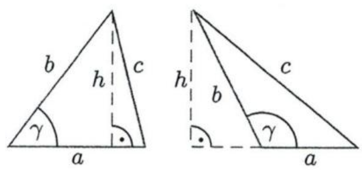
Zadanie 11. Niech a i β będą kątami ostrymi trójkąta takimi, że a >β. Uzasadnij, że bok a jest dłuższy od boku b.

Zadanie 12. Na rysunku obok przedstawiono trójkąt o kącie γ > 90° wpisany w okrąg o promieniu R. Udowodnij, że: $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



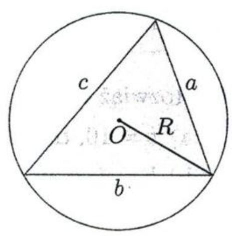
Zadanie 13.

a) Korzystając z zamieszczonych obok rysunków, uzasadnij, że pole dowolnego trójkąta wyraża się za pomocą wzoru: P=$\frac{1}{2}$ ab sin γ, gdzie γ jest kątem między bokami a i b.



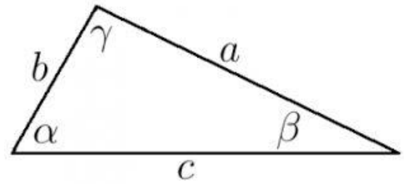
b) Wyprowadź wzór: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, korzystając z tego, że pole dowolnego trójkąta wyraża każda z równości: P=$\frac{1}{2}$ ab sin γ, P=$\frac{1}{2}$ ac sin β, P=$\frac{1}{2}$ bc sin a.

Zadanie 14. Uzasadnij, korzystając z twierdzenia sinusów, że pole dowolnego trójkąta o bokach: a, b, c wyraża się za pomocą wzoru: $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie



Temat: TWIERDZENIE COSINUSÓW

Twierdzenie cosinusów



Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące równości:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

Zadanie 1. Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

a) $a=4$, $b=2\sqrt{3}$, $\gamma=30^\circ$,

c) $a=3+\sqrt{3}$, $c=6\sqrt{2}$, $\beta=45^\circ$,

b) $b = 6$, $c = \sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$,

d) $b = 4$, $c = 2$, $\alpha=120^\circ$.

Zadanie 2. Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a=2$, $b=3$, $c=4$,

b) $a=3$, $b=5$, $c=7$.

Zadanie 3. Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 1$, $b = 1$, $c=\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

b) $a=\sqrt{2}$, $b=2$, $c=1+\sqrt{3}$.

Zadanie 4. Oblicz długość boku c trójkąta ABC, jeśli:

a) $a=4$, $b=\sqrt{3}$, $\gamma=30^\circ$,

b) $a=2$, $b=6$, $\gamma=120^\circ$.

Zadanie 5. Dane są długości a, b dwóch sąsiednich boków równoległoboku oraz kąt γ zawarty między tymi bokami. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

a) $a=2$, $b=4\sqrt{3}$, $\gamma=30^\circ$,

c) $a=4$, $b=2\sqrt{2}$, $\gamma=45^\circ$,

b) $a=5$, $b=3$, $\gamma=60^\circ$,

d) $a=6$, $b=8$, $\gamma=120^\circ$.

Zadanie 6. W trójkącie ABC dane są długości dwóch jego boków $a = 6$ i $b = 10$. Oblicz długość boku c, jeśli wiadomo, że $\sin\gamma = \frac{4}{5}$ oraz kąt γ jest:

a) ostry,

b) rozwarty.

Zadanie 7. Sprawdź, czy trójkąt o bokach długości: a, b, c jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.

a) $a=8$, $b=7$, $c=5$,

c) $a=25$, $b=7$, $c=24$,

b) $a=10$, $b=11$, $c=4$,

d) $a=6$, $b=20$, $c=21$.

Zadanie 8.

a) Jeden z boków trójkąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 60°. Oblicz długości tych boków, jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość 7.

b) Jeden z boków trójkąta jest czterokrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 120°. Oblicz długości tych boków, jeśli trzeci bok tego trójkąta ma długość 21.

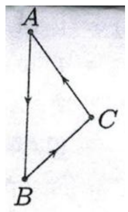
Zadanie 9. W trapezie ABCD dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60°. Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD. Oblicz obwód tego trapezu.

Zadanie 10.

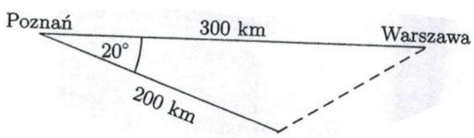
a) Dany jest równoległobok o bokach a i 2a oraz kącie ostrym 30°. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

b) Wyznacz miary kątów rombu o boku a i jednej z przekątnych równej $a\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

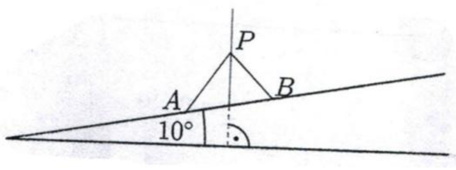
Zadanie 11. Podczas regat należy pokonać trasę wyznaczoną przez boje ustawione w punktach: A. B, C (rysunek obok). Odcinek AB poprowadzono w kierunku południowym. Odcinek BC ma długość 17 km i poprowadzono go w kierunku północno-wschodnim, a odcinek AC ma długość 27 km. Oblicz długość całej trasy.



Zadanie 12. Pilot lecący samolotem z Poznania do Warszawy po przebyciu 200 km (odległość z Poznania do Warszawy jest równa 300 km) zorientował się, że pomylił kurs o 20°. Jak daleko znajdował się wówczas od Warszawy?



Zadanie 13. Na stoku o kącie nachylenia 10° ustawiono słup wysokości 14 m. Jakiej długości są odciągi poprowadzone z punktu P, położonego w połowie wysokości słupa, do punktów A i B znajdujących się 6 m od podstawy słupa (rysunek poniżej)?



Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – TRÓJKĄTY I CZWOROKĄTY

Sprawdz czy już umiesz:

- ✓ stosować własności trójkątów do wyznaczania długości brakujących boków i kątów,
- ✓ obliczać pola dowolnych trójkątów,
- ✓ obliczać promień okręgu wpisanego w trójkąt i opisanego na trójkącie,
- ✓ stosować własności czworokątów do wyznaczania długości brakujących odcinków i miar kątów,
- ✓ obliczać pola i obwody czworokątów,
- ✓ sprawdzać, czy w czworokąt można wpisać okrąg i odwrotnie,
- ✓ stosować twierdzenia dotyczące czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu w zadaniach
- ✓ stosować twierdzenie sinusów i cosinusów do wyznaczania długości brakujących boków i kątów w trójkątach

I. Trójkąty, okrąg wpisany i opisany na trójkącie.

Zadanie 1. Oblicz pole trójkąta :

a) równoramiennego o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie 37^0

b) równobocznego o wysokości równej $3\sqrt{3}$

c) o bokach długości 3cm, 5cm, 6cm.

Zadanie 2. Oblicz pole koła opisanego i wpisanego w trójkąt:

a) prostokątny o przyprostokątnych 6cm i 8cm.

b) równoboczny o boku długości 6cm

c) o bokach długości 5cm, 7cm i 10cm.

Zadanie 3. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o polu $12\sqrt{3}cm^2$.

Zadanie 4. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ma 2cm długości. Oblicz obwód tego trójkąta

Zadanie 5. Obwód trójkąta jest równy 360, a jego pole 180. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 6. Oblicz promień i pole okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku długości 12.

II. Czworokąty

Zadanie 7. Oblicz obwód rombu o przekątnych długości 10cm i 24cm.

Zadanie 8. Oblicz wysokość rombu o przekątnych długości 10 i 24.

Zadanie 9. Krótsza podstawa trapezu prostokątnego ma długość 16cm, a jego wysokość jest równa 7cm. Oblicz pole i obwód tego trapezu, jeśli sinus jego kąta ostrego jest równy $\frac{7}{25}$.

Zadanie 10. Długość boku rombu jest równa $3\sqrt{5}$, a jedna z jego przekątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz pole tego rombu.

Zadanie 11. Dany jest trapez równoramienny o kącie ostrym 30^0 i podstawach długości 16 i 12. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

Zadanie 12. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 3 i 7, a przekątna $2\sqrt{13}$. Oblicz pole tego trapezu.

III - okrąg wpisany w czworokąt i okrąg opisany na czworokącie

Zadanie 13. Sprawdź, czy w czworokąt wypukły można wpisać okrąg, jeżeli jego kolejne boki mają długości:

a) 7, 12, 17, 12, b) 30, 31, 35, 33, c) 6, 16, 36, 26.

Zadanie 14. Czy na czworokącie można opisać okrąg, jeżeli jego kolejne kąty mają miary:

a) $30^0, 60^0, 150^0, 120^0$, b)$24^0, 126^0, 56^0, 114^0$, c)$91^0, 92^0, 89^0, 88^0$.

Zadanie 15. W trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm jest wpisany okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 16. Znajdź promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach długości 5cm i 12cm.

Zadanie 17. Jaką długość ma bok kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu długości 5?

IV. Twierdzenie sinusów i cosinusów

Zadanie 18. W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków oraz miara jednego z kątów. Znajdź miary pozostałych kątów tego trójkąta oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

a) $|AC| = \sqrt{6},\ |BC| = 2,\ |\measuredangle ABC| = 60^0$

b) $|AC| = 1,\ |BC| = \sqrt{2},\ |\measuredangle ABC| = 30^0$

Zadanie 19. Najdłuższy bok trójkąta ma długość 10 cm, a jego dwa kąty mają miary $20^0\ \ i\ \ 120^0$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 20. Oblicz miary kątów trójkąta o podanych bokach:

a) 2, 3, 4, b) 3, 5, 7.

BAZA ZADAŃ – PLANIMETRIA

Zadanie 1. W czworokącie *ABCD* przekątne dzielą się na połowy, przecinają się pod kątem prostym i mają odpowiednio długość 12 cm i 6 cm. Obwód tego czworokąta jest równy:

A. 18 cm B. 72 cm C. $12\sqrt{5}$ cm D. $20\sqrt{3}$ cm.

Zadanie 2. Przekątna trapezu równoramiennego o podstawach *a* i *b* (*a*>*b*) jest dwusieczną kąta przy dłuższej podstawie trapezu. Wówczas długość krótszej podstawy jest równa:

A. długości przekątnej trapezu

B. wysokości trapezu

C. długości ramienia trapezu

D. połowie długości dłuższej podstawy trapezu.

Zadanie 3. Krótsza przekątna rombu dzieli go na dwa trójkąty równoboczne. Kąt rozwarty rombu ma miarę :

A. 60° B. 120° C. 135° D. 150°.

Zadanie 4. Bok rombu ma długość 13 cm, a jego dłuższa przekątna ma 24 cm. Długość krótszej przekątnej rombu jest równa:

A. 24 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 5 cm.

Zadanie 5. Dany jest kwadrat o boku mającym długość $2\sqrt{2}$ i romb, którego bok ma długość 4, a kąt ostry jest równy 60°. Niech *d* oznacza długość przekątnej kwadratu, zaś *p* – długość krótszej przekątnej rombu. Wówczas:

A. $d<p$ B. $d>p$ C. $d \cdot p = 4\sqrt{2}$ D. $d = p$.

Zadanie 6. Wysokość rombu o kącie ostrym 30°jest równa 6 cm, zatem długość boku rombu wynosi:

A. 12 cm B. 3 cm C. $6\sqrt{3}$ cm D. $3\sqrt{3}$ cm.

Zadanie 7. Przekątne rombu mają długość 12 i 16. Niech *P* oznacza pole rombu, zaś *O* – obwód tego rombu. Wówczas:

A. $P = 192$, $O = 14$ B. $P = 192$, $O = 40$

C. $P = 96$, $O = 40$ D. $P = 96$, $O = 14$.

Zadanie 8. Pole i obwód kwadratu, którego przekątna ma długość $\sqrt{2}$, są odpowiednio równe:

A. 0,5 i $2\sqrt{2}$ B. 1 i 4 C. 1 i 1 D. 2 i $4\sqrt{2}$

Zadanie 9. Boki równoległoboku mają długość 8 i 6, a jego kąt ostry jest równy 30°. Pole tego równoległoboku wynosi:

A. 12 B. 24 C. $24\sqrt{3}$ D. $12\sqrt{3}$.

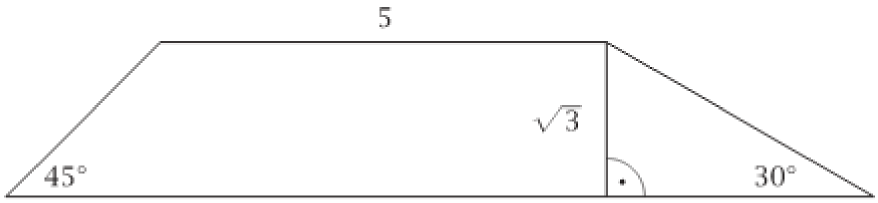
Zadanie 10. Kwadrat o boku długości $\sqrt{2}$ i romb o boku długości 2 mają równe pola. Wynika stąd, że kąt ostry rombu jest równy:

A. 60° B. 45° C. 30° D. 15°.

Zadanie 11. W trapezie odcinek łączący środki ramion ma długość 7 cm, a wysokość 4 cm. Pole tego trapezu jest równe:

A. 28 cm^2 B. 14 cm^2 C. 12 cm^2 D. 7 cm^2.

Zadanie 12. Oblicz obwód i pole trapezu przedstawionego na rysunku.



Zadanie 13. W trapez równoramienny o wierzchołkach w punktach: A = (-4, 3), B = (2, -3), C =(3, 2), D = (1, 4) wpisano czworokąt tak, że jego wierzchołki są środkami boków trapezu. Sprawdź, czy wpisany czworokąt jest rombem. Oblicz jego pole P i obwód L.

Zadanie 14. Krótsza przekątna równoległoboku ma długość $5\sqrt{3}$ i jest prostopadła do boku równoległoboku. Boki równoległoboku pozostają w stosunku 1 : 2. Oblicz długości boków, miary kątów wewnętrznych oraz krótszą wysokość równoległoboku.

Zadanie 15. Wysokość rombu poprowadzona przez punkt przecięcia przekątnych dzieli bok rombu na odcinki mające długość 9 cm i 4 cm. Oblicz:

a) wysokość rombu, b) tangens kąta ostrego rombu.

Zadanie 16. Przekątna prostokąta o długości 10cm tworzy z dłuższym bokiem prostokąta kąt o mierze 30°. Oblicz pole tego prostokąta.

Zadanie 17. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 32cm. Podstawa trójkąta jest o 1cm dłuższa od ramienia. Oblicz pole trójkąta.

Zadanie 18. Wysokość trójkąta równobocznego wynosi $2\sqrt{3}$. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Zadanie 19. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę cztery razy mniejszą od miary kąta przy podstawie. Oblicz miary kątów trójkąta.

Zadanie 20. Stosunek miar kątów trójkąta jest równy 2:3:4. Oblicz miary kątów trójkąta.

Zadanie 21. Dany jest prostokąt o bokach 4 i 8. Środki boków prostokąta są wierzchołkami rombu. Oblicz pole i obwód rombu.

Zadanie 22. Suma miar katów środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku jest równa 126°. Oblicz miary tych kątów.

Zadanie 23. Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość ma długość 9.

Zadanie 24. Oblicz pole równoległoboku o bokach długości 1dm i 4cm oraz kącie rozwartym 150°.

Zadanie 25. Stosunek długości przekątnych rombu, którego bok ma długość 8cm, jest równy 4:3. Oblicz pole rombu.

Zadanie 26. W okrąg o promieniu 15 cm wpisano trapez równoramienny w taki sposób, że średnica okręgu jest dłuższą podstawą trapezu. Suma długości ramion trapezu i krótszej podstawy jest równa 45 cm. Oblicz:

a) długość odcinka łączącego środki ramion trapezu

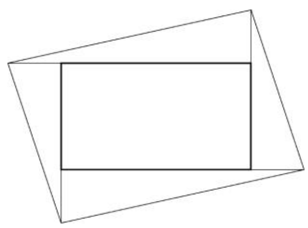
b) długości odcinków, na jakie punkt przecięcia przekątnych dzieli te przekątne.

Zadanie 27. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest dwa razy krótsza od drugiej. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 12 cm.

a) Oblicz długości podstaw trapezu.

b) Wiedząc dodatkowo, że sinus kąta ostrego trapezu jest równy $\frac{3}{5}$, oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 28. W prostokącie o bokach długości 10 cm i 8 cm przedłużono każdy bok o 4 cm w sposób przedstawiony na rysunku poniżej. Następnie połączono końce przedłużeń.



a) Oblicz pole otrzymanego czworokąta.

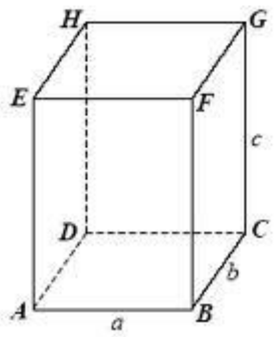
b) Wykaż, że powstały czworokąt jest równoległobokiem.

3. WIELOŚCIANY

Wielościan to bryła geometryczna, ograniczona przez tak zwaną powierzchnię wielościenną, czyli powierzchnię utworzoną z wielokątów o rozłącznych wnętrzach i każdym boku wspólnym dla dwóch wielokątów.

Temat: WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH I PŁASZCZYZN W PRZESTRZENI

Zadanie 1. Krawędzie prostopadłościanu zawierającą się w odpowiednich prostych. Podaj przykłady par prostych: równoległych, skośnych, przecinających się.



Proste równoległe: EH||GF, ……||……., ……||…….,
…….||……

Proste skośne: EH i BF, ….. i….., ……. i……., ……i…….

Proste przecinające się: …….i…….., ……i……., ……i……..

Zadanie 2. Ściany prostopadłościanu z zadania 1 zawierają się w płaszczyznach: ściana CDGH w płaszczyźnie α_1, ściana ADEH w płaszczyźnie α_2, ściana ABEF w płaszczyźnie α_3, ściana BCFG
w płaszczyźnie α_4 , ściana ABCD w płaszczyźnie α_5. Podaj przykłady par płaszczyzn:

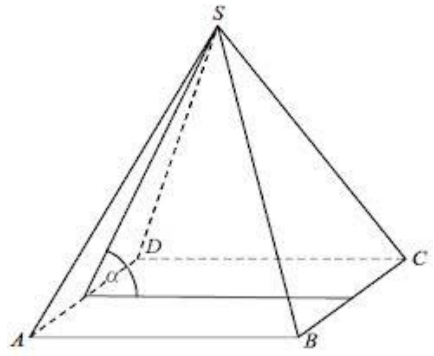
Równoległych: …….||………, ………||……..

Przecinających się: ……..i…….., ……i……, ……..i……., …….i……..

Zadanie 3. Korzystając z rysunku z zadania 1 i oznaczeń z zadania 2, uzupełnij zapisy:

a) Prosta EH jest równoległa do płaszczyzny ……… oraz do płaszczyzny………
b) Proste ……. i ….. są równoległe do płaszczyzny α_2,
c) Prosta EF jest prostopadła do płaszczyzny …….oraz do płaszczyzny …….
d) Proste …….. i……. są prostopadłe do płaszczyzny α_5

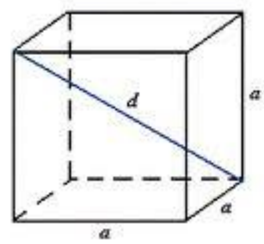
Zadanie 4. Na rysunku przedstawiony jest ostrosłup o podstawie kwadratu. Wypisz krawędzie tego ostrosłupa:



a) Równoległe do krawędzi BC:
b) Skośne do krawędzi AB:
c) Skośne do krawędzi DS.:

Zadanie 5. Rzutem prostokątnym odcinka AB długości 20cm na płaszczyznę π_1 jest odcinek A'B' o długości 10cm. Oblicz miarę kąta nachylenia prostej AB do płaszczyzny π_1.

Zadanie 6. Na rysunku obok zaznaczono przekątną sześcianu. Zaznacz kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy.



Zadanie 7. Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π_1.
Określ położenie prostej l względem płaszczyzny π_1, gdy:

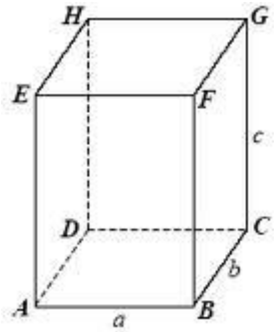
a) Prosta l jest prostopadła do prostej k
b) Prosta l jest skośna do prostej k

Zadanie 8. Przez punkty A i B leżące poza płaszczyzną P poprowadzono proste prostopadłe do tej płaszczyzny, przebijające ją odpowiednio w punktach A' i B'. Wiedząc, że |AA'|=80cm i |BB'|=60cm oblicz odległość środka odcinka AB od płaszczyzny P.

Zadanie 9. Dwie proste równoległe k i l leżą na płaszczyźnie P w odległości 28cm od siebie. Prosta m, leżąca poza płaszczyzną, jest równoległa do prostej k i oddalona od niej o 17cm, a od płaszczyzny P o 15 cm. Oblicz odległość między prostymi m i l.

Zadanie 10. Odcinek AB długości 7,5cm przebija płaszczyznę P. Jego końce odległe są od tej płaszczyzny o 1,4cm i 0,7cm. Oblicz długość rzutu odcinka AB na płaszczyznę P.

Temat: KĄT DWUŚCIENNY



Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan ABCDEFGH.

a) Wypisz pary ścian równoległych
b) Wypisz ściany prostopadłe do podstawy ABCD
c) Wypisz proste (krawędzie) równoległe do prostej (krawędzi) c
d) Wypisz proste (krawędzie) skośne do prostej (krawędzi) c

Zadanie 2. Wyznacz miarę kąta dwuściennego wiedząc, że odległość dowolnego punktu A leżącego na jednej ze ścian od krawędzi kąta dwuściennego jest dwukrotnie większa niż odległość tego punktu od drugiej ściany.

Zadanie 3. Miara kąta dwuściennego wynosi 45^0. Na jednej ze ścian znajduje się punkt A, którego odległość od drugiej ściany wynosi 10cm. Oblicz odległość punktu A od krawędzi kąta dwuściennego.

Zadanie 4. Punkt A leżący wewnątrz kąta dwuściennego jest odległy od każdej z jego ścian o 7cm. Znajdź odległość punktu A od krawędzi kąta dwuściennego, jeżeli kąt zawarty między odcinkami opuszczonymi prostopadle z punktu A na ściany kąta ma miarę 120^0.

Zadanie 5. Wewnątrz kąta dwuściennego prostego znajduje się punkt A odległy od ścian kąta odpowiednio o 9cm i 40cm. Oblicz odległość punktu A od krawędzi kąta dwuściennego.

Zadanie 6. Miara kąta dwuściennego jest równa 60^0. Na jednej ze ścian leży punkt A, którego odległość od drugiej ściany jest równa 9cm. Oblicz odległość punktu A od krawędzi kąta dwuściennego.

Temat: GRANIASTOSŁUP

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany są równoległobokami. Ściany zawarte w płaszczyznach podstaw nazywamy **podstawami graniastosłupa**. Pozostałe ściany są równoległobokami i nazywamy je **ścianami bocznymi graniastosłupa**.
Wysokość graniastosłupa to odcinek zawarty w prostej prostopadłej do jego podstaw, którego końcami są punkty wspólne tej prostej z płaszczyznami zawierającymi podstawy graniastosłupa.
Przekątną graniastosłupa nazywamy każdy odcinek, którego końcami są wierzchołki obu podstaw graniastosłupa i który nie zawiera się w żadnej ze ścian graniastosłupa.

Graniastosłup n-kątny ma:

- 2n wierzchołków
- 3n krawędzi
- n+2 ścian

Wśród graniastosłupów wyróżniamy graniastosłupy proste i pochyłe.

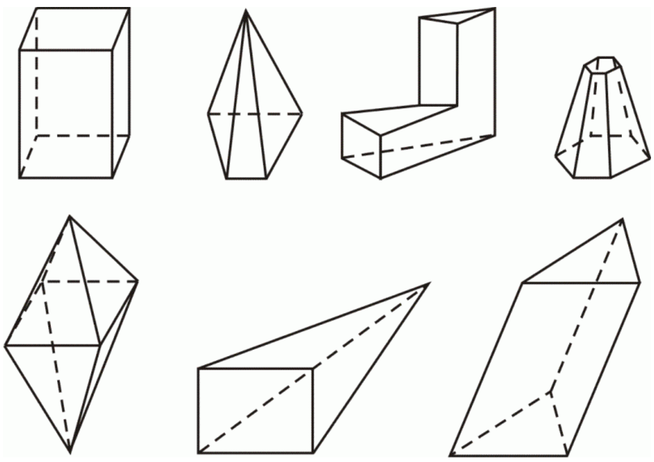
Graniastosłup prosty to figura przestrzenna, której podstawy są przystającymi wielokątami, a wszystkie ściany boczne są prostokątami.

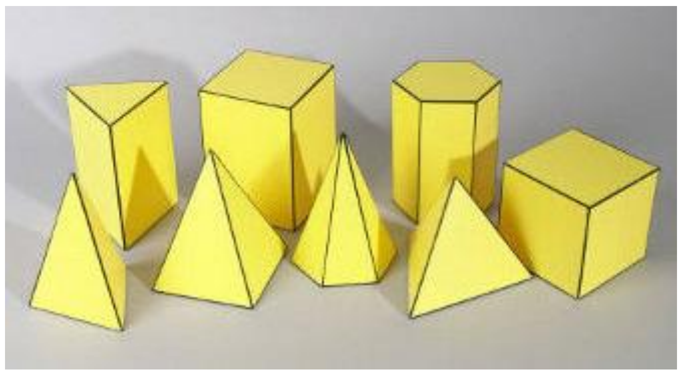
Graniastosłup pochyły to graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw.

Graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**. W graniastosłupie prawidłowym ściany boczne są figurami przystającymi.
Graniastosłup prosty, którego podstawy są prostokątami nazywamy **prostopadłościanem**

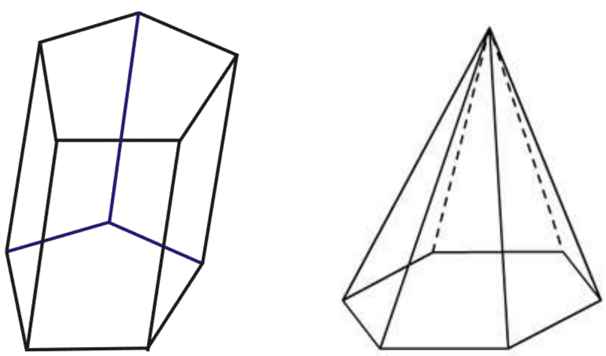
Zadanie 1. Określ czy figura jest wielościanem

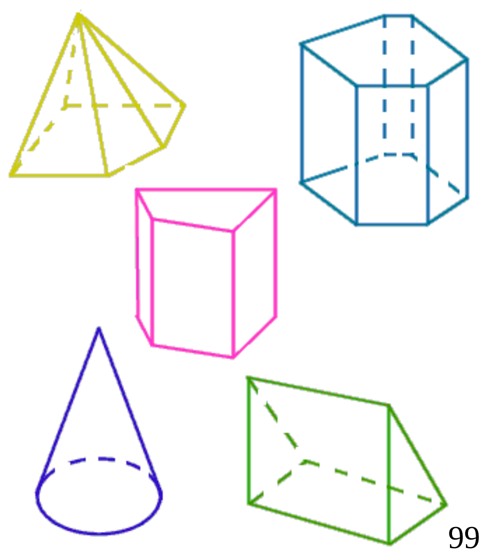
Zadanie 2. Wskaż graniastosłupy i nazwij je



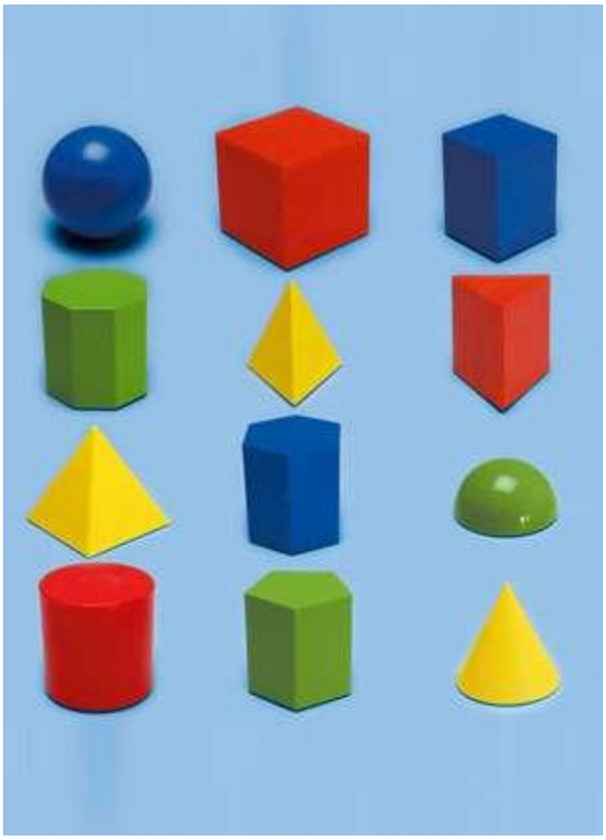


Zadanie 3. Wskaż graniastosłupy proste





Zadanie 4. Wskaż graniastosłupy prawidłowe na zdjęciu obok.



Zadanie 5. Uzupełnij opisy

Wielościan – ściany są ………………………………..

Graniastosłup – podstawy są ……………………………..…… leżą ………………..…...………………..., a ściany boczne są ……………………………...

Graniastosłup prosty – graniastosłup, którego boczne krawędzie są …………………………...... do podstaw

Graniastosłup prawidłowy – graniastosłup prosty, którego podstawy są ……………………………………………………

Zadanie 6. Narysuj

a) graniastosłup prawidłowy trójkątny,

b) graniastosłup prawidłowy czworokątny,

c) graniastosłup pochyły,

d) wielościan, który nie jest graniastosłupem.

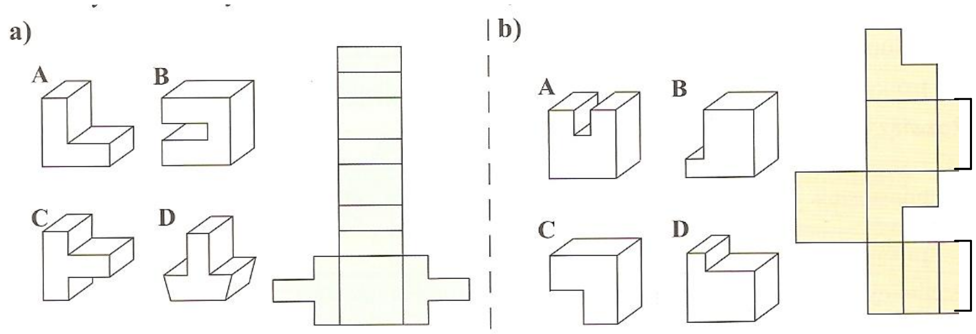
Zadanie 7. Uzupełnij tabelę

nazwa	Liczba ścian	Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi
Graniastosłup prawidłowy trójkątny			
Graniastosłup prosty czworokątny			
Graniastosłup prosty sześciokątny			
Graniastosłup prawidłowy ośmiokątny			

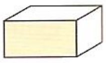
Zadanie 8. Uzupełnij tabelę

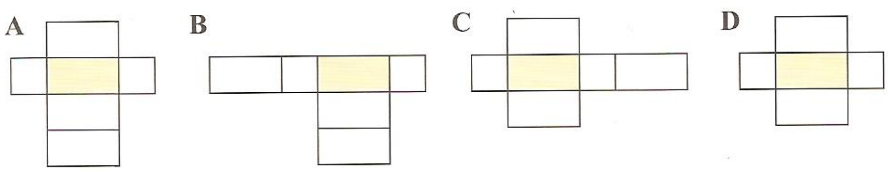
Wielokąt w podstawie	Liczba ścian	Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi
			33
	18		
		52	
9-kąt			
	22		
			42
		90	
15-kąt			

Zadanie 9. Z brył oznaczonych literami A, B, C, D wybierz tę, której siatkę zamieszczono obok.



Zadanie 10. Która z siatek, oznaczonych literami A, B, C i D, może być siatką prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok?





Zadanie 11. Ile ścian bocznych ma graniastosłup o 100 wierzchołkach?

Zadanie 12. Czy graniastosłup może mieć 20 krawędzi?

Zadanie 13. Oblicz, ile ścian ma graniastosłup, w którym:

a) Liczba wierzchołków jest o 7 mniejsza od liczby krawędzi
b) Liczba ścian jest o 8 mniejsza od liczby wierzchołków
c) Liczba krawędzi jest dwa razy większa niż liczba ścian.

Zadanie 14. Czy istnieje graniastosłup, w którym liczba przekątnych jest równa liczbie wierzchołków?

Zadanie 15. Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 144. Krawędź boczna tego graniastosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz długość krawędzi bocznej i krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Zadanie 16. Czy istnieje graniastosłup, który nie ma przekątnych?

Zadanie 17. Czy w graniastosłupie prawidłowym wszystkie przekątne mają taką samą długość?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Graniastosłup, który ma 22 ściany, ma wierzchołków:

A. 42 B. 22 C. 40 D. 20

Zadanie 2. Graniastosłup, który ma 18 ścian, ma wierzchołków:

A. 36 B. 32 C. 30 D. 32

Zadanie 3. Liczba ścian graniastosłupa, który ma 14 wierzchołków, jest równa:

A. 7 B. 5 C. 9 D. 11

Zadanie 4. Liczba ścian graniastosłupa, który ma 16 wierzchołków, jest równa:

A. 12 B. 10 C. 9 D. 8

Zadanie 5. Liczba ścian graniastosłupa, który ma 20 wierzchołków, jest równa:

A. 12 B. 10 C. 5 D. 8

Zadanie 6. Która z podanych liczb nie może być liczbą krawędzi graniastosłupa?

A.120 B.136 C.108 D.213

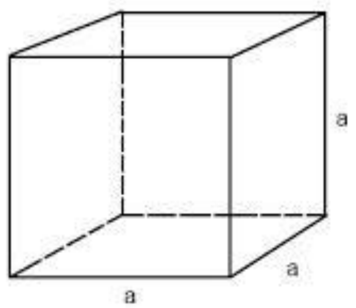
Temat: ODCINKI W GRANIASTOSŁUPACH I KĄTY MIĘDZY TYMI ODCINKAMI. KĄTY W GRANIASTOSŁUPIE

Zadanie 1. Zaznacz na rysunku kąty α, β i γ, gdzie:

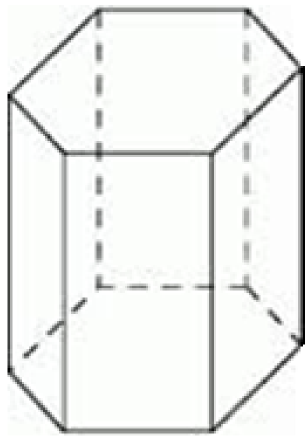
$\alpha -$ *kąt między przekątnymi ścian bocznych, wychodzącymi z tego samego wierzchołka*

$\beta -$ *kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy*

$\gamma -$ *kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią podstawy*

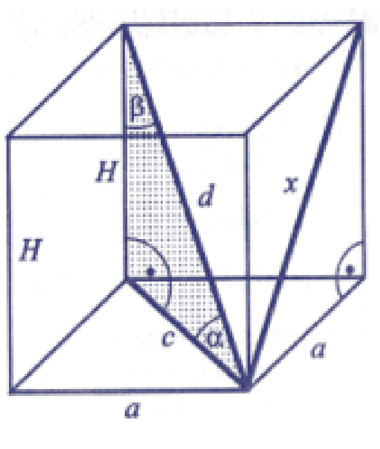


a)

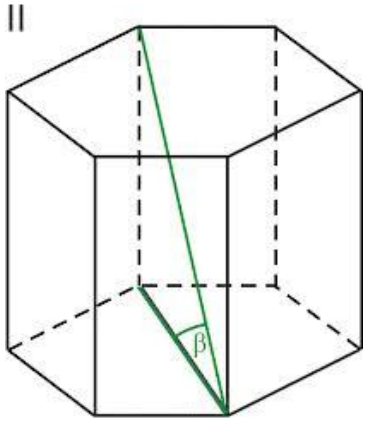


b)

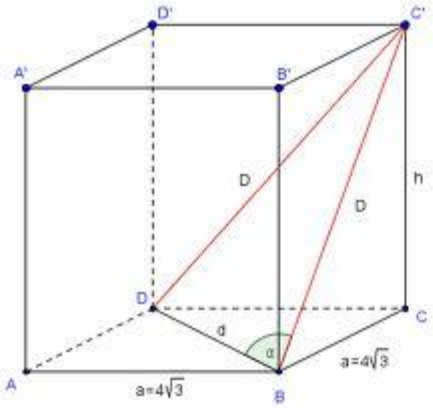
Zadanie 2. Nazwij kąty zaznaczone na rysunku:

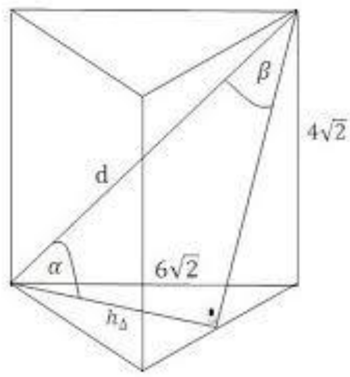


II



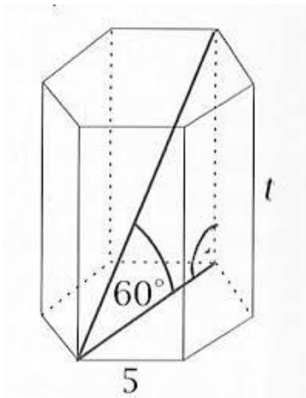
Zadanie 3. Przedstawione na rysunku graniastosłupy są prawidłowe. Oblicz miary zaznaczonych kątów.



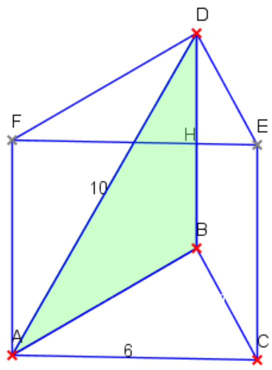


Zadanie 4. Oblicz długości odcinków zaznaczonych na rysunku:

a)



b)



Zadanie 5. Wykaż, że długość *d* przekątnej sześcianu o krawędzi *a* określona jest wzorem $d = a\sqrt{3}$.

Zadanie 6. Oblicz długość przekątnej sześcianu o boku długości 12.

Zadanie 7. Oblicz tangens kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 8. W prostopadłościanie o podstawie kwadratowej przekątna ma długość $6\sqrt{3}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60^0. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu.

Zadanie 9. Wykaz, że długość *d* przekątnej prostopadłościanu o krawędziach *a, b, c* określona jest wzorem $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Zadanie 10. W graniastosłupie, którego podstawą jest kwadrat o boku $\sqrt{2}$, tangens kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy wynosi 3. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

Zadanie 11. Oblicz miarę kąta, który tworzy przekątna sześcianu ze ścianą boczną.

Zadanie 12. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma wysokość $\sqrt{6}$ cm i krawędź podstawy długości $\sqrt{3}$ cm. Wyznacz miarę kąta między najdłuższą przekątną graniastosłupa i przekątną ściany bocznej, wychodzącymi z jednego wierzchołka.

Zadanie 13. W prostopadłościanie o podstawie kwadratowej przekątna ściany bocznej ma długość $\sqrt{6}$, a krawędź podstawy ma długość 3. Oblicz miarę kąta między przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy prostopadłościanu.

Zadanie 14. Zaznacz kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka sześcianu. Oblicz miarę tego kąta.

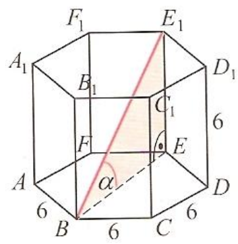
Zadanie 15. Zaznacz kąt między przekątną prostopadłościanu o podstawie kwadratu a przekątną ściany bocznej. Wyznacz miarę tego kąta, wiedząc że wysokość prostopadłościanu jest równa $2\sqrt{3}$, a jego przekątna ma długość $2\sqrt{6}$.

Zadanie 16. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma wysokość $\sqrt{6}$ cm i krawędź podstawy długości $\sqrt{3}$ cm. Wyznacz miarę kąta między przekątnymi ścian bocznych, wychodzącymi z jednego wierzchołka.

Zadanie 17. W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna graniastosłupa ma długość 30 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze $60°$. Oblicz długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa.

Zadanie 18. Krawędź boczna prawidłowego graniastosłupa trójkątnego jest 6 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

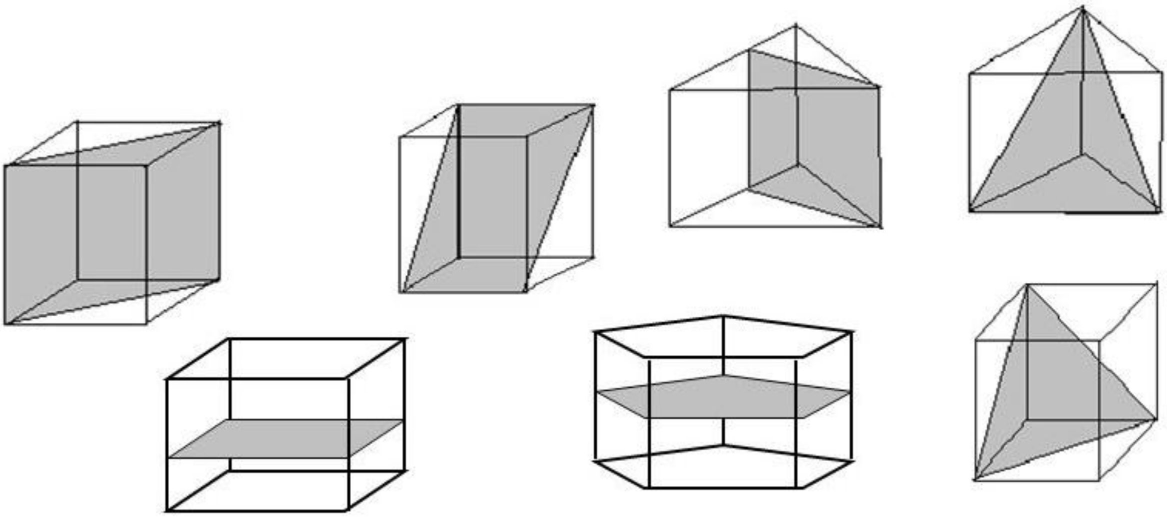
Zadanie 19. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wszystkie krawędzie mają długość 6 cm.



a) Oblicz długość najdłuższej przekątnej tego graniastosłupa.
b) Oblicz tangens kąta, jaki tworzy najdłuższa przekątna tego graniastosłupa z najdłuższą przekątną jego podstawy.

Temat: PRZEKROJE GRANIASTOSŁUPA

Przykłady przekrojów graniastosłupów



Zadanie 1. Dany jest sześcian o krawędzi długości a = 2 cm.

a) Narysuj ten sześcian (rzut równoległy) tak, aby przekrój przekątny był naturalnej wielkości.
b) Oblicz pole tego przekroju.

Zadanie 2. W sześcianie ABCDA'B'C'D' oznaczono środki boków AA', A'B', B'C', C'C, CD, DA odpowiednio literami E, F, G, H, I, J. Jakim wielokątem jest przekrój sześcianu płaszczyzną wyznaczoną tymi punktami? Narysuj sześcian i zaznacz na nim ten przekrój. Oblicz pole tego przekroju, jeżeli krawędź sześcianu wynosi $2\sqrt{3}$ cm.

Zadanie 3. Narysuj przekrój graniastosłupa trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez:

a) krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej
b) Krawędź podstawy i środki dwóch krawędzi przeciwległej podstawy
c) Krawędź boczną i wysokość podstawy

Zadanie 4. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy a = 8 cm oraz długość krawędzi bocznej k = 22 cm.

a) Narysuj ten graniastosłup (rzut równoległy) tak, aby przekrój płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i jedną z wysokości podstawy był naturalnej wielkości.
b) Oblicz pole tego przekroju.

Zadanie 5. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątna ma długość a = 3 cm, a przeciwprostokątna c = 5 cm. Wysokość graniastosłupa ma długość h = $3\sqrt{2}$ cm. Graniastosłup przecięto płaszczyzną prostopadłą do podstawy i zawierającą wysokość tej podstawy poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 6. Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 1 i wysokości 12cm przecięto płaszczyzną, która tworzy kąt 45^0 z płaszczyzną podstawy, tworząc w ten sposób przekrój poprzeczny. Oblicz pole tego przekroju.

Zadanie 7. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym zaznacz w dolnej podstawie najdłuższą przekątną d i w górnej podstawie najdłuższą przekątną d' równoległą do d. Wyznacz przekrój graniastosłupa płaszczyzną zawierającą te przekątne. Oblicz pole tego przekroju, jeżeli wysokość graniastosłupa wynosi 12cm, a krawędź podstawy 6cm.

Temat: POLE POWIERZCHNI I OBJĘTOŚĆ GRANIASTOSŁUPA

Sumę wszystkich ścian bocznych graniastosłupa nazywamy **powierzchnią boczną graniastosłupa**. Sumę powierzchni bocznej i obu podstaw graniastosłupa nazywamy **powierzchnią całkowitą graniastosłupa**.

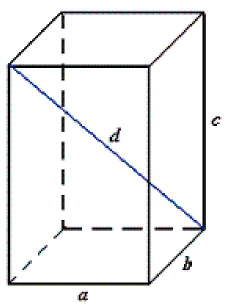
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa o polu podstawy P_p i polu powierzchni bocznej P_b jest równe:

$$P_c = P_b + 2P_p$$

Objętość graniastosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H jest równa

$$V = P_p \cdot H$$

Graniastosłup prosty, którego podstawy są prostokątami nazywamy **prostopadłościanem**



a, *b* - krawędzie podstawy

c - krawędź boczna,

d - przekątna prostopadłościanu

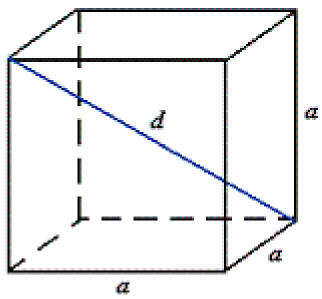
Prostopadłościan ma trzy wymiary: długość, szerokość i wysokość (a, b, c). Każdy prostopadłościan ma 6 ścian (4 ściany boczne i 2 podstawy), 8 wierzchołków i 12 krawędzi.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu: $P_c = 2ab + 2bc + 2ac$
Objętość prostopadłościanu: $V = abc$
Długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a, b i c :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

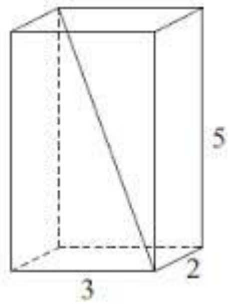
Prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami nazywamy **sześcianem**.

a - krawędź sześcianu, d - przekątna sześcianu



Sześcian jest szczególnym przypadkiem prostopadłościanu.
Pole powierzchni całkowitej: $P_c = 6a^2$
Objętość sześcianu: $V = a^3$
Długość przekątnej sześcianu: $d = a\sqrt{3}$

Zadanie 1. Oblicz pole powierzchni i objętość sześciennego pudełka o boku długości 4cm.
Zadanie 2. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu, którego:
a) przekątna ściany ma długość $7\sqrt{2}$,
b) przekątna ma długość $5\sqrt{3}$.
Zadanie 3. Przekątna boku sześcianu ma długość 8. Oblicz objętość tego sześcianu.
Zadanie 4. Pole powierzchni całkowitej sześcianu wynosi 18. Oblicz objętość tego sześcianu.
Zadanie 5. W sześcianie długość każdej krawędzi zmniejszono dwukrotnie. Jak i ile razy zmieniła się objętość sześcianu?



Zadanie 6. Oblicz objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.

Zadanie 7. Oblicz pole powierzchni całkowitej, objętość i długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach mających długości 3 cm, 4 cm i 5 cm.

Zadanie 8. Oblicz pole powierzchni i objętość prostopadłościanu o bokach podstawy 3 i 4 oraz przekątnej prostopadłościanu długości 10.

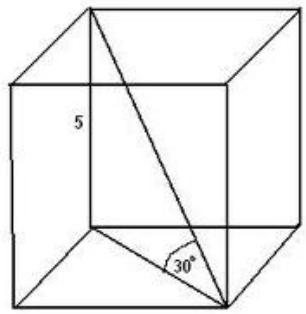
Zadanie 9. Objętość prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi 128. Jaka jest długość krawędzi podstawy tego prostopadłościanu, jeżeli jego wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy?

Zadanie 10. Wyznacz długości krawędzi prostopadłościanu prawidłowego czworokątnego, którego objętość wynosi 100 cm^3, a pole powierzchni bocznej równe jest 80 cm^2.

Zadanie 11. W prostopadłościanie jedna z krawędzi ma długość 10 cm, a stosunek dwóch pozostałych krawędzi wynosi 2:4. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu, wiedząc, że jego objętość jest równa 320 cm^3.

Zadanie 12. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu o wspólnym wierzchołku wynosi 1:2:3. Jakie wymiary ma ten prostopadłościan, jeżeli jego objętość jest równa 48?

Zadanie 13. Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku obok.



Zadanie 14. Wyznacz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli przekątna graniastosłupa ma długość 10cm, a przekątna podstawy 8cm.

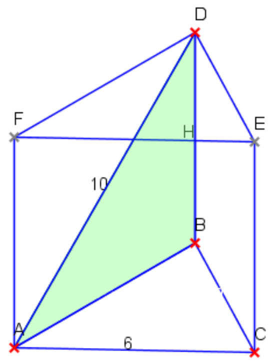
Zadanie 15. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, gdy jego przekątna podstawy ma długość 2 cm, a krawędź boczna ma długość 4 cm.

Zadanie 16. Oblicz objętość graniastosłupa czworokątnego prawidłowego, jeżeli jego pole powierzchni całkowitej wynosi 363,3 cm^2, a krawędź podstawy 105 mm.

Zadanie 17. Oblicz objętość i pole graniastosłupa czworokątnego prawidłowego, jeżeli przekątna graniastosłupa długości 6 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$.

Zadanie 18. Oblicz objętość graniastosłupa czworokątnego prawidłowego, w którym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$.

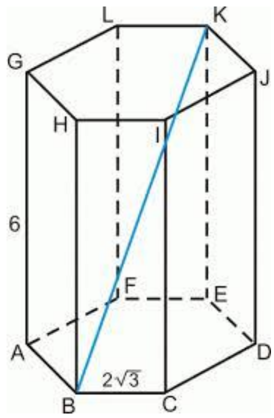
Zadanie 19. Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego przedstawionego na rysunku obok.



Zadanie 20. Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest kwadratem o boku długości 8. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 21. Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest kwadratem o boku długości 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Zadanie 22. Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego przedstawionego na rysunku obok.



Zadanie 23. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o boku podstawy 3 i kącie nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy równym 60°.

Zadanie 24. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 24cm i kącie ostrym 60^0. Dłuższa przekątna graniastosłupa nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 30^0. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 25. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o bokach długości 20, 10, 8, 10. Przekątna tego trapezu jest 4 razy krótsza od przekątnej graniastosłupa. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 26. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku mającym długość 12 cm i kącie ostrym o mierze 42°. Przekątna ściany bocznej bryły ma długość 20 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa. Wynik zaokrąglij do 1 cm^2 i 1 cm^3.

Zadanie 27. Zbudowano wał o długości 1 km, którego przekrój jest trapezem równoramiennym o podstawach długości 6 m i 2 m oraz kącie nachylenia ramienia do dłuższej podstawy o mierze 52°. Oblicz objętość ziemi, z jakiej zbudowano ten wał. Wynik zaokrąglij do 1 m^3.

Zadanie 28. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o bokach długości 5 i 4 oraz kącie ostrym o mierze 60°. Wysokość *h* graniastosłupa ma długość równą 3. Narysuj siatkę tego graniastosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

Zadanie 29. W graniastosłupie pochyłym wszystkie krawędzie mają taką samą długość. Objętość graniastosłupa jest równa $108\sqrt{3}$, a jego wysokość ma długość $3\sqrt{3}$. W podstawie tego graniastosłupa jest kwadrat i dwie przeciwległe ściany boczne nachylone są do płaszczyzny podstawy pod kątem α.

a) Oblicz miarę kata α.
b) Podaj, jakimi czworokątami są ściany boczne tego graniastosłupa.

Zadanie 30. Objętość graniastosłupa pochyłego jest równa $32\sqrt{2}$, a jego wysokość ma długość $2\sqrt{2}$. Wiedząc, że jego podstawą jest kwadrat i dwie ściany boczne są kwadratami, oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – GRANIASTOSŁUPY

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ wyznaczać liczbę krawędzi, ścian i wierzchołków graniastosłupa mając podaną jedną z nich lub nazwę graniastosłupa
- ✓ rozpoznawać graniastosłupy prawidłowe
- ✓ rozpoznawać w graniastosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) i obliczać miary tych kątów
- ✓ rozpoznawać w graniastosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (np. między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami) i obliczać miary tych kątów
- ✓ stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Objętość tego sześcianu jest równa:

A.27 B. 81 C. 243 D. 729

Zadanie 2. Przekątna sześcianu ma długość 3. Objętość tego sześcianu jest równa:

A. 27 B. $3\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{27\sqrt{2}}{4}$

Zadanie 3. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu jest równy 2:3:4. Pole powierzchni prostopadłościanu wynosi:

A. 4cm B. 2cm C. 1cm D. 0,5cm

Zadanie 4. Objętość sześcianu jest równa $2\sqrt{2}$. Pole powierzchni tego sześcianu wynosi:

A. 2 B. 12 C. $16\sqrt{2}$ D. 24

Zadanie 5. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4. Przekątna graniastosłupa tworzy z podstawą kąt o mierze 45° Wskaż objętość graniastosłupa.

A. 64 B. $64\sqrt{2}$ C. 128 D. $48\sqrt{2}$

Zadanie 6. Pewien wielościan ma 15 krawędzi i 10 wierzchołków. Liczba jego ścian jest równa:

A. 5 B. 7 C. 10 D. 17

Zadanie 7. Graniastosłup ma 36 krawędzi. Podstawą graniastosłupa jest:

A. szesnastokąt B. dwudziestokąt C. dziesięciokąt D. dwunastokąt

Zadanie 8. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o obwodzie 20cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 10cm. Suma długości krawędzi tego graniastosłupa jest równa:

A. 60cm B. 40cm C. 80cm D. 120cm

Zadanie 9. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o wysokości h = 4 i przekątnej podstawy d = 4. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem α, takim że:

A. $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $tg\alpha = \sqrt{2}$ C. $tg\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 10. Przekątna sześcianu o krawędzi a ma długość:

A. 2a B. 3a C. a$\sqrt{3}$ D. a$\sqrt{2}$

Zadanie 11. Podstawa prostopadłościanu jest kwadratem o polu 9. Objętość prostopadłościanu jest równa 45. Przekątna ściany bocznej prostopadłościanu tworzy z podstawą prostopadłościanu kąt α, taki że:

A. $tg\alpha = \frac{5}{3}$ B. $tg\alpha = \frac{3}{5}$ C. $tg\alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$ D. $tg\alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

Zadanie 12. Przekątna ściany sześcianu ma długość 4. Powierzchnia całkowita tego sześcianu jest równa:

A. 192 B. 96$\sqrt{2}$ C. 48 D. 24$\sqrt{2}$

Zadanie 13. Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 60. Suma pól wszystkich ścian tego sześcianu jest równa:

A. 125 B. 600 C. 150 D. 900

Zadanie14. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $\sqrt{6}$. Przekątna tego graniastosłupa tworzy z płaszczyzna podstawy kąt o mierze 60°. Wysokość tego graniastosłupa ma długość:

A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 6

Zadanie 15. Przekątna ściany sześcianu ma długość 6. Przekątna tego sześcianu ma długość:

A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{6}$ D. $4\sqrt{6}$

Zadanie 16. Przekątna prostopadłościanu o wymiarach 3 x 4 x 5 ma długość:

A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{15}$

Zadanie 17. Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 24. Objętość tego sześcianu jest równa:

A. 64 B. 27 C. 24 D. 8

Zadanie 18. Przekątna sześcianu ma długość 3. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe:

A. 54 B. 36 C. 18 D. 12

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wszystkie krawędzie mają długość 4 cm.

a) Oblicz długość najkrótszej przekątnej tego graniastosłupa.
b) Oblicz tangens kąta, jaki tworzy najkrótsza przekątna tego graniastosłupa z najkrótszą przekątną jego podstawy.

Zadanie 2. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wszystkie krawędzie mają długość 10. Oblicz miarę kąta nachylenia krótszej przekątnej a następnie dłuższej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Zadanie 3. Długości krawędzi prostopadłościanu są kolejnymi liczbami naturalnymi. Przekątna prostopadłościanu ma długość $5\sqrt{2}$ cm.

a) Oblicz długości krawędzi prostopadłościanu.

b) Oblicz miarę kąta nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany o najmniejszym polu.

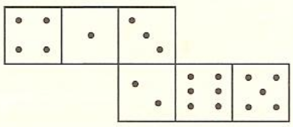
Zadanie 4. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego przekątne mają długości 4 i 8. Przekątne te przecinają się pod kątem o mierze α. Krótsza przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego płaszczyzną podstawy kąt o mierze β.

a) Wyraz objętość *V* tego graniastosłupa w zależności od funkcji trygonometrycznych kątów a i β.

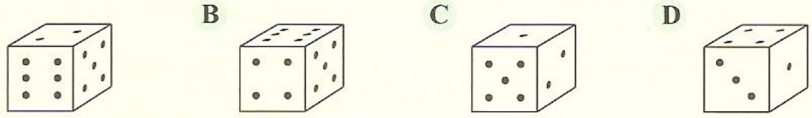
b) Oblicz objętość *V* graniastosłupa, gdy a = 70° i β = 40°. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

BAZA ZADAŃ

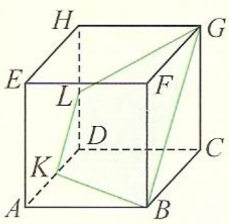
1. Na rysunku przedstawiono siatkę sześcianu. Który z poniższych sześcianów możesz otrzymać, składając tę siatkę?



A **B** **C** **D**



2. W sześcianie *ABCDEFGH* połączono środki krawędzi *AD* i *HD* z przekątną *BG* ściany *BCGF* i otrzymano czworokąt *KBGL* (rysunek obok). Czworokąt *KBGL* jest:

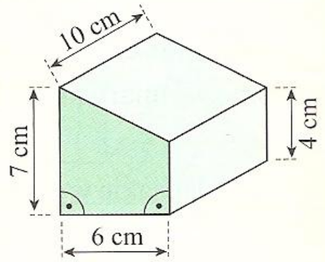


A) równoległobokiem, **B)** deltoidem,

C) trapezem prostokątnym,

D) trapezem równoramiennym, który nie jest równoległobokiem.

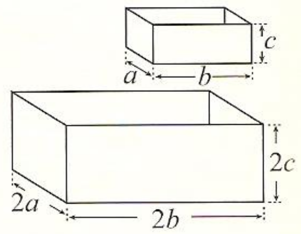
3. Objętość graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku jest równa:



A) $330\ \text{cm}^3$, **B)** $350\sqrt{5}\ \text{cm}^3$,

C) $660\ \text{cm}^3$, **D)** $700\sqrt{5}\ \text{cm}^3$.

4. Napełnianie naczynia w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ trwa 1 godzinę i 15 minut. Czas potrzebny do napełnienia naczynia w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $2a \times 2b \times 2c$ to:



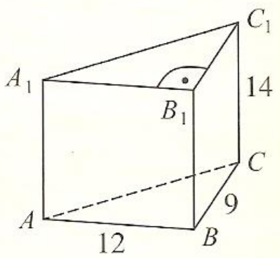
A) 2 godziny i 30 minut, **B)** 5 godzin,

C) 10 godzin, **D)** 20 godzin.

5. W prostopadłościanie przekątna d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Zatem wysokość tego prostopadłościanu ma długość równą:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}d$, **B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}d$, **C)** $\frac{1}{2}d$, **D)** $\frac{1}{3}d$.

6. Na rysunku podano wymiary graniastosłupa prostego trójkątnego. Zatem jego objętość jest równa:

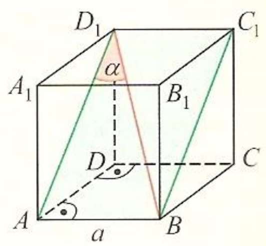


A) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$, **B)** $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$,

C) 380, **D)** $2^2 \cdot 3^3 \cdot 14$.

7. Na rysunku przedstawiony jest sześcian o krawędzi a.

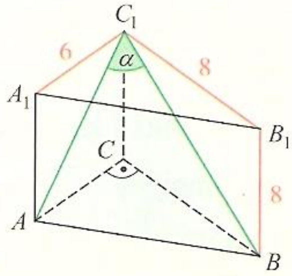
Czy $\alpha = 60°$?



Wybierz odpowiedź T (tak) lub N (nie) i jej odpowiednie uzasadnienie spośród A i B.

T	ponieważ	**A**	$\lvert AD_1\rvert = a\sqrt{2}$, $\lvert BD_1\rvert = a\sqrt{3}$ i $\lvert\sphericalangle D_1AB\rvert = 90°$, więc $\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
N		**B**	$\lvert AB\rvert = a$, $\lvert AD_1\rvert = a\sqrt{2}$ i $\lvert\sphericalangle D_1AB\rvert = 90°$, więc $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

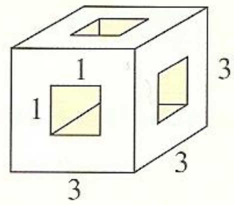
8. Na rysunku przedstawiony jest graniastosłup prosty. Zatem:



A) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$, **B)** $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$,

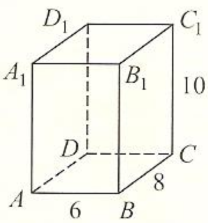
C) $\cos\alpha = 0,6$, **D)** $\cos\alpha = 0,8$.

9. W sześcianie o krawędzi mającej długość 3 cm wydrążono trzy tunele o przekroju kwadratu, którego bok ma długość 1 cm (rysunek obok). Zatem liczba sześcianów o krawędzi 1 cm wyjętych z sześcianu o krawędzi 3 cm jest równa:



A) 6, **B)** 7, **C)** 8, **D)** 9.

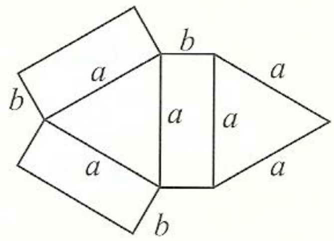
10. Na rysunku przedstawiony jest prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 10$.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Przekątna prostopadłościanu tworzy z płaszczyzną podstawy taki kąt α, że $\operatorname{tg}\alpha = 1$.	**P**	**F**
Jeżeli prostopadłościan przetnie się płaszczyzną wyznaczoną przez równoległe przekątne jego podstaw, to pole otrzymanego przekroju jest równe 100.	**P**	**F**
Przekątne prostopadłościanu poprowadzone z wierzchołków B i D przecinają się pod kątem prostym.	**P**	**F**
Przekątne prostopadłościanu poprowadzone z wierzchołków A i B nie przecinają się pod kątem prostym.	**P**	**F**

11. Na rysunku przedstawiono siatkę bryły.



a) Opisz tę bryłę.

b) Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły, wiedząc, że długości krawędzi a i b są odpowiednio równe 8 i 3.

12. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku mającym długość 10. Odcinek łączący punkt przecięcia przekątnych jednej z podstaw z wierzchołkiem drugiej podstawy prostopadłościanu tworzy z krawędzią boczną kąt 30°. Uzasadnij, że objętość tego prostopadłościanu jest liczbą większą niż 2^{10}.

Temat: ODCINKI I KĄTY W OSTROSŁUPIE

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ściana, zwana podstawą ostrosłupa, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane ścianami bocznymi ostrosłupa, są trójkątami o wspólnym wierzchołku. Wspólny wierzchołek ścian bocznych ostrosłupa nazywamy **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Rzut prostokątny wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy nazywamy **spodkiem wysokości ostrosłupa**.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa ze spodkiem wysokości ostrosłupa.

Ostrosłup, którego podstawa jest n- kątem nazywamy **ostrosłupem n-kątnym.**

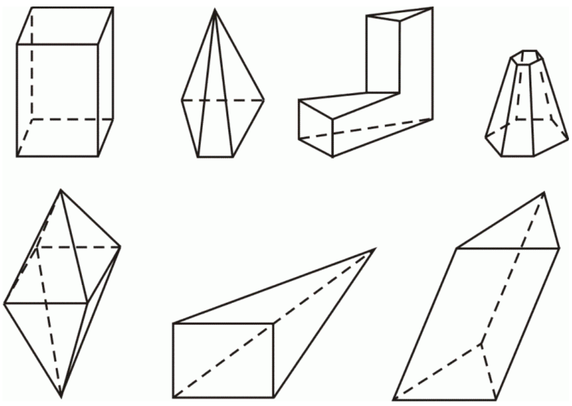
Ostrosłup n-kątny ma:

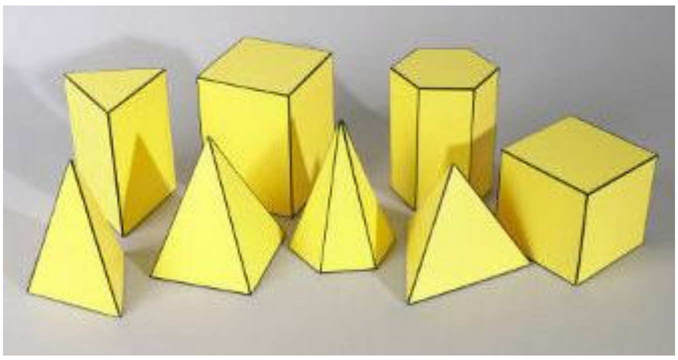
- n+1 wierzchołków
- 2n krawędzi
- n+1 ścian.

Ostrosłup nazywamy **ostrosłupem prawidłowym**, gdy jego podstawą jest wielokąt foremny i spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Jeżeli ostrosłup jest prawidłowy, to wszystkie jego krawędzie boczne są równe, wszystkie kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy mają równe miary, wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Zadanie 1. Wskaż ostrosłupy





Zadanie 2. Uzupełnij zdania:

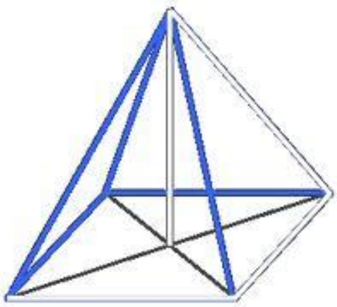
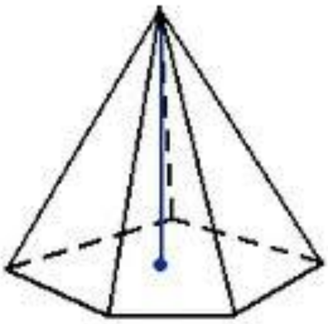
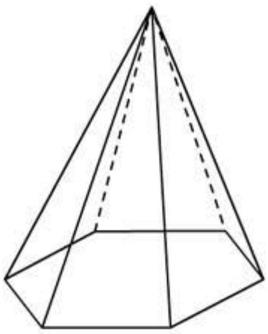
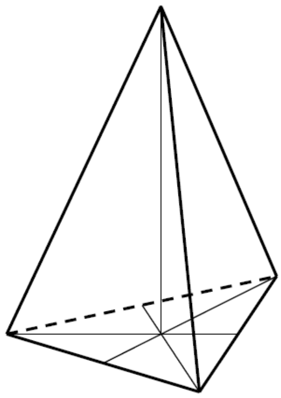
Ostrosłup to wielościan, którego jednak ściana zwana podstawą jest dowolnym …………………..…... a pozostałe ściany nazywane bocznymi są ………………………

Ostrosłup nazywamy prawidłowym jeśli jego podstawą jest wielokąt ……………..…………

Uwaga!

1. *Kątem płaskim przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego nazywamy kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego ścianą boczną.*
2. *Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi nazywamy czworościanem foremnym*

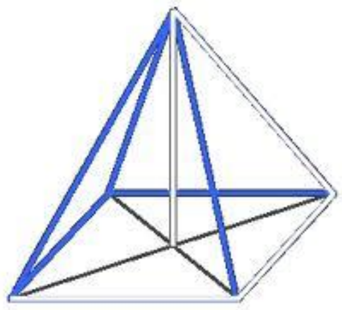
Zadanie 3. Zaznacz kąty płaskie w ostrosłupach

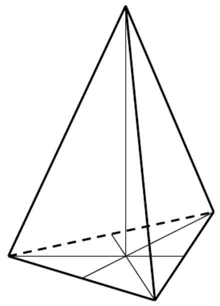





Zadanie 4. Uzupełnij tabelę

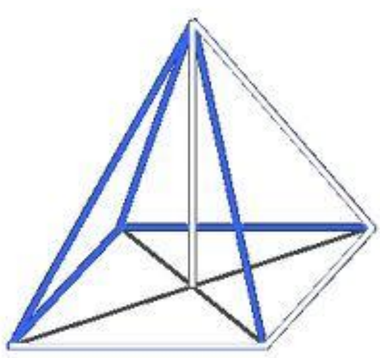
Nazwa	Liczba ścian	Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi
Czworościan			
Ostrosłup czworokątny			
Ostrosłup dziesięciokątny			
Ostrosłup dwunastokątny			
	15		
		22	
			94
		19	

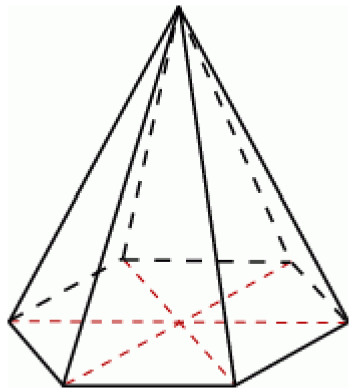
Zadanie 5. Narysuj siatkę ostrosłupów.

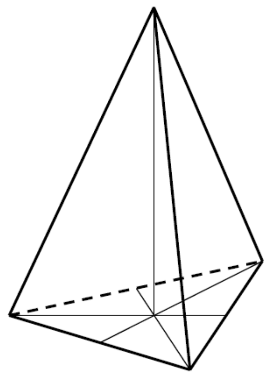




Zadanie 6. W ostrosłupie wskaż lub narysuj jego wysokość, wysokość ściany bocznej, przekątną podstawy.

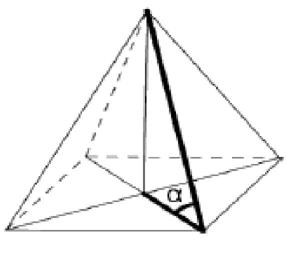




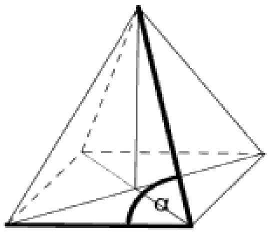


Zadanie 7. Nazwij kąty zaznaczone na rysunkach.

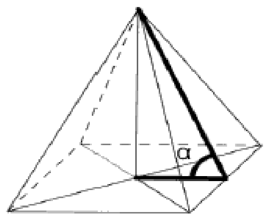
A.



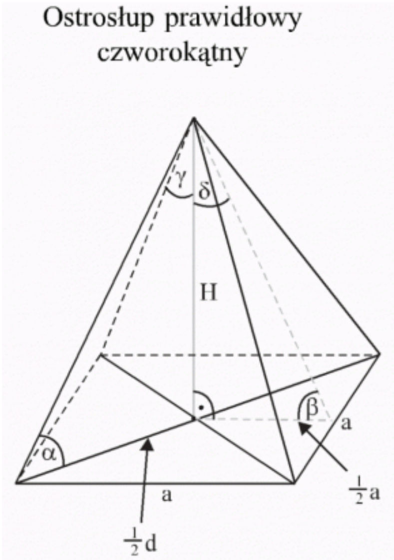
B.



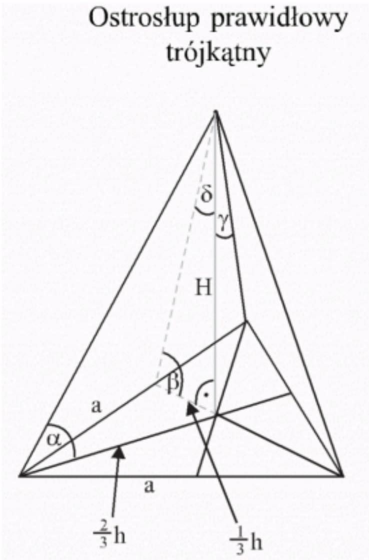
C.



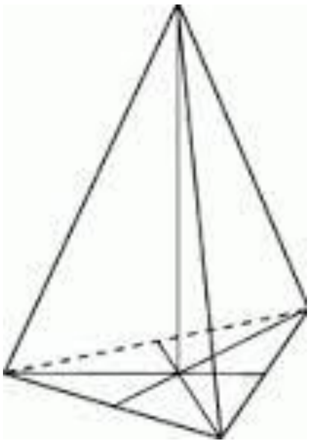
D.



E.



Zadanie 8. Zaznacz na rysunku ostrosłupa prawidłowego trójkątnego:

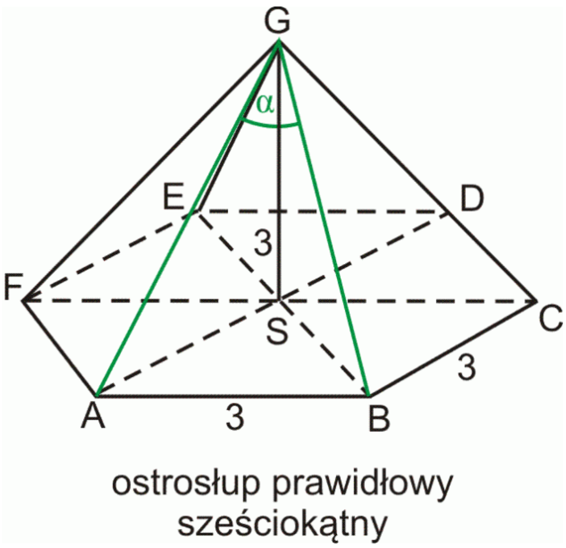


a) α - kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

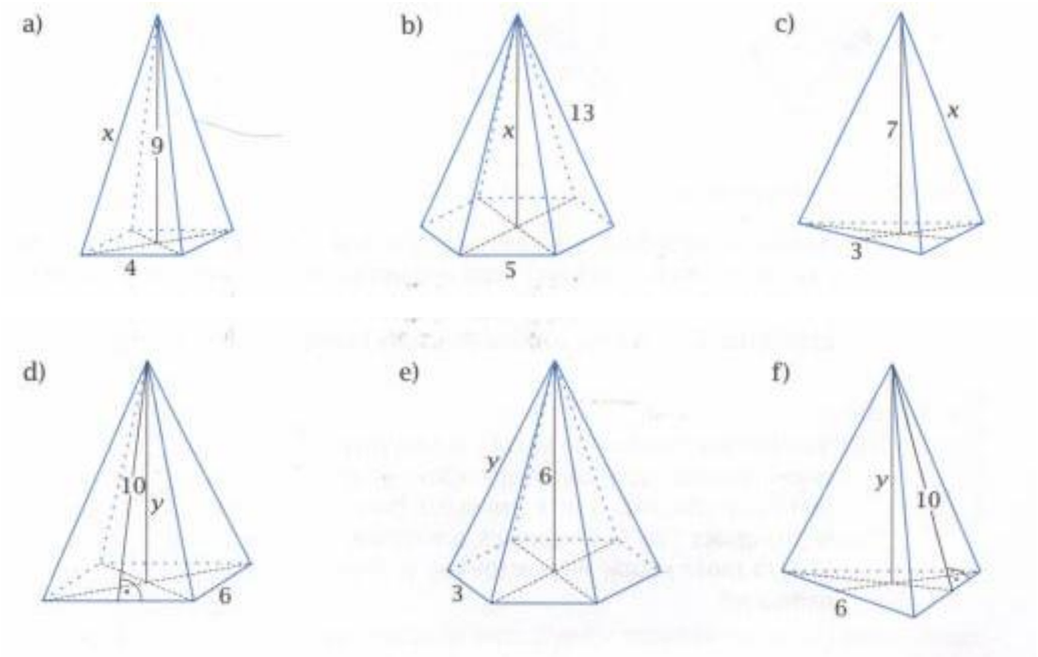
b) β - kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,

c) γ- kąt między ścianami bocznymi.

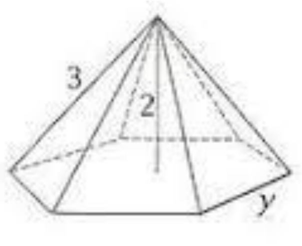
Zadanie 9. Oblicz miarę kąta zaznaczonego na rysunku:

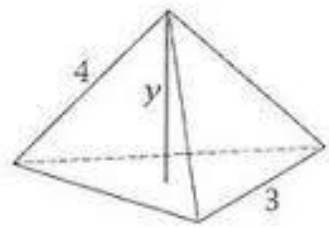


Zadanie 10. Oblicz długości odcinków x i odcinków y zaznaczonych na rysunku, wiedząc, że narysowane ostrosłupy są prawidłowe:



g) h)





Zadanie 11. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Oblicz kosinus kąta między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa.

Zadanie 12. W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym, długość krawędzi podstawy $a=\sqrt{2}$ cm, długość wysokości ostrosłupa H=3 cm. Oblicz:

a) długość wysokości ściany bocznej,
b) długość krawędzi bocznej oraz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 13. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość $2\sqrt{3}$. Oblicz pod jakim kątem krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 14. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość $5\sqrt{2}$. Oblicz pod jakim kątem krawędź boczna jest nachylona do krawędzi podstawy.

Zadanie 15. Długość wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa długości krawędzi podstawy. Wyznacz miarę kąta między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy ostrosłupa.

Zadanie 16. Długość wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa długości krawędzi podstawy. Wyznacz sinus kąta oraz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Zadanie 17. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 45^0. Krawędź podstawy ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie1. Ostrosłup ma 7 wierzchołków. Liczba jego ścian jest równa:

A. 6 B. 7 C. 11 D. 12

Zadanie 2. Ostrosłup ma 8 wierzchołków. Liczba jego ścian jest równa:

A. 6 B. 7 C. 8 D. 12

Zadanie 3. Ostrosłup ma 10 wierzchołków. Liczba jego ścian jest równa:

A. 8 B. 9 C. 10 D. 6

Zadanie 4. Ostrosłup, który ma 12 krawędzi, ma:

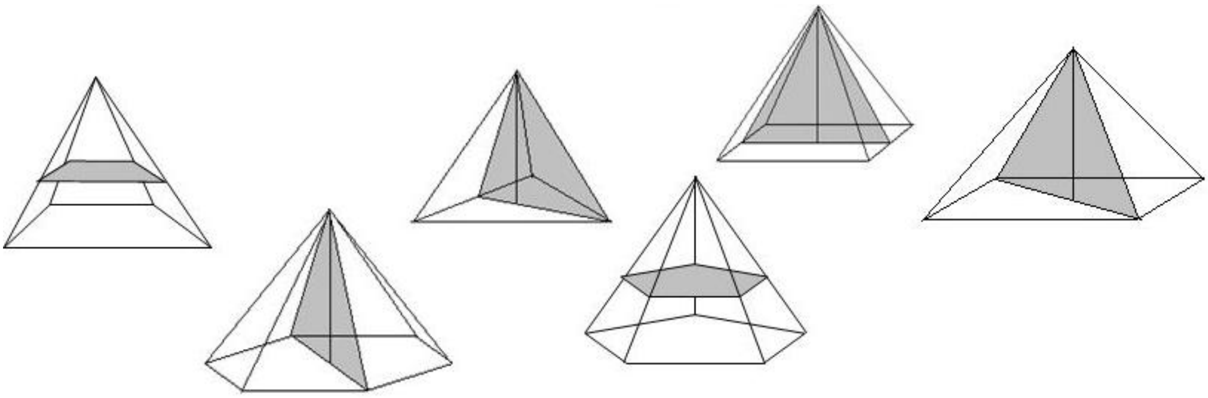
A. 6 ścian B. 7 ścian C. 8 ścian D. 9 ścian

Zadanie 5. Jeśli ostrosłup ma 50 krawędzi, to liczba jego ścian jest równa:

A. 50 B. 26 C. 25 D. 22

Temat: PRZEKROJE OSTROSŁUPA

Przykłady przekrojów ostrosłupów



Zadanie 1. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy a = 8 cm oraz długość krawędzi bocznej k = 16 cm.

a) Narysuj ten ostrosłup (rzut równoległy) tak, aby przekrój płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i jedną z wysokości podstawy był naturalnej wielkości.

b) Oblicz pole tego przekroju.

Zadanie 2. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym długość krawędzi podstawy a = 9 cm oraz długość krawędzi bocznej k = 18 cm.

a) Narysuj ten ostrosłup (rzut równoległy) tak, aby przekrój przekątny (płaszczyzną zawierającą wysokość ostrosłupa) był naturalnej wielkości.

b) Oblicz pole tego przekroju.

Zadanie 3. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6cm przecięto płaszczyzną prostopadłą do wysokości ostrosłupa poprowadzoną w połowie wysokości. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Wysokość ostrosłupa wynosi 10cm.

Zadanie 4. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 1, a krawędź boczna ma długość 2. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i prostopadłą do krawędzi bocznej.

Zadanie 5. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a krawędź podstawy 4. Jaki obwód ma przekrój tego ostrosłupa zawierający wysokość podstawy i przechodzący przez środek krawędzi bocznej?

Zadanie 6. Oblicz pole przekroju czworościanu foremnego o krawędzi długości 12cm, płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną tego czworościanu i wysokość podstawy.

Temat: POLE POWIERZCHNI I OBJĘTOŚĆ OSTROSŁUPA

Sumę wszystkich ścian bocznych ostrosłupa nazywamy **powierzchnią boczną graniastosłupa**. Sumę powierzchni bocznej i podstawy ostrosłupa nazywamy **powierzchnią całkowitą ostrosłupa**.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa o polu podstawy P_p i polu powierzchni bocznej P_b jest równe:

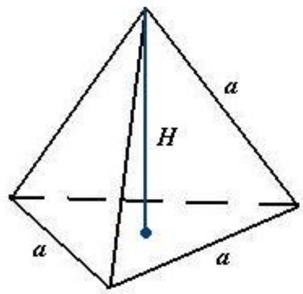
$$P_c = P_p + P_b$$

Objętość ostrosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H jest równa

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

Czworościan foremny

Czworościanem foremnym nazywamy ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.



H - wysokość czworościanu,

a - krawędź czworościanu

$P_c = a^2\sqrt{3}$

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot H$

Zadanie 1. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o boku długości 5.

Zadanie 2. Oblicz objętość czworościanu foremnego o boku długości 1.

Zadanie 3. Pole powierzchni czworościanu foremnego jest równe $9\sqrt{3}$ dm². Oblicz długość krawędzi tego czworościanu.

Zadanie 4. Pole powierzchni czworościanu foremnego jest równe $16\sqrt{3}cm^2$. Oblicz jego objętość.

Zadanie 5. Wyznacz objętość czworościanu foremnego o wysokości ściany bocznej $5\sqrt{3}$.

Zadanie 6. Stosunek długości krawędzi dwóch czworościanów foremnych jest równy 1 : 3. Oblicz stosunek powierzchni oraz stosunek objętości czworościanu o mniejszych wymiarach do czworościanu o wymiarach większych.

Zadanie 7. Objętość V_1 i V_2 wielościanów podobnych są odpowiednio równe: 512 cm^3 i 216 cm^3. Jaka jest skala podobieństwa tych wielościanów?

Zadanie 8. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość 2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie są równe. Suma ich długości wynosi 16m. Oblicz objętość i pole całkowite tego ostrosłupa.

Zadanie 10. Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $10\sqrt{2}$. Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 60^0. Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 11. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej ma długość h = 8 cm, a krawędź boczna ma długość l = 10 cm. Oblicz pole powierzchni tego ostrosłupa.

Zadanie 12. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przeciwległe krawędzie boczne są prostopadłe, a wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka ostrosłupa ma długość $3\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa

Zadanie 13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę $\alpha = 60°$, a krawędź podstawy ma długość $a = 12\sqrt{3}$ cm. Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa.

Zadanie 14. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30^0. Wysokość ostrosłupa wynosi 8. Oblicz objętość i powierzchnię całkowitą ostrosłupa.

Zadanie 15. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy wynosi $6\sqrt{2}$, a wysokość ściany bocznej 4. Oblicz objętość, pole powierzchni całkowitej i sumę wszystkich krawędzi ostrosłupa.

Zadanie 16. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym wysokość ma długość 8cm, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.

Zadanie 17. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ABCDS, trójkąt ACS jest równoboczny o polu równym $36\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 18. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ABCDS o podstawie ABCD, trójkąt ASC jest prostokątny, w którym |AS|=4. Oblicz:

a) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa
b) objętość
c) cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy (zrób rysunek i zaznacz na nim ten kąt)

Zadanie 19. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ABCDS, o podstawie ABCD, pole trójkąta równoramiennego ACS wynosi 96, a stosunek długości odcinków |AC|:|S.C|=12:10. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 20. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ma długość $4\sqrt{2}$, a krawędź podstawy 8. Oblicz:

a) długość wysokości ściany bocznej, której jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa,
b) miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 21. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, którego bok ma długość 6. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy, a przeciwległa jej krawędź jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod katem 60°.

a) Oblicz długości wszystkich krawędzi bocznych tego ostrosłupa.
b) Określ jakim trójkątem jest trójkąt *SBC*, a jakim *SDC*.

Zadanie 22. Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną zawierającą wysokość ostrosłupa i symetralną jego podstawy. Przekrój ma pole $25m^2$. Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli jego pole podstawy wynosi $6{,}25m^2$.

Zadanie 23. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach 8 cm i 6 cm. Każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 55°. Oblicz objętość ostrosłupa. Wynik zaokrąglij do 0,01 cm^3.

Zadanie 24. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat, którego przekątna ma długość $10\sqrt{2}$ cm. Wysokość ściany bocznej ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze 65°. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa. Wyniki zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 25. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego objętość wynosi 18. Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy 4. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Zadanie 26. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy równej 4cm. Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 27. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego pole podstawy jest równe $6\sqrt{3}$, a wysokość ostrosłupa jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy.

Zadanie 28. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $\sqrt{3}$. Krawędź boczna ostrosłupa jest dwukrotnie dłuższa od wysokości podstawy. Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 29. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy równej 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa.

Zadanie 30. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 12 i wysokości bocznej 20.

Zadanie 31. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o boku podstawy 3 cm i wysokości 4 cm.

Zadanie 32. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 45^0. Krawędź podstawy ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Zadanie 33. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi 42cm, a jego wysokość 252cm. Od tego ostrosłupa odcięto mniejszy ostrosłup płaszczyzną przechodzącą prostopadle do jego wysokości h w odległości $\frac{1}{2}$ h od wierzchołka. Oblicz objętość i obwód podstawy mniejszego ostrosłupa.

Zadanie 34. Wysokość ostrosłupa jest równa 10. Podstawą ostrosłupa jest deltoid o przekątnych równych 3 i 8. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – OSTROSŁUPY

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ wyznaczać liczbę krawędzi, ścian i wierzchołków ostrosłupa mając podaną jedną z nich lub nazwę ostrosłupa
- ✓ rozpoznawać ostrosłupy prawidłowe
- ✓ rozpoznawać w ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) i obliczać miary tych kątów
- ✓ rozpoznawać w ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (np. między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami) i obliczać miary tych kątów
- ✓ stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości ostrosłupa.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 2. Ściana boczna ostrosłupa tworzy z podstawą kąt α, taki że $tg\alpha = \frac{1}{3}$. Pole podstawy ostrosłupa jest równe:

A. 72 B. 36 C. 144 D. $\frac{16}{9}$

Zadanie 2. Na wykonanie szkieletowego modelu czworościanu foremnego zużyto w całości kawałek drutu o długości 24cm. Krawędź czworościanu ma długość:

A. 3cm B. 4cm C. 6cm D. 8cm

Zadanie 3. Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi a wyraża się wzorem $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o wysokości $2\sqrt{6}$ jest zatem równe:

A. $9\sqrt{3}$ B. $36\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

Zadanie 4. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat ABCD, zaś krawędź boczna SD jest jego wysokością. Wówczas:

A. dokładnie jedna ściana jest trójkątem prostokątnym
B. dokładnie dwie ściany są trójkątami prostokątnymi
C. dokładnie trzy ściany są trójkątami prostokątnymi
D. dokładnie cztery ściany są trójkątami prostokątnymi

Zadanie 5. Wysokość ostrosłupa jest równa 8. Podstawą ostrosłupa jest romb o przekątnych równych 6 i 4. Objętość tego ostrosłupa jest równa:

A. 16 B. 48 C. 96 D. 32

Zadanie 6. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Krawędź podstawy ma długość a = 6, zatem wysokość ostrosłupa jest równa:

A. 3 B. 1 C. 6 D. 2

Zadanie 7. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o wszystkich krawędziach równych 12. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

A. $4\sqrt{6}$ B. $\sqrt{6}$ C. $8\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

Zadanie 8. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Przekątna podstawy tego ostrosłupa jest równa 4, a wysokość 6. Objętość ostrosłupa jest równa:

A. 16 B. 32 C. 48 D. 192

Zadanie 9. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wszystkich krawędziach równych 8. Powierzchnia boczna tego ostrosłupa jest równa:

A. $4\sqrt{3}$ B. $64\sqrt{3}$ C. $32\sqrt{3}$ D. $16\sqrt{3}$

Zadanie 10. Ostrosłup, który ma 12 krawędzi, ma :

A. 6 ścian B. 7 ścian C. 8 ścian D. 9 ścian

Zadanie 11. Pewien ostrosłup ma 70 wierzchołków. Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

A. 138 B. 140 C. 69 D. 70.

Zadanie 12. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają jednakową długość 1. Objętość ostrosłupa wynosi:

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 0, 236 D. $\frac{1}{3}$.

Zadanie 13. Ostrosłup, który ma 6 krawędzi, ma:

A. 8 wierzchołków B. 6 wierzchołków C. 5 wierzchołkówD. 4 wierzchołki.

Zadanie 14. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości 9 przekątna podstawy ma długość 6. Objętość tego ostrosłupa jest równa:

A. $27\sqrt{2}$ B. 48 C. $36\sqrt{2}$ D. 54

Zadanie 15. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości a = 6cm tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Wysokość ostrosłupa ma długość:

A. $\sqrt{3}cm$ B. $3\sqrt{3}cm$ C. $2\sqrt{3}cm$ D. 9cm.

Zadanie 16. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy 4 i wysokości 12. Objętość tego ostrosłupa wynosi:

A. $16\sqrt{3}$ B. $32\sqrt{3}$ C. $48\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

Zadanie 17. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°, a wysokość bryły jest równa 4cm. Wysokość podstawy tego ostrosłupa jest równa:

A. 4cm B. 6cm C. 12cm D. $4\sqrt{2}$ cm.

Zadanie 18. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość wysokości H = 5. Miara kąta, jaki tworzy krawędź boczna tego ostrosłupa z płaszczyzna podstawy, jest równa 45°. Pole podstawy ostrosłupa wynosi:

A. 10 B. 25 C. 50 D. $50\sqrt{5}$

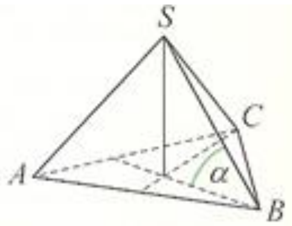
ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a krawędź podstawy ma długość 4 cm.

Zadanie 2. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm.

Zadani 3. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $49\sqrt{3}$.

Zadanie 4. W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym krawędź podstawy ma długość 6, a kat płaski 60 stopni. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

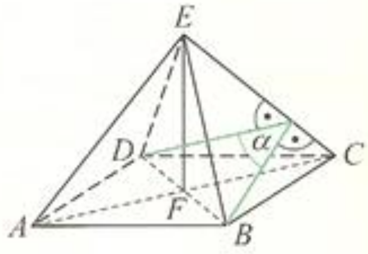


1. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym długość wysokości jest równa długości wysokości jego podstawy. Zatem krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α, takim że:

A) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, **B)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, **C)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, **D)** $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

2. Kąt α zaznaczony na rysunku jest kątem:

A) nachylenia wysokości ściany bocznej do krawędzi bocznej,
B) nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,
C) nachylenia ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej,
D) nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.



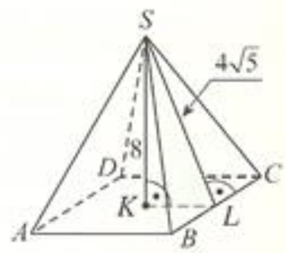
3. Ostrosłup ma 24 krawędzie. Jego podstawą jest:

A) ośmiokąt, **B)** dziesięciokąt, **C)** dwunastokąt, **D)** czternastokąt.

4. Na rysunku podano wybrane wymiary ostrosłupa prawidłowego. Zatem jego objętość jest równa:

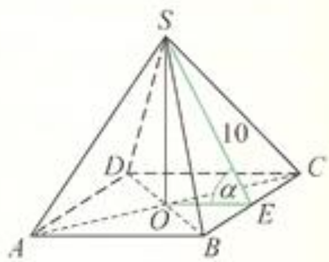
A) $170\frac{2}{3}$, **B)** $170\sqrt{2}$,

C) $65\sqrt{5}$, **D)** 512.

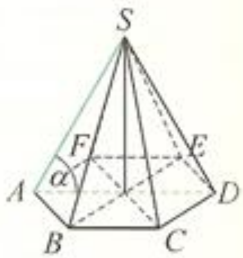


5. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α, takim że $\cos\alpha = 0{,}6$. Jeżeli wysokość SE ściany bocznej ma długość 10, to pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe:

A) 120, **B)** 240, **C)** 360, **D)** 480.



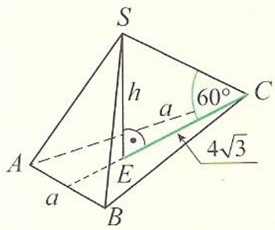
6. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.	P	F
Stosunek długości wysokości ostrosłupa do krawędzi jego podstawy jest równy $\sqrt{3}$.	P	F

7. Czy objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o wymiarach przedstawionych na rysunku jest równa $144\sqrt{3}$?



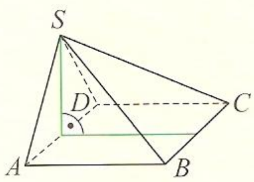
Wybierz odpowiedź T (tak) lub N (nie) i jej odpowiednie uzasadnienie spośród A i B.

T	ponieważ	**A**	$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{h}$, skąd $h=4$ i $\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$, skąd $a=12$, więc $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 4$.
N		**B**	$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{h}{4\sqrt{3}}$, skąd $h=12$ i $\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$, skąd $a=12$, więc $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 12$.

8. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat. Ściana boczna ADS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy oraz $|AB|=12$ i $|AS|=|SD|=10$. Oblicz:

a) objętość V ostrosłupa,

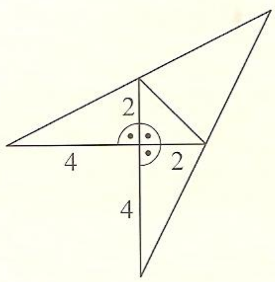
b) pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa.



9. Na rysunku przedstawiona jest siatka ostrosłupa o podstawie trójkątnej. Dwie ściany tego ostrosłupa są prostopadłe do jego podstawy. Oblicz:

a) długość wysokości tej ściany bocznej ostrosłupa, która nie jest prostopadła do płaszczyzny podstawy,

b) cosinus kąta nachylenia tej ściany bocznej, która nie zawiera wysokości ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



10. Stosunek długości wysokości ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do długości krawędzi podstawy jest równy $\frac{3}{2}$. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest cztery razy większe od pola jego podstawy.

11. Oblicz objętość czworościanu foremnego, gdy dana jest długość jego krawędzi $a=\sqrt{2}$ cm.

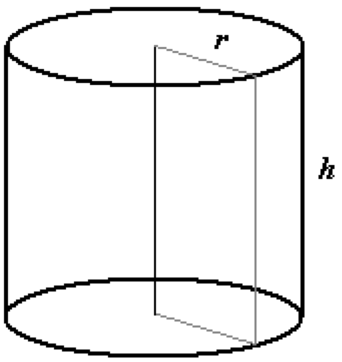
12. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 6cm i wysokość 6cm.

13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ma długość $4\sqrt{2}$, a krawędz podstawy 8. Oblicz:

a) długość krawędzi bocznej,
b) miarę kąta zawartego pomiędzy wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną,
c) miarę kąta zawartego pomiędzy dwiema krawędziami bocznymi; rozważ dwa przypadki.

Temat: WALEC, JEGO POLE POWIERZCHNI I OBJĘTOŚĆ

Walec obrotowy (walec) jest bryłą obrotową powstałą przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden bok (oś walca).



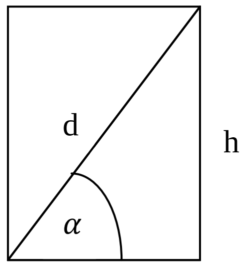
Podstawą walca nazywamy każde z kół powstałych przez obrót boków prostopadłych do osi obrotu.
Wysokością walca nazywamy dowolny odcinek o końcach należących do podstaw walca i prostopadły do tych podstaw.
Powierzchnią boczną walca nazywamy powierzchnię obrotową powstałą przez obrót boku prostokąta równoległego do osi obrotu i rozłącznego z osią obrotu.
Powierzchnia boczna walca o promieniu podstawy r i wysokości h.

h

$2\pi r$

Tworzącą walca nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do jego podstaw.

Przekrojem osiowym walca nazywamy część wspólną walca i płaszczyzny zawierającej oś walca.



$\alpha - kąt\ nachylenia\ przekątnej\ przekroju\ osiowego\ walca\ do\ płaszczyzny\ podstawy$

d – przekątna przekroju osiowego walca

Jeżeli promień podstawy walca wynosi *r*, wysokość *h*, to:

Pole powierzchni bocznej walca $P_b = 2\pi rh$

Pole powierzchni całkowitej walca $P_c = 2\pi r(r+h)$

Objętość walca $V = \pi r^2 h$

Zadanie 1. Prostokąt o bokach 3 i 4 obraca się raz dookoła krótszego, a drugi raz dookoła dłuższego boku. Oblicz stosunek objętości otrzymanych brył.

Zadanie 2. Prostokąt o boku długości 6 cm i przekątnej długości 10 cm, obraca się dookoła dłuższego boku. Oblicz pole powierzchni i objętość otrzymanej bryły.

Zadanie 3. Puszka w kształcie walca ma wysokość 9 cm i średnicę podstawy 6 cm. Oblicz objętość tej puszki z dokładnością do $1cm^2$ (przyjmij $\pi = 3{,}14$).

Zadanie 4. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku $12\sqrt{2}$. Oblicz objętość walca.

Zadanie 5. Kawałek blachy w kształcie prostokąta o bokach 12π i $2\sqrt{2}$ zwinięto w walec wzdłuż krótszego boku. Oblicz objętość powstałego walca.

Zadanie 6. Z walca o promieniu podstawy 10 cm i wysokości 8 cm wycięto centralnie walec o promieniu podstawy 6 cm i wysokości 8 cm. Oblicz objętość pozostałej części.

Zadanie 7. Oblicz pole powierzchni bocznej walca, jeżeli średnica podstawy i wysokość tego walca są przystające i wynoszą 6.

Zadanie 8. Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Oblicz kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy walca.

Zadanie 9. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30^0. Oblicz promień podstawy i wysokość walca.

Zadanie 10. O ile procent zmieni się objętość walca, jeżeli jego wysokość zmniejszymy o połowę, a promień podstawy zwiększymy dwukrotnie?

Zadanie 11. Jaką objętość ma naczynie w kształcie walca, którego pole powierzchni bocznej jest równe 16π i którego przekrojem osiowym jest kwadrat?

Zadanie 12. Obwód postawy walca wynosi 30π cm, zaś przekątna przekroju osiowego tworzy z podstawą kąt o mierze 60^0. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.

Zadanie 13. Objętość walca wynosi $\frac{54}{\pi}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca wiedząc, że po rozwinięciu jest ona kwadratem.

Zadanie 14. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do podstawy walca pod kątem α, takim, że $tg\alpha = \frac{2}{3}$. Promień podstawy ma długość 24. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego walca.

Zadanie 15. Przekrój osiowy walca jest prostokątem, w którym bok odpowiadający wysokości walca jest dwa razy większy od drugiego boku prostokąta.

a) Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola jego podstawy
b) Wyznacz sinus nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny jego podstawy.

Zadanie 16. Tworząca walca ma długość $l = 20$ cm. Oblicz obwód podstawy walca, jeśli przekątna przekroju osiowego ma długość d = 20 cm.

Zadanie 17. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o podstawie długości 8 cm i przekątnej długości 10 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

Zadanie 18. Przekrój osiowy walca jest kwadratem, którego przekątna ma długość $4\sqrt{2}$. Oblicz długość promienia walca.

Zadanie 19. Oblicz objętość walca, jeżeli jego pole powierzchni całkowitej wynosi $69{,}3\pi$ cm^2, a promień podstawy ma długość 35 mm.

Zadanie 20. Jakie bryły nazywamy bryłami obrotowymi. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca wpisanego w sześcian o krawędzi a .

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Prostokąt o bokach 4cm×8cm zwinięto, tworząc powierzchnię boczną walca. Jeżeli tworząca (wysokość) walca wynosi 8 cm, to promień podstawy walca jest równy:

A. 4cm B. 2cm C. $\frac{2}{\pi}cm$ D. $\frac{4}{\pi}cm$

Zadanie 2. Kwadrat o boku długości 2 obrócono wokół jednego z boków. Powstała bryła ma objętość:

A. 4π B. 8π C. 2π D. 32π

Zadanie 3. Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 60°. Jeżeli średnica walca jest równa 6, to pole powierzchni bocznej tego walca wynosi:

A. $12\sqrt{3}\pi$ B. $24\sqrt{3}\pi$ C. $36\sqrt{3}\pi$ D. $72\sqrt{3}\pi$

Zadanie 4. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach 4cm × 5cm (h=5). Objętość walca jest równa:

A. $20\pi cm^3$ B. $24\pi cm^3$ C. $32\pi cm^3$ D. $30\pi cm^3$

Zadanie 5. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu równym 12. Wówczas promień podstawy tego walca jest równy:

A. $2\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

Zadanie 6. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 8 i tworzy z podstawą kąt 60°. Promień podstawy walca wynosi:

A. $2\sqrt{3}$ B. 2 C. 4 D. $4\sqrt{3}$

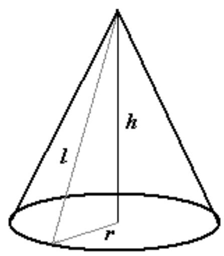
Zadanie 7. Objętość walca wynosi 81πcm^3. Wysokość walca jest 3 razy większa od promienia podstawy. Zatem pole powierzchni podstawy tego walca jest równe:

A. $3\pi cm^2$ B. $6\pi cm^2$ C. $9\pi cm^2$ D. $12\pi cm^2$

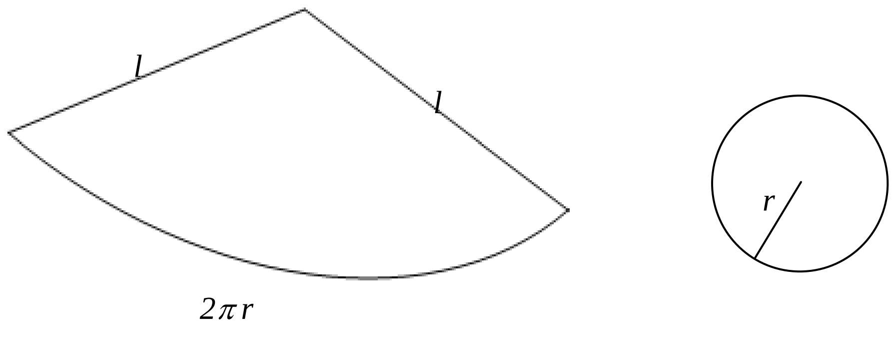
Zadanie 8. Pole powierzchni bocznej walca jest równe 48π, a jego objętość 96π. Długość wysokości walca:

A. Jest o 2 większa od promienia jego podstawy
B. Jest 2 razy mniejsza od promienia jego podstawy
C. Jest o 2 mniejsza od promienia jego podstawy
D. Jest 2 razy większa od promienia jego podstawy

Temat: STOŻEK, JEGO POLE POWIERZCHNI I OBJĘTOŚĆ

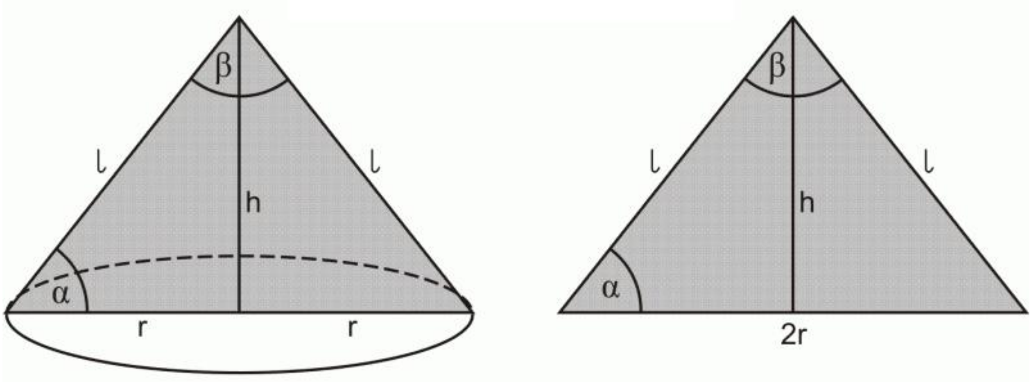


Stożek obrotowy (stożek) jest bryłą obrotową powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta (oś stożka).
Podstawą stożka nazywamy koło powstałe przez obrót przyprostokątnej prostopadłej do osi stożka.
Wysokością stożka nazywamy przyprostokątną trójkąta zawartą w osi obrotu.
Powierzchnią boczną stożka nazywamy powierzchnię wyznaczoną przez obrót przeciwprostokątnej trójkąta.



Część wspólna osi obrotu i powierzchni bocznej stożka jest punktem, który nazywamy **wierzchołkiem stożka**. **Tworzącą stożka** nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka, którego jednym końcem jest wierzchołek stożka, a drugi należy do podstawy stożka i oznaczamy ją literą l.

Przekrojem osiowym stożka nazywamy część wspólną stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka.



$\alpha - kąt\ nachylenia\ tworzącej\ stożka\ do\ płaszczyzny\ podstawy,$

$\beta - kąt\ rozwarcia\ stożka$

Jeżeli promień podstawy walca wynosi *r*, wysokość *h*, tworząca *l* to:

Pole powierzchni bocznej stożka: $P_b = \pi r l$

Pole powierzchni całkowitej stożka: $P_c = \pi r(r + l)$

Objętość stożka: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Zadanie 1. Jaką bryłę nazywamy stożkiem? Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o bokach: $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2 wokół przyprostokątnej.

Zadanie 2. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 12 i 16 obraca się wokół przeciwprostokątnej. Wyznacz objętość powstałej bryły.

Zadanie 3. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8 obraca się raz dookoła krótszej i drugi raz dookoła dłuższej przyprostokątnej. Oblicz sumę objętości powstałych brył.

Zadanie 4. Trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości $12\sqrt{2}$ obraca się dookoła jednej z przyprostokątnych. Oblicz objętość otrzymanej bryły.

Zadanie 5. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości $2\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego stożka.

Zadanie 6. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości $6\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

Zadanie 7. Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka, którego wysokość i promień podstawy są przystające i równe 2.

Zadanie 8. Jaką część objętości walca stanowi objętość stożka, jeżeli walec i stożek mają równe koła w podstawie i równe wysokości?

Zadanie 9. Stożek ma trzy razy dłuższy promień podstawy niż walec o tej samej wysokości. Oblicz stosunek objętości stożka do objętości walca.

Zadanie 10. Walec i stożek mają te same wysokości i objętości. Jaki jest stosunek długości promienia podstawy stożka do długości promienia podstawy walca?

Zadanie 11. Naczynie w kształcie stożka napełniono do połowy wysokości wodą. Jaką część objętości całego naczynia stanowi objętość wody?

Zadanie 12. Jak zmieni się objętość stożka, jeżeli promień podstawy zmniejszymy dwa razy, a wysokość zwiększymy czterokrotnie?

Zadanie 13. Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy 4 jest równe 72π. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętości tego stożka.

Zadanie 14. W stożku kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy ma miarę 60^0. Średnica podstawy stożka wynosi $2\sqrt{3}$. Wyznacz objętość stożka.

Zadanie 15. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $a = 3\sqrt{3}$ cm, $b = 3$ cm, obraca się dookoła krótszej przyprostokątnej. Oblicz długość tworzącej stożka.

Zadanie 16. Przekrój osiowy stożka jest równoramiennym trójkątem prostokątnym o polu równym 18. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Zadanie 17. Pole powierzchni bocznej stożka wynosi 60□ cm². Długości promienia podstawy, wysokości i tworzącej stożka są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz objętość stożka.

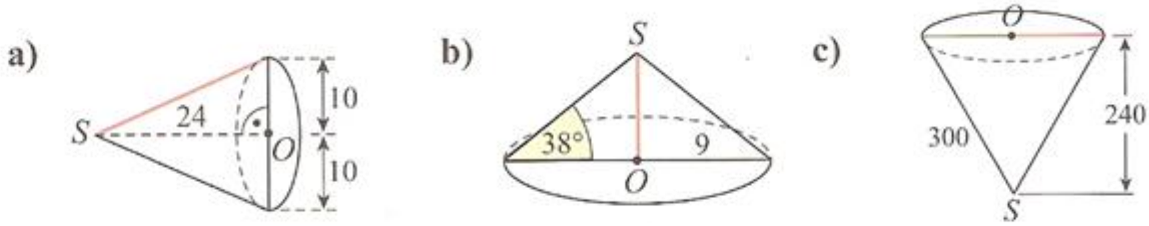
Zadanie 18. Oblicz objętość i pole całkowite stożka, jeżeli tworząca stożka długości 6 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy po kątem $30°$.

Zadanie 19. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym, którego ramię ma długość *b* = 20 cm, a miara kąta przy postawie jest równa $\alpha = 30°$. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

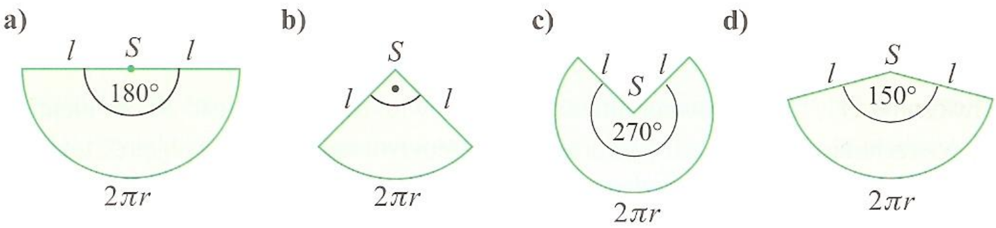
Zadanie 20. Kąt rozwarcia stożka ma miarę $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Oblicz długość tworzącej i wysokość stożka, mając daną długość średnicy jego podstawy d = 6 cm.

Zadanie 21. Oblicz objętość stożka, w którym pole podstawy stanowi 20% pola powierzchni całkowitej a długość tworzącej stożka równa się 8 cm.

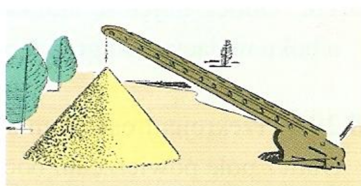
Zadanie 22. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta rozwarcia stożka oraz długość odcinka wyróżnionego na rysunku innym kolorem. Wyniki zaokrąglij do 0,1.



Zadanie 23. Na rysunku przedstawiona jest powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu. Oblicz cosinus kata nachylenia tworzącej tego stożka do



płaszczyzny podstawy.



Zadanie 24. Stożek usypany z piasku ma wysokość 2,7 m, a kąt nachylenia jego tworzącej do płaszczyzny podstawy ma miarę 45°. Ile kursów powinna wykonać ciężarówka o ładowności 9 m^3, aby wywieźć ten piasek?

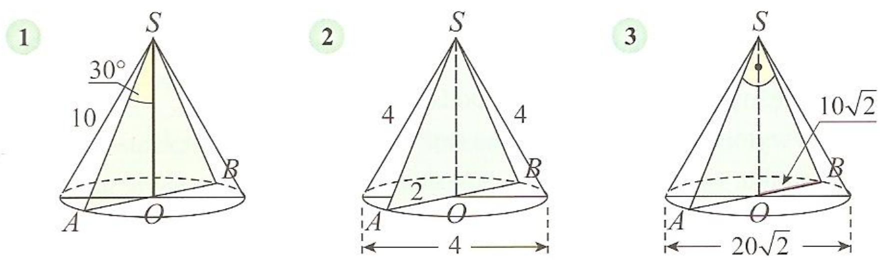
Zadanie 25. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz:

a) miarę kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny jego podstawy,

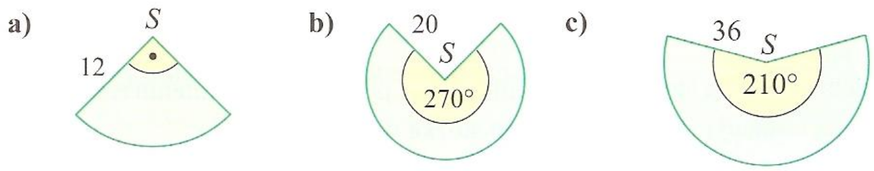
b) długość wysokości stożka

c) pole powierzchni całkowitej stożka

d) objętość stożka.



Zadanie 26. Oblicz pole podstawy stożka, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu przedstawiona jest na rysunku.



Zadanie 27. Pole podstawy stożka jest równe 16π, a pole powierzchni bocznej 32π. Oblicz:

a) pole powierzchni całkowitej,

b) miarę kąta zawartego między tworzącą a wysokością stożka.

Zadanie 28. W stożku, którego wysokość ma długość 15, tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 65°. Oblicz promień podstawy i długość tworzącej stożka. Wyniki zaokrąglij do 1.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Jak zmieni się objętość stożka, jeżeli zwiększymy dwukrotnie długość jego promienia podstawy, a długość wysokości dwukrotnie zmniejszymy?

A. Zwiększy się dwukrotnie

B. Zwiększy się czterokrotnie

C. Nie zmieni się

D. Zmniejszy się dwukrotnie

Zadanie 2. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 6cm. Wówczas objętość stożka wynosi:

A. $27\sqrt{3}\pi$ B. $9\sqrt{3}\pi$ C. $18\sqrt{3}\pi$ D. $3\sqrt{3}\pi$

Zadanie 3. Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 6. Objętość tego stożka jest równa:

A. π B. 3π C. 9π D. 27π

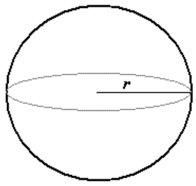
Zadanie 4. Wysokość stożka i promień jego podstawy mają długość 2, zatem kąt rozwarcia stożka ma miarę:

A. 60° B. 30° C. 120° D. 90°

Zadanie 5. Tworząca stożka tworzy z jego wysokością równą 6cm kąt 30°. Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi:

A. $72\sqrt{3}\pi$ B. 36π C. 108π D. 339,12

Temat: KULA, JEJ POLE POWIERZCHNI I OBJĘTOŚĆ



Kula jest bryłą obrotową powstałą przez obrót koła wokół osi zawartej w płaszczyźnie koła i do której należy środek koła. Środek koła obracanego jest **środkiem kuli**, a promień koła obracanego - **promieniem kuli**.

Obrót okręgu ograniczonego koło tworzy powierzchnie obrotową, którą nazywamy **sferą** lub **powierzchnią kuli**. Sfera jest figurą obrotową, ale nie jest bryłą obrotową.

Przekrojem kuli nazywamy część wspólną płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli nazywamy **kołem wielkim**.

Jeżeli promień kuli wynosi *r* to:

Pole powierzchni kuli (sfery) $P = 4\pi r^2$

Objętość kuli $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Zadanie 1. Średnica kuli ma długość $12\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

Zadanie 2. Podaj promień kuli o objętości $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

Zadanie 3. Koło o promieniu $3\sqrt{3}$ obraca się dookoła prostej zawierającej średnicę koła. Oblicz objętość otrzymanej bryły.

Zadanie 4. Oblicz objętość kuli o polu powierzchni 16π.

Zadanie 5. Oblicz objętość kuli, jeżeli jej pole powierzchni całkowitej jest równe 64π.

Zadanie 6. Naczynie ma kształt półkuli, a jego objętość jest równa $\frac{16}{3}\pi$. Oblicz promień kuli.

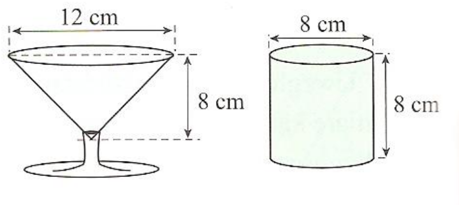
Zadanie 7. Stalowy walec o objętości 36π przetopiono na kulę. Zakładając, że podczas przetopu nie ma strat stali, oblicz długość promienia otrzymanej kuli.

Zadanie 8. Ołowianą kulę o objętości 72π przetopiono na dwie przystające kule. Jaka jest średnica każdej z kul, jeżeli nie ma strat ołowiu przy przetopie?

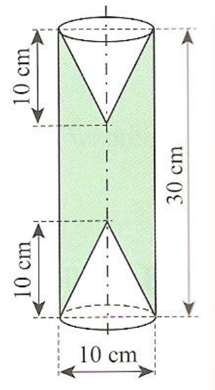
Zadanie 9. Średnica pomarańczy wynosi 9cm. Wyciśnięty z niej sok stanowi $\frac{3}{4}$ objętości całej pomarańczy. Jaka jest objętość wyciśniętego soku? Wynik podaj z dokładnością do $1cm^2$ (przyjmij $\pi = 3{,}14$).

Zadanie 10. Kulę wpisano w sześcian o boku długości 12. Ile razy objętość sześcianu jest większa od objętości kuli?

Temat: BRYŁY OBROTOWE



Zadanie 1. Napój z napełnionego po brzegi pucharu w kształcie stożka przelano do szklanki w kształcie walca (wymiary obu naczyń podano na rysunku). Czy szklanka została napełniona całkowicie? Odpowiedz uzasadnij.



Zadanie 2. W mosiężnym walcu o średnicy podstawy 10 cm i wysokości 30 cm wytoczono dwa wgłębienia stożkowe, tak jak pokazano na rysunku. Oblicz masę bryły powstałej po wydrążeniu. Przyjmij gęstość mosiądzu $\rho = 8{,}6\frac{g}{cm^3}$. Wynik zaokrąglij do 0,01 kg.

Zadanie 3. Kwadrat o boku 6 obraca się dookoła prostej zawierającej przekątną kwadratu. Oblicz objętość powstałej bryły.

Zadanie 4. Walec ma trzy razy dłuższą wysokość niż stożek o tym samym promieniu podstawy. Oblicz stosunek objętości walca do objętości stożka.

Zadanie 5. Kula o średnicy 6 i stożek o promieniu podstawy 3 mają równe objętości. Oblicz wysokość stożka.

Zadanie 6. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o podstawie długości 8cm i przekątnej długości 10cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

Zadanie 7. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, którego podstawa ma promień długości 4cm, a tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.

Zadanie 8. Pole powierzchni całkowitej walca, którego wysokość jest równa średnicy, wynosi 24 π cm^2. Oblicz objętość walca i jego pole powierzchni bocznej.

Zadanie 9. Oblicz objętość stożka o wysokości 12 cm wiedząc, że pole przekroju osiowego wynosi 480cm ^{2}.

Zadanie 10. Pole powierzchni całkowitej kuli wynosi 100π m ^{3}. Oblicz promień i objętość tej kuli.

Zadanie 11. Z wycinka kołowego o powierzchni 30 π i promieniu 6 zwinięto powierzchnię boczną stożka. Oblicz jego objętość i pole powierzchni bocznej.

Zadanie 12. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120 $^\circ$, a promień podstawy jest równy 2. Oblicz pole przekroju osiowego tego stożka.

Zadanie 13. Zbiornik ma kształt walca z obu stron zakończonego półkulami. Oblicz, ile litrów płynu wypełni ten zbiornik, jeśli pole powierzchni całkowitej zbiornika jest równe 3 π m ^{2}, a wysokość walca jest równa 2m.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – BRYŁY OBROTOWE

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ wytłumaczyć jak powstaje walec, stożek, kula i potrafisz tą wiedzę zastosować do rozwiązywania zadań
- ✓ rozpoznawać w walcach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami, obliczać miary tych kątów
- ✓ rozpoznawać w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt między tworzącymi stożka, kąt między tworzącą a podstawą), obliczać miary tych kątów
- ✓ stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości walca, stożka i kuli.

Zadanie 1. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o przekątnej $4\sqrt{2}$. Oblicz objętość walca.

Zadanie 2. Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 45°. Oblicz pole powierzchni bocznej jeśli średnica walca jest równa 10.

Zadanie 3. Prostokąt o boku 5 i przekątnej 13 obraca się dookoła dłuższego boku oblicz pole powierzchni powstałego walca.

Zadanie 4. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 12. Oblicz objętość tego stożka.

Zadanie 5. Tworząca stożka ma długość 6, a jego wysokość 8. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Zadanie 6. Po rozwinięciu powierzchni bocznej stożka na płaszczyźnie otrzymano jedną czwartą koła o promieniu 8. Oblicz promień podstawy tego stożka.

Zadanie 7. Oblicz promień kuli o objętości $36\pi cm^3$.

Zadanie 8. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości $4\sqrt{3}$cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

Zadanie 9. Obwód przekroju osiowego stożka jest równy 30, a tworząca jest o 5 większa od promienia podstawy stożka. Wówczas:

A. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°

B. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem a, takim ,że $cos \propto = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem a, takim ,że $sin \propto = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°

Temat: ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ OPTYMALIZACYJNYCH Z PLANIMETRII

Zadanie 1. Oblicz wymiary prostokąta o największym polu, wiedząc, że jego obwód jest równy 60.

Zadanie 2. W trójkącie ABC suma długości jednego z boków i wysokości opuszczonej na ten bok jest równa 12. Oblicz długość boku i długość wysokości opuszczonej na ten bok, dla których pole tego trójkąta jest największe.

Zadanie 3. Suma obwodów dwóch kwadratów jest równa 40cm. Oblicz długości boków kwadratów, dla których suma ich pól jest najmniejsza. Oblicz sumę tych pól.

Zadanie 4. W trapezie równoramiennym, którego kąt ostry ma miarę 45^0, suma długości wysokości i dłuższej podstawy jest równa 12. Jakie długości powinny mieć boki trapezu, aby jego pole było największe?

Zadanie 5. Obwód prostokąta jest równy 20cm. Oblicz długości boków prostokąta, wiedząc, że jego przekątna ma najmniejszą wartość.

Zadanie 6. W trapezie równoramiennym ramiona i krótsza podstawa mają długość 10. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu, który ma największe pole.

Zadanie 7. W okrąg o promieniu 3 wpisano prostokąt ABCD. Oblicz długości boków prostokąta dla których jego pole jest największe.

Zadanie 8. Ratownicy mający do dyspozycji linę długości 80 metrów mają wytyczyć przy plaży kąpielisko w kształcie prostokąta (wzdłuż brzegu nie będzie liny). Jakie wymiary powinno mieć to kąpielisko, jeżeli wczasowicze chcą, aby miało ono jak największą powierzchnię. Należy przyjąć, że brzeg plaży tworzy linię prostą.

Zadanie 9. Drut długości 28cm należy podzielić na dwie części i z jednej zrobić kwadratową ramkę, a z drugiej ramkę prostokątną, której jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego. Jak należy podzielić drut, jeżeli chcemy, aby suma pól otrzymanego kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

Temat: ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ OPTYMALIZACYJNYCH ZE STEREOMETRII

Zadanie 1. Jaką największą objętość może mieć graniastosłup prawidłowy trójkątny, w którym suma długości wszystkich krawędzi jest równa 9?

Zadanie 2. Jakie powinny być długości boków prostokąta o obwodzie 60cm, aby objętość walca otrzymanego w wyniku obrotu tego prostokąta wokół jednego z boków była największa?

Zadanie 3. Jaką wysokość powinien mieć stożek o tworzącej długości 3, aby jego objętość była największa?

Zadanie 4. Kwadrat o boku długości π rozcięto na dwa prostokąty, które po zwinięciu tworzą powierzchnie boczne walców o wysokości π. Jak należy dokonać cięcia, aby suma objętości tych walców była najmniejsza?

Zadanie 5. Puszka w kształcie walca ma mieć objętość V. Jakie wymiary powinna mieć ta puszka, aby na jej wykonanie zużyć jak najmniej materiału?

Zadanie 6. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym suma obwodu podstawy i długości jego wysokości jest równa 36. Oblicz wysokość ostrosłupa i długość krawędzi jego podstawy, dla których ma on największą objętość. Podaj tę objętość.

Zadanie 7. Oblicz wymiary walca o objętości 400π, wiedząc, że powierzchnia całkowita tego walca jest najmniejsza z możliwych.

Zadanie 8. Wśród prostopadłościanów, w których stosunek długości krawędzi podstawy wynosi 2:3, a suma długości wszystkich krawędzi jest równa 152cm, znajdź ten o największym polu powierzchni całkowitej. Oblicz objętość znalezionego prostopadłościanu.

4. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Temat: DOŚWIADCZENIE LOSOWE I LICZBA JEGO WYNIKÓW

Doświadczeniem losowym nazywamy takie doświadczenie, które może być powtarzane wielokrotnie w jednakowych lub bardzo zbliżonych warunkach i którego wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć. (np. rzut kostką, rzut monetą).
Każdy możliwy wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym** i zwykle oznaczamy literą ϖ.

Def. Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia losowego nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i oznaczamy symbolem Ω**.**
Liczbę elementów skończonego zbioru A oznaczamy symbolicznie $\bar{\bar{A}}$.

Zadanie 1. W następujących doświadczeniach losowych określ zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych i podaj jego moc.

a) Rzut monetą dwuzłotową
b) Dwukrotny rzut monetą
c) Rzut dwiema monetami: dwuzłotową i pięciozłotową
d) Trzykrotny rzut monetą
e) Rzut symetryczną kostką do gry
f) Rzut parą różnokolorowych kostek do gry
g) Trzykrotny rzut kostką do gry
h) Rzut kostką do gry i monetą
i) Losowanie jednej kuli z pojemnika, w którym znajdują się trzy kule: biała, czerwona i zielona
j) Jednoczesne losowanie dwóch kul z pojemnika, w którym znajdują się cztery kule: biała, czerwona, zielona i niebieska
k) Losowe ustawienie w szeregu czterech osób: A, B, C, D

Zadanie 2. Rzucamy trzy razy monetą, a w przypadku, gdy otrzymamy trzy razy ten sam wynik, rzucamy po raz czwarty. Opisz zbiór zdarzeń elementarnych i oblicz jego moc.

Zadanie 3. Oblicz, na ile sposobów 5 koleżanek Alicja (A), Basia (B), Cecylia (C), Daria (D) i Ewelina (E) mogą:

a) stanąć w rzędzie lub usiąść na ławce mieszczącej 5 osób,
b) usiąść przy okrągłym stole, przy którym stoją ponumerowane krzesła,
c) stanąć w koło i złapać się za ręce.

Zadanie 4. Oblicz, na ile sposobów dwie koleżanki mogą:

a) usiąść na ławce mieszczącej trzy osoby
b) usiąść obok siebie na ławce mieszczącej trzy osoby
c) usiąść na ławce mieszczącej cztery osoby
d) usiąść obok siebie na ławce mieszczącej cztery osoby.

Zadanie 5. Spotkało się sześciu przyjaciół i każdy witał się z każdym. Ile było powitań?

Zadanie 6. Oblicz, na ile sposobów można rozmieścić:

a) 5 czapek w trzech szufladach
b) 3 czapki w 5 szufladach.

Temat: ZDARZENIE LOSOWE

Def. Podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω nazywamy **zdarzeniem losowym** (lub krótko zdarzeniem).

Zdarzenia losowe oznaczamy dużymi literami alfabetu: A, B, C…
Jeżeli A jest zdarzeniem losowym, to zdarzenie elementarne ω, takie, że $\omega \in A$, nazywamy **zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A.**

Zdarzeniem pewnym A nazywamy zdarzenie losowe, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, tworzące zbiór Ω. Zdarzenie losowe A jest zdarzeniem pewnym wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \Omega$.

Zdarzeniem niemożliwym nazywamy zdarzenie losowe, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne ze zbioru Ω. Zdarzenie losowe A jest zdarzeniem niemożliwym wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$.

Różnicę zdarzeń Ω i A oznaczamy A' i nazywamy **zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A**. Zdarzenia A i B nazywamy zdarzeniami przeciwnymi, jeżeli $A \cup B = \Omega \ i \ A \cap B = \emptyset$.

Zadanie 1. Trzech zawodników strzela do tarczy. Wyniki zapisano oznaczając cyfrą 1 trafienie tarczy, a nietrafienie cyfrą 0.

a) Podaj wszystkie elementy przestrzeni Ω zdarzeń elementarnych oraz liczbę elementów tego zbioru
b) Zapisz zdarzenia elementarne odpowiadające zdarzeniu A, że tarcza została trafiona dokładnie przez dwóch zawodników
c) Wypisz zdarzenia elementarne odpowiadające zdarzeniu B, że tarcza została trafiona dokładnie przez jednego zawodnika
d) Zapisz zdarzenie elementarne odpowiadające zdarzeniu C, że wszyscy zawodnicy trafili do tarczy
e) Zapisz zdarzenie elementarne odpowiadające zdarzeniu D, że żaden zawodnik nie trafił do tarczy

Zadanie 2. Doświadczenie polega na jednoczesnym rzucie monetą i sześcienną kostką do gry.

a) Określ przestrzeń Ω wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych
b) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A polegającemu na tym, że wypadła reszka i parzysta liczba oczek. Podaj liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

Zadanie 3. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 19\}$ losujemy jedną liczbę. Określ zdarzenia losowe:

A – otrzymamy liczbę parzystą

B – otrzymamy liczbę podzielną przez 3

C – otrzymamy liczbę podzielną przez 5

D – otrzymamy liczbę podzielną przez 7

E – otrzymamy liczbę mniejszą od 5

F – otrzymamy liczbę, która jest kwadratem liczby całkowitej

Spośród zdarzeń A, B, C, D, E i F wybierz paty zdarzeń rozłącznych.

Zadanie 4. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Z następujących zdarzeń wybierz pary zdarzeń rozłącznych.

A – w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek

B – w drugim rzucie otrzymamy nieparzystą liczbę oczek

C – iloczyn otrzymanych oczek będzie nieparzysty

D – suma oczek na obu kostkach jest równa 5

Zadanie 5. Z talii 52 kart losujemy jedną. Z następujących zdarzeń wybierz pary zdarzeń rozłącznych:

A – otrzymamy króla

B – otrzymamy kartę młodszą od piątki

C – otrzymamy kartę koloru pikowego

D – otrzymamy kartę koloru kierowego

E – otrzymamy kartę starszą od ósemki

Zadanie 6. Rzucamy raz sześcienną kostką do gry. Wskaż zdarzenie przeciwne do zdarzenia A polegającego na wyrzuceniu co najmniej trzech oczek.

a) Zdarzenie B - Wypadną trzy oczka
b) Zdarzenie C -Nie wypadną trzy oczka
c) Zdarzenie D - Wypadną co najwyżej trzy oczka
d) Zdarzenie E - Wypadną co najwyżej dwa oczka

Zadanie 7. Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Wśród podanych zdarzeń wskaż zdarzenie pewne:

a) Zdarzenie A - Iloczyn wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą
b) Zdarzenie B - Suma wyrzuconych oczek wynosi co najmniej 3
c) Zdarzenie C - W trzecim rzucie wypadną trzy oczka
d) Zdarzenie D –Trzykrotnie wypadnie ta sama liczba oczek

Temat: POJĘCIE SILNI

Silnia liczby naturalnej n - to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n.

Silnię liczby naturalnej n oznaczamy symbolem n! (czytamy *en silnia*).

Mamy zatem:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$

Przykład:

$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$

Uwaga. $0! = 1$, $1! = 1$.

Zadanie 1. Oblicz:

a) $4!$

b) $6!$

c) $10!$

d) $\frac{8!}{0!}$

e) $\frac{6!}{4!}$

f) $\frac{5!}{1!}$

g) $\frac{13!}{12!}$

h) $\frac{13!}{12!}$

i) $\frac{4!}{0!}$

j) $\frac{100!}{98!}$

k) $\frac{120!\cdot 121}{122!}$

l) $\frac{9\cdot 10!}{9!\cdot 10}$

m) $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$

n) $\frac{7!\cdot 9!}{8!\cdot 6!}$

o) $\frac{(7!)^2}{9!}$

p) $\frac{31!-30!}{29!+28!}$

Zadanie 2. Zapisz bez używania symbolu silni i uprość ułamek:

a) $\frac{n!}{(n-3)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ c) $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$ d) $\frac{(n+3)!}{(n+1)(n+1)n!}$ e) $\frac{n!+(n+1)!}{(n-1)!}$

Zadanie 3. Która z podanych liczb jest większa?

a) 120! czy 120^2

b) $(2\cdot 15)!$ *czy* $2!\cdot 15!$

c) $10!\cdot 10!$ *czy* $100!$

d) $(5^2)!$ *czy* $(5!)^2$

Zadanie 4. Dla jakiej wartości m zachodzi podana równość?

a) $\frac{125!}{(125-15)!} = 125\cdot 124\cdot \ldots \cdot m$

b) $\frac{237!}{(237-m)!} = 237\cdot 236\cdot \ldots \cdot 200$

Temat: SYMBOL NEWTONA

Def. Dla liczb naturalnych spełniających warunki $0 \le k \le n$ definiujemy funkcję:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Symbol $\binom{n}{k}$ nazywamy **symbolem Newtona** i czytamy *n nad k* lub *n po k* lub też *k z n*.

Zadanie 1. Oblicz:

a) $\binom{7}{3}$ b) $\binom{20}{2}$ c) $\binom{17}{1}$ d) $\binom{13}{13}$

Zadanie 2. Która spośród liczb $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \dots, \binom{8}{8}$ jest największa?

Zadanie 3. Spośród liczb: $\binom{3}{2}, \binom{8}{3}, \binom{7}{4}, \binom{10}{2}, \binom{4}{2}, \binom{6}{4}, \binom{10}{8}$ wybierz:

a) liczbę największą, b) liczbę najmniejszą, c) liczby równe.

Zadanie 4. Ile różnych liczb jest wśród liczb

a) $\binom{9}{0}, \binom{9}{1}, \binom{9}{2}, \dots, \binom{9}{9}$

b) $\binom{15}{5} \cdot 5!,\ \binom{15}{10}!, \binom{15}{10} \cdot 5!,\ 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11,\ 3! \cdot \binom{16}{6} \cdot \binom{6}{4}$

Zadanie 5. Wiedząc, że n jest równe 5, oblicz:

a) $\binom{n}{3} - \binom{2n}{2}$, b) $\binom{8n}{38} + \binom{n+10}{1}$, c) $\binom{n-2}{2} \cdot \binom{n+2}{5}$, d) $\binom{2n}{8} : \binom{n}{4}^2$.

Zadanie 6. Rozwiąż równanie lub nierówność:

a) $\binom{n}{2} = 10$, c) $\binom{n+2}{4} = 5 \cdot \binom{n}{3}$, e) $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{n}{2}} > \frac{2}{3}$.

b) $\binom{n+6}{2} = 28$, d) $\binom{n}{2} < 21$,

Zadanie 7. O ile procent liczba $\frac{15!}{13!+12!}$ jest mniejsza od liczby $\binom{26}{2}$?

Temat: PERMUTACJE

Def. Permutacją zbioru *n*-elementowego nazywamy każdy *n*-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Permutacja spełnia następujące warunki:
- każda permutacja obejmuje wszystkie dane elementy,
- istotna jest kolejność elementów permutacji.

Z permutacjami zbioru mamy do czynienia wówczas, gdy porządkujemy elementy tego zbioru. Permutacja to każde ustawienie wszystkich elementów zbioru w dowolnej kolejności.

Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące permutacje:
{*a*,*b*,*c*},{*a*,*c*,*b*},{*b*,*a*,*c*},{*b*,*c*,*a*},{*c*,*a*,*b*},{*c*,*b*,*a*}

Liczba permutacji zbioru złożonego z *n* elementów jest równa *n*! (*n* silnia).

$$P_n = n!$$

Reguła mnożenia

Jeżeli wynik pewnego doświadczenia losowego zależy od kolejno podejmowanych decyzji, to liczba wszystkich różnych wyników tych decyzji jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_n$, gdzie

$n_1 -$ *liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu pierwszej decyzji*,

$n_2 -$ *liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu drugiej decyzji*,

……………………………………………………………………………………………………

$n_n -$ *liczba możliwości wyborów przy podejmowaniu* $n -$ *tej decyzji*.

Zadanie 1. Na ile sposobów można rozdzielić cztery różne cukierki między czworo dzieci?

Zadanie 2. Na ile sposobów można ustawić w szeregu 7 osób?

Zadanie 3. Na ile różnych sposobów można ustawić na półce 8 książek?

Zadanie 4. Na ile różnych sposobów mogą wybiec na boisko zawodnicy drużyny koszykarskiej?

Zadanie 5. Na ile różnych sposobów można ustawić w szeregu 6 chłopców i 7 dziewczynek, tak aby żadne dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

Zadanie 6. Na ile różnych sposobów można ustawić w szeregu 6 chłopców i 6 dziewczynek, tak aby żadne dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

Zadanie 7. Na ile różnych sposobów można ustawić na półce 7 książek, tak aby książki A i B

a) Stały obok siebie w dowolnej kolejności
b) Stały obok siebie w kolejności A, B
c) Były oddzielone od siebie jedną książką?

Zadanie 8. Ile różnych par tanecznych może utworzyć 10 mężczyzn i 10 kobiet?

Zadanie 9. Na ile różnych sposobów może się ustawić w kolejce do kasy 9 osób, tak aby osoba X stała bliżej kasy niż osoba Y i aby pomiędzy nimi stały dwie osoby?

Zadanie 10. Ile różnych sposobów może się ustawić w kolejce do kasy 12 osób, tak aby osoba X stała bliżej kasy niż osoba Y?

Zadanie 11. Ze zbioru $Z = \{1,2,3,4,5,6\}$ losujemy kolejno jedną po drugiej, bez zwracania sześć liczb i ustawiamy je jedna za drugą.

a) Ile różnych liczb sześciocyfrowych możemy w ten sposób otrzymać?
b) Ile różnych liczb parzystych możemy w ten sposób otrzymać?

Zadanie 12. W jadłospisie baru mlecznego „Biedronka" znajduje się 8 zup, 7 drugich dań i 2 kompoty, natomiast konsument chcący zjeść obiad w barze „Gdańskim" ma do wyboru 6 zup, 5 drugich dań i 4 kompoty. Pan Kowalski zamierza zjeść obiad w jednym z tych barów. W którym barze ma większą możliwość wyboru zestawu obiadowego składającego się z zupy, drugiego dania i kompotu?

Zadanie 13. W rajdzie pieszym uczestniczy grupa młodzieży składająca się z pięciu harcerek i czterech harcerzy. Maszerują w szyku zwanym „gęsiego". Ile istnieje różnych sposobów ustawienia się, jeżeli harcerze nie mogą sąsiadować z harcerzami, a harcerki z harcerkami?

Zadanie 14. Na ile sposobów można wręczyć 3 bilety na mecz piłki nożnej i 2 bilety do teatru trzem panom i trzem paniom, przy założeniu, że panowie otrzymają bilety na mecz, a panie bilety do teatru?
Zadanie 15. Asia, Krysia, Ewa i Natalka poszły do kina. Na sali usiadły na wykupionych kolejnych czterech miejscach. Oblicz na ile sposobów dziewczynki mogą usiąść tak aby Ewa i Natalka usiadły w tym kinie obok siebie.
Zadanie 16. Do pięciu ponumerowanych szuflad wkładamy w sposób losowy pięć różnokolorowych kul. Na ile różnych sposobów można to zrobić, tak aby każda kula znalazła się w innej szufladzie?
Zadanie 17. Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, przestawiając je w dowolny sposób?
Zadanie 18. Czworo przyjaciół - Marysia (M), Ala (A), Rafał (R) i Witek (W) – wybierają się na wycieczkę samochodową. W samochodzie są dwa siedzenia z przodu i dwa z tyłu. Tylko Marysia i Witek mają prawo jazdy. Na ile różnych sposobów podróżujący mogą usiąść w samochodzie?
Zadanie 19. Oblicz, ile wyrazów (mających sens lub nie) można utworzyc z wszystkich liter słowa:
a) LISTA, b) MATEMATYKA, c)BARBARA, d) twojego nazwiska.

Temat: WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

Def. Wariacją *k*-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru *n*-elementowego ($k \leq n$) nazywamy każdy *k*-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Wariacje spełniają następujące warunki:

- obejmują jedynie określoną liczbę k spośród n elementów,

- istotna jest kolejność elementów wariacji.

Z k-wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z *n* elementów mamy do czynienia, gdy *k* razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru.

n-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru *n*-elementowego są permutacjami tego zbioru.

Z trzech danych elementów *a*,*b*,*c*, można utworzyć następujące dwuelementowe wariacje bez powtórzeń: {*a*,*b*},{*a*,*c*},{*b*,*a*},{*b*,*c*},{*c*,*a*},{*c*,*b*}.

Liczba *k*-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru *n*-elementowego wyraża się wzorem:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Zadanie 1. Windą zatrzymującą się na ośmiu piętrach jedzie 5 osób. Na ile różnych sposobów mogą wysiąść z windy te osoby, tak aby każda wysiadła na innym piętrze?

Zadanie 2. Ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ losujemy kolejno jedną po drugiej trzy liczby. Pierwsza wylosowana liczba jest cyfrą setek, druga cyfrą dziesiątek, trzecia cyfrą jedności pewnej liczby trzycyfrowej. Ile różnych liczb trzycyfrowych możemy w ten sposób otrzymać?

Zadanie 3. Ze zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ losujemy kolejno jedną po drugiej cztery liczby i ustawiamy je jedna za drugą. Pierwsza wylosowana liczba jest cyfrą tysięcy, druga cyfrą setek, trzecia cyfrą dziesiątek, czwarta cyfrą jedności pewnej liczby czterocyfrowej. Ile różnych liczb czterocyfrowych możemy w ten sposób otrzymać? (Pamiętaj, że liczba nie może się zaczynać od 0.)

Zadanie 4. Każdej z 12 osób przyporządkowujemy miesiąc, w którym się urodziła. Ile może być różnych przyporządkowań tego typu, jeżeli każda osoba urodziła się w innym miesiącu?

Zadanie 5. W klasie liczącej 25 osób wybieramy przewodniczącego, zastępcę i skarbnika. Na ile różnych sposobów możemy dokonać wyboru samorządu klasowego?

Zadanie 6. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach

a) Podzielnych przez 10, b)Podzielnych przez 25?

Zadanie 7. W sztafecie biatlonowej wzięło udział 12 zespołów czteroosobowych i wszyscy zawodnicy dobiegli do mety. Każdy zawodnik w czasie biegu narciarskiego oddał po pięć strzałów do czterech celów.

Punktowane są tylko trzy miejsca (bez przypadku dzielenia miejsc ex aequo). Ile jest możliwości zajęcia tych miejsc przez zespoły?

Zadanie 8. Sześciu kolegów ma telefony komórkowe w tej samej sieci.

a) Ile mogą przesłać sobie nawzajem SMS-ów, gdy każdy wysyła jeden SMS do pozostałych?
b) Oblicz koszt tych SMS-ów przyjmując, że jeden SMS kosztuje w sieci 15gr.

Zadanie 9. Z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4 można utworzyć różne liczby naturalne o niepowtarzających się cyfrach. Oblicz ile można utworzyć takich liczb.

Zadanie 10. Ze zbioru cyfr {1,2,3,4,5,6,7} losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i zapisujemy je w kolejności losowań otrzymując liczbę dwucyfrową. Ile spośród tych liczb jest parzystych?

Zadanie 11. Ile jest naturalnych liczb dwucyfrowych, których cyfra dziesiątek jest nieparzysta, a cyfra jedności jest parzysta?

Zadanie 12. Ze zbioru {-4,-2,0,1,2,3} losujemy jedną liczbę i jej wartość wpisujemy w miejsce a. Następnie z pozostałych w zbiorze liczb losujemy drugą i podstawiamy ją w miejsce b. Ile punktów P=(a,b) należy do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych?

Zadanie 13. Z cyfr 2, 3, 4, 5, 6, 7 można utworzyć liczby czterocyfrowe (o niepowtarzających się cyfrach), których cyfrą tysięcy jest 3 lub 5 lub 7. Ile jest takich liczb?

Zadanie 14. Z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6 utworzono 120 liczb o jednakowej liczbie cyfr i o niepowtarzających się cyfrach. Oblicz, ilu cyfrowe są te liczby.

Zadanie 15. Na placu jest dwuosobowa huśtawka. Ile dzieci brało udział w zabawie, jeżeli można je było parami posadzić na huśtawce na 42 sposoby?

Zadanie 16. Ile jest możliwości rozdania 3 długopisów: czerwonego, czarnego i zielonego pomiędzy 7 osób?

Zadanie 17. Spośród osób, które zadzwoniły na audiotele komputer wylosował 100 telewidzów, wśród których zostaną rozlosowane 3 nagrody: pierwsza to samochód, druga – telewizor, trzecia – kino domowe. Na ile sposobów można rozlosować te nagrody?

Zadanie 18. W jednej z gonitw konnych bierze udział 6 koni. Na ile sposobów można obstawić pierwszą trójkę na mecie?

Zadanie 19. Do ośrodka treningowego przyjechało dziesięciu sportowców: ośmiu brydżystów i dwóch szachistów. W ośrodku jest wolnych 12 jednoosobowych pokojów: 9 pokojów na parterze i 3 pokoje na pierwszym piętrze.

a) Na ile sposobów można rozlokować sportowców w pokojach?
b) Na ile sposobów można rozlokować sportowców w pokojach tak, aby któryś z brydżystów mieszkał sam na pierwszym piętrze?
c) Na ile sposobów można rozlokować sportowców w pokojach tak, aby wszyscy szachiści mieszkali na pierwszym piętrze?

Temat: WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

Def. Wariacją k-elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Z k-wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru n-elementowego mamy do czynienie wówczas, gdy *k* razy wybieramy po jednym elemencie ze zwracaniem z danego zbioru.

Z trzech danych elementów *a*,*b*,*c*, można utworzyć następujące dwuelementowe wariacje z powtórzeniami:
{*a*,*a*},{*a*,*b*},{*a*,*c*},{*b*,*a*},{*b*,*b*},{*b*,*c*},{*c*,*a*},{*c*,*b*},{*c*,*c*}

Liczba *k*-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru *n*-elementowego wyraża się wzorem:

$$W_n^k = n^k.$$

Zadanie 1. Rzucamy trzy razy symetryczną kostką do gry. Ile różnych wyników można otrzymać?
Zadanie 2. Centrala telefoniczna pracuje na numerach siedmiocyfrowych, które składają się z cyfr od 0 do 9, przy czym mogą się one powtarzać, lecz numer nie może zaczynać się cyfrą 0. Ilu abonentom można przydzielić numery?

Zadanie 3. Windą zatrzymującą się na siedmiu piętrach jedzie 6 osób. Na ile różnych sposobów mogą wysiąść te osoby, tak aby każdy wysiadł na dowolnym piętrze?

Zadanie 4. Na ile sposobów można umieścić 7 ponumerowanych kul w dwóch szufladach?

Zadanie 5. Ile można zaszyfrować wyrazów czteroliterowych za pomocą trzech różnych znaków?

Zadanie 6. Trzy osoby kupują po jednej gałce lodów. Ile różnych zestawów (3 lodów) mogą wybrać, jeżeli lody są w 5 smakach?

Zadanie 7. Odtwarzamy w sposób przypadkowy 3 utwory z płyty zawierającej 12 utworów (utwory mogą się powtarzać). Ile jest różnych możliwych zestawów?

Zadanie 8. Prezenty na Boże Narodzenie trzeba zapakować w ozdobny papier wybrany spośród trzech papierów o różnych kolorach. Na ile różnych sposobów można zapakować dziesięć różnych prezentów?

Zadanie 9. Oblicz, ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć z podanych cyfr (cyfry mogą się powtarzać).

a) 1, 3, 7,

b) 0, 1, 5,

c) 1, 3, 5, 7,

d) 0, 1, 5, 7, 8, 9,

e) dwucyfrowych większych od 56,

f) trzycyfrowych mniejszych od 237.

Zadanie 10. Z cyfr 0, 1, 4, 7, 8 tworzymy liczby (cyfry mogą się powtarzać). Ile można w ten sposób utworzyć liczb:

a) dwucyfrowych,

b) czterocyfrowych parzystych,

c) trzycyfrowych nieparzystych,

d) o różnych cyfrach?

Zadanie 11. Oblicz na ile sposobów można rozmieścić:

a) 5 różnych kul w siedmiu szufladach,

b) 7 różnych kul w pięciu szufladach?

Zadanie 12. W konkursie można wygrać pięć różnych nagród. Regulamin przewiduje, że nawet wszystkie nagrody mogą przypaść jednej osobie. Do finału doszły trzy osoby. Na ile sposobów można rozdzielić te nagrody?

Zadanie 13. Każdej z 12 osób przyporządkowujemy miesiąc, w którym się urodziła. Ile może być różnych przyporządkowań tego typu, jeżeli każda osoba mogła urodzić się w dowolnym miesiącu?

Temat: KOMBINACJE

Def. Kombinacją *k*-elementową utworzoną ze zbioru *n*-elementowego $(k \leq n)$ nazywamy każdy *k*-elementowy podzbiór tego zbioru.

Kombinacje spełniają następujące warunki:
- obejmują jedynie określoną liczbę *k* spośród danych *n* elementów.
- nie jest istotna kolejność elementów kombinacji.

Kombinacja, to jedna z możliwości wyboru kilku elementów z większego zbioru, przy czym kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia. Dwa podzbiory złożone z tych samych elementów, a różniące się tylko ich porządkiem, stanowią tę samą kombinację.

Z trzech danych elementów: *a*,*b*,*c*, można utworzyć następujące dwuelementowe kombinacje: {*a*,*b*}, {*a*,*c*}, {*b*,*c*}

Liczba *k*-elementowych kombinacji zbioru *n*-elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Zadanie 1. Na ile sposobów możemy wylosować cztery pytania z zestawu składającego się z 30 pytań?
Zadanie 2. Na egzaminie student losuje trzy pytania ze zbioru 50 pytań. Na ile różnych sposobów może dokonać wyboru?
Zadanie 3. Oblicz, na ile sposobów można utworzyć pięcioosobową drużynę spośród:
a) ośmiu osób, b) dziewięciu osób?

Zadanie 4. W pewnym mieście koalicja dwóch klubów partii A i B liczy 32 osoby, z czego $\frac{3}{4}$ tej liczby stanowią członkowie partii A. Oblicz, ile jest możliwości wyboru sześcioosobowej delegacji obu partii, w której składzie będzie dwóch członków partii B.

Zadanie 5. W partii 20 sztuk towaru jest 18 sztuk zgodnych z normą. Losujemy bez zwracania 10 sztuk. Oblicz, ile jest możliwości, że wśród nich jest 8 sztuk wykonanych zgodnie z normą.

Zadanie 6. Wśród dwudziestu zdjęć jest 9 zdjęć portretowych Zosi. Wyciągamy losowo 3 zdjęcia. Oblicz, ile jest możliwości wylosowania jednego, dwóch lub trzech portretów Zosi.

Zadanie 7. Na egzaminie zdający losuje 4 pytania. Oblicz, ile jest możliwości, że odpowie on pozytywnie na co najmniej 3 pytania, jeżeli umie odpowiedzieć tylko na 20 spośród 25 przygotowanych pytań egzaminacyjnych.

Zadanie 8. Z urny zawierającej 7 kul czarnych i 5 białych losujemy jednocześnie dwie kule. Na ile różnych sposobów możemy wylosować:

a) kule różnokolorowe,
b) kule jednokolorowe?

Zadanie 9. Z urny zawierającej 5 kul białych, 3 zielone i jedną czarną losujemy jednocześnie trzy kule. Na ile różnych sposobów możemy wylosować:

a) kule trzech różnych kolorów,
c) kule dwóch kolorów
b) kule jednokolorowe?

Zadanie 10. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Na ile sposobów możemy dokonać losowania tak, aby wśród wylosowanych kart były dokładnie dwie damy?

Zadanie 11. Z talii 52 kart losujemy 8 kart. Na ile różnych sposobów możemy dokonać losowania tak, aby wśród wylosowanych kart były dwa asy, trzy figury niebędące asem i trzy karty młodsze od szóstki?

Zadanie 12. Na ile różnych sposobów brydżysta może otrzymać

a) jednego asa,
c) jednego asa i trzy damy,
b) co najwyżej jednego asa,
d) jednego asa, dwa króle i dwie damy?

Wskazówka: Talia liczy 52 karty i każdy gracz kolejno otrzymuje po 13 kart.

Zadanie 13. Na ile sposobów można rozdać karty czterem brydżystom?

Temat: ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ RÓŻNYCH Z ZASTOSOWANIEM KOMBINATORYKI

Zadanie 1. Ze zbioru cyfr {1,2,3,4,5,6,7} losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i zapisujemy je w kolejności losowań otrzymując liczbę dwucyfrową. Ile spośród tych liczb jest parzystych?

Zadanie 2. W rajdzie pieszym uczestniczy grupa młodzieży składająca się z pięciu harcerek i czterech harcerzy. Maszerują w szyku zwanym „gęsiego”. Ile istnieje różnych sposobów ustawienia się, jeżeli harcerze nie mogą sąsiadować z harcerzami, a harcerki z harcerkami?

Zadanie 3. Ile jest naturalnych liczb dwucyfrowych, których cyfra dziesiątek jest nieparzysta, a cyfra jedności jest parzysta?

Zadanie 4. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których każda cyfra jest inna i cyfrą jedności jest 5?

Zadanie 5. Pan Kowalski zapomniał szyfr do sejfu. Szyfr składa się z pięciu cyfr, a pan Kowalski pamięta tylko, że pierwsza z cyfr na pewno nie jest zerem, ostatnia natomiast była trójką. Ile różnych możliwych pięciocyfrowych ciągów może być zapomnianym szyfrem?

Zadanie 6. Na ile sposobów można ustawić na półce 10 książek tak, aby dwie wybrane wcześniej książki stały obok siebie?

Zadanie 7. W turnieju szachowym bierze udział 4 chłopców i 5 dziewcząt. Każdy zawodnik z każdym rozegra jedną partię. Oblicz, o ile więcej meczów zostanie rozegranych między zawodnikami tej samej płci aniżeli pomiędzy zawodnikami różnych płci.

Zadanie 8. Ze zbioru {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} losujemy trzy razy bez zwracania po jednej cyfrze i zapisujemy liczbę trzycyfrową, której cyfrą setek jest pierwsza wylosowana liczba, cyfrą dziesiątek – druga, a cyfrą jedności trzecia z wylosowanych cyfr. Ile spośród tych liczb jest liczb parzystych?

Zadanie 9. Ile różnych wyrazów (mających sens lub nie) można utworzyć z liter słowa FUNKCJA?

Zadanie 10. Z grupy siedmiu osób należy wybrać trzy osoby na trzy różne, niezależne stanowiska. Na ile sposobów można to zrobić?

Zadanie 11. Oblicz, ile jest różnych liczb trzycyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr: 1, 2, …, 7.

Zadanie 12. W grze liczbowej losuje się cztery liczby spośród piętnastu. Oblicz, ile należy wypełnić kuponów, aby mieć pewność wygranej?

Zadanie 13. Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć ze zbioru cyfr $\{1,2,3,4,5\}$, jeżeli:

a) cyfry mogą się powtarzać, b) cyfry nie mogą się powtarzać.

Zadanie 14. Pewien biznesmen zapomniał hasła do zamka swojej dyplomatki. Hasło jest liczbą siedmiocyfrową założoną z cyfr od 1 do 7 włącznie. Cyfry w haśle nie powtarzają się i ostatnie trzy są wybrane ze zbioru $\{1,2,3\}$. Ile możliwości w najgorszym wypadku trzeba sprawdzić, aby otworzyć zamek?

Zadanie 15. Spośród 8 monet jednozłotowych, 10 monet dwuzłotowych i 12 monet pięciozłotowych wybieramy 3 monety. Na ile sposobów możemy wybrać te monety, aby miały ten sam nominał?

Zadanie 16. W piątek klasa ma 5 godzin lekcyjnych, w tym 1 lekcję matematyki. Oblicz, na ile sposobów można ułożyć plan lekcji tego dnia, jeżeli:

a) ustawienie lekcji jest dowolne,
b) lekcja matematyki może być jako pierwsza lub jako ostatnia?

Zadanie 17. Na ile sposobów można ustawić w szeregu grupę składającą się z 6 chłopców i 5 dziewcząt:

a) w dowolnym porządku,
b) tak, aby osoby tej samej płci nie stały obok siebie.

Zadanie 18. Ile jest liczb trzycyfrowych zapisanych za pomocą jednej cyfry podzielnej przez 4 i dwóch cyfr nie podzielnych przez 4?

Zadanie 19. Ile jest liczb dwucyfrowych o niepowtarzających się cyfrach większych od 65?

Zadanie 20. Od domu wczasowego do podnóża góry prowadzą 4 trasy autokarowe, a od podnóża góry na szczyt wiodą 3 szlaki turystyczne. Oblicz, ile różnych tras może zaplanować przewodnik wycieczki, jeżeli ze względów poznawczych droga powrotna będzie przebiegać:

a) Tą samą trasa autokarową ale innym szlakiem turystycznym,
b) Inną trasą autokarową i innym szlakiem turystycznym?

Zadanie 21. Jest 6 koralików: biały, żółty, zielony, czerwony, niebieski i czarny. Na ile sposobów można nawlec na nitki te koraliki, tak aby:

a) Koralik zielony i niebieski były obok siebie
b) Koralik zielony i niebieski nie były obok siebie?

Zadanie 22. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których każda cyfra jest inna i cyfrą jedności jest 5?

Zadanie 23. Losujemy kule z urny, w której znajduje się 9 kul z numerami od 1 do 9. Wynikiem losowania jest liczba utworzona z cyfr na kolejno wyjmowanych kulach. Ustal, ile różnych liczb możemy otrzymać, jeśli wyjmujemy kolejno 5 kul i żadnej nie wrzucamy z powrotem do urny.

Zadanie 24. Litery, cyfry i inne znaki pisma zakodowane są w komputerze za pomocą ciągu zer lub jedynek. Inaczej mówiąc, liczbowe kody tych znaków przedstawione są w systemie dwójkowym, czyli takim, w którym są tylko dwie cyfry: 0 i 1. Na kod każdego znaku przeznacza się 1 bajt, tzn. ośmiowyrazowy ciąg zer i jedynek.

a) Ile najwięcej znaków można zakodować tak, aby każdy z nich zajmował 1 bajt?
b) Ile znaków można by zakodować za pomocą ośmiowyrazowego ciągu zer , jedynek lub dwójek (tzn. gdyby na 1 bajcie zapisywać ten kod w systemie trójkowym)?

Zadanie 25. Każdy znak alfabetu Braille'a to układ wypukłych kropek wybranych z podstawowego układu sześciu kropek. Oblicz, ile znaków można w ten sposób utworzyć.

Wskazówka: Tworząc znak, decydujemy o każdej kropce, czy będzie wypukła czy nie.

Zadanie 26. Na terenie małej stacji kolejowej jest osiem latarni sygnałowych, z których każda wysyła trzy światła: żółte, zielone i czerwone. Oblicz, ile różnych sygnałów można włączyć.

Zadanie 27. W konkursie „Taniec z gwiazdami" pary taneczne oceniało czteroosobowe jury. Każdy z sędziów oceniał występ notą od 1 do 10 punktów.

a) Ile możliwych wyników może wystawić jury?
b) Przyjęto, że do finału przejdą pary, którym każdy członek jury wystawi ocenę nie mniejszą niż 8 punktów. Ile takich wyników może wystawić czteroosobowe jury?

Zadanie 28. Na ile sposobów można ustawić na półce 10 książek tak, aby dwie wybrane wcześniej książki stały obok siebie?

Zadanie 29. Z klasy, w której jest 17 dziewcząt i 13chłopców, wybieramy delegację, w skład której wchodzą trzy dziewczyny i dwóch chłopców. Na ile sposobów można to uczynić?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Do autobusu wchodzą 3 kobiety i 2 mężczyzn, przy czym kobiety przed mężczyznami. Liczba sposobów, na jakie te osoby mogą wsiąść do pojazdu jest równa:

A. 5 B. 6 C. 12 D. 120

Zadanie 2. Trzech chłopców i dwie dziewczynki ustawiają się w szeregu. Na ile sposobów mogą to zrobić, jeśli dziewczynki mają stać z chłopcami przemiennie?

A. 120 B. 8 C. 12 D. 5

Zadanie 3. W rzędzie ustawiamy pięć osób. Ile jest takich ustawień, aby osoby A i B stały obok siebie?

A. 2 B. 8 C. 24 D. 48

Zadanie 4. Na ile sposobów może się ubrać Agnieszka, jeżeli ma cztery różne spódniczki, trzy różne bluzeczki i pięć par butów?

A. 12 B. 60 C. 120 D. 17

Zadanie 5. Na ile sposobów mogą się ustawić w kolejce trzy koleżanki?

A. 3 B. 27 C. 6 D. 9

Zadanie 6. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Podaj, na ile sposobów może zakończyć się to doświadczenie:

A. 6 B. 12 C. 30 D. 36

Zadanie 7. Wszystkich liczb dwucyfrowych, których obie cyfry są mniejsze od 6, jest:

A. 30 B. 36 C. 42 D. 49

Zadanie 8. Pięć osób: Asia, Basia, Czarek, Kasia i Tomek wybrało się do kina. Na ile sposobów mogą te osoby usiąść w jednym rzędzie na pięciu kolejnych miejscach tak, żeby Kasię i Tomka rozdzielała jedna osoba?

A. 48 B. 36 C. 24 D. 12

Zadanie 9. Ze schroniska na szczyt góry prowadzi sześć tras. Ile wycieczek schronisko – szczyt – schronisko można zaplanować tak, aby zejście do schroniska odbyło się inną trasą niż wejście na szczyt?

A. 11 B. 12 C. 30 D. 36

Zadanie 10. Liczba wszystkich sposobów utworzenia nieparzystych liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach ze zbioru {0,1,2,3,4}, jest równa:

A. 18 B. 24 C. 36 D. 60

Zadanie 11. Ile można utworzyć liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5, o różnych cyfrach należących do zbioru {0,1,2,3,4,5}?

A. 40 B. 36 C. 32 D. 28

Zadanie 12. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, w których cyfry mogą się powtarzać, można utworzyć z cyfr {0,1,2,3}?

A. 180 B. 212 C. 192 D. 186

Zadanie 13. Do fotografii rodzinnej ustawiają się rodzice, a przed nimi czwórka dzieci. Wszystkich możliwych ustawień jest:

A. 6 B. 24 C. 26 D. 48

Zadanie 14. Liczby 1,2,3,4,5,6 ustawiamy losowo w ciąg. Wszystkich możliwych ustawień takich, że liczby 1 i 6 sąsiadują ze sobą (w dowolnej kolejności), jest:

A. 10 B. 12 C. 48 D. 240

Zadanie 15. Na półce stoi 5 książek, w tym 2 zbiory zadań z matematyki. Ile jest sposobów ustawienia tych książek na półce tak, aby zbiory stały obok siebie?

A. 48 B. 24 C. 120 D. 60

Zadanie 16. Rzucono dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Ile jest możliwych wyników rzutów takich, że w drugim rzucie otrzymamy liczbę oczek większą niż w pierwszym rzucie?

A. 15 B. 18 C. 30 D. 25

Zadanie 17. Jeżeli każda z dziesięciu osób podała rękę na powitanie każdej z pozostałych osób, to ile było uścisków dłoni?

A. 90 B. 100 C. 45 D. 10

Zadanie 18. Ze schroniska na szczyt prowadzą trzy drogi. Wycieczkę schronisko – szczyt – schronisko można odbyć na :

A. 3 sposoby B. 8 sposobów C. 9 sposobów D. 6 sposobów

Zadanie 19. Kod PIN karty bankomatowej składa się z czterech cyfr. Ile jest kodów PIN składających się z samych parzystych cyfr?

A. 120 B. 625 C. 499 D. 60

Zadanie 20. Z klasy, w której jest 16 dziewcząt i 12 chłopców, wybieramy dwuosobową drużynę składającą się z chłopca i dziewczyny. Można to zrobić na:

A. 192 sposoby B. 190 sposobów C. 28 sposobów D. 56 sposobów

Zadanie 21. Liczba trzycyfrowych licz parzystych o niepowtarzających się cyfrach, które można ułożyć z cyfr zbioru {0,1,2,3,7} jest równa:

A. 21 B. 20 C. 12 D. 19

Temat: PRAWDOPODOBIEŃSTWO KLASYCZNE

Def. Jeżeli Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych i zdarzenie $A \subset \Omega$, to prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy liczbę $P(A) = \frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\Omega}}}$, gdzie $\bar{\bar{A}}\ i\ \bar{\bar{\Omega}}$ to odpowiednio liczba elementów zbioru A i liczba elementów zbioru Ω.

Zadanie 1. Rzucamy jeden raz symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) parzystej liczby oczek
b) liczby oczek podzielnej przez 3
c) liczby oczek parzystej i podzielnej przez 3
d) liczby oczek parzystej lub podzielnej przez 3.

Zadanie 2. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) Liczby parzystej
b) Liczby podzielnej przez 3
c) Liczby podzielnej przez 4
d) Liczby podzielnej przez 5
e) Liczby parzystej lub podzielnej przez 3
f) liczby podzielnej przez 3 i przez 4
g) liczby pierwszej

Zadanie 3. Z talii 52 kart wybieramy losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) karty koloru pikowego,
b) asa,
c) karty koloru pikowego lub asa,
d) karty młodszej od piątki,
e) karty starszej od trójki.

Zadanie 4. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) sześciu oczek w pierwszym rzucie,
b) sześciu oczek w drugim rzucie,
c) sześciu oczek w co najmniej jednym rzucie,
d) różnych liczb oczek na obu kostkach,
e) sumy oczek równej 6,
f) iloczynu oczek równego 6.

Zadanie 5. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie

a) Ze zwracaniem
b) Bez zwracania

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A – otrzymamy dwa razy liczbę parzystą
B – pierwsza liczba będzie parzysta, a druga będzie nieparzysta
C – druga liczba będzie nieparzysta

Zadanie 6. Pięciu chłopców i pięć dziewczynek ustawia się w szeregu w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że żadne dwie osoby tej samej płci nie stoją obok siebie.

Zadanie 7. Ze zbioru liczb {1,2,3,4,5} losujemy dwie liczby i zapisujemy w kolejności wylosowania. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 5.

Zadanie 8. Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w sumie co najmniej 8 oczek?

Zadanie 9. Ze zbioru cyfr {1,2,3,4,5,6,7} losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i zapisujemy je w kolejności losowań otrzymując liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej.

Zadanie 10. Do windy stojącej na parterze w budynku ośmiopiętrowym wsiadło 5 osób. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wszystkie osoby wysiądą na różnych piętrach.

Zadanie 11. W rajdzie pieszym uczestniczy grupa młodzieży składająca się z pięciu harcerek i czterech harcerzy. Maszerują w szyku zwanym „gęsiego". Oblicz prawdopodobieństwo, że harcerze nie sąsiadują z harcerzami, a harcerki z harcerkami.

Zadanie 12. W urnie jest 27 kul ponumerowanych liczbami od 5 do 31. Kule z numerami od 5 do 10 są czerwone, od 11 do 20 są zielone, a pozostałe żółte. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy kulę czerwoną lub z numerem podzielnym przez 3.

Zadanie 13. Rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia:

a) Dokładnie jednej reszki
b) Dokładnie dwóch reszek

Zadanie 14. W tabeli przedstawiono liczby poszczególnych ocen z matematyki w klasie 3a:

Oceny	cel	bdb	db	dst	dop	ndst
Liczba ocen	1	4	7	12	5	1

Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń z tej klasy ma z matematyki ocenę niższą od średniej ocen w klasie.

Zadanie 15. Rzucamy sześcienną kostką do gry i dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba wyrzuconych orłów jest równa liczbie wyrzuconych na kostce oczek.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Ze zbioru liczb {1,3,4} losujemy dwa razy ze zwracaniem po jednej liczbie. Prawdopodobieństwo tego, że za pierwszym razem wylosujemy liczbę parzystą, jest równe:

A. $\frac{1}{9}$ B . $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Zadanie 2. Z talii 24 kart losujemy jedną kartę. Prawdopodobieństwo, że wybrana karta jest damą lub pikiem jest równe:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{10}{24}$ C. $\frac{9}{24}$ D. $\frac{1}{4}$

Zadanie 3. Ze zbioru liczb {1,2,3,4,5,6,7,8} losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej jest równe:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{8}$

Zadanie 4. W pudełku znajdują się tylko kule białe i czerwone. Stosunek liczby kul białych do liczby kul czerwonych jest równy 2:3. Z pudełka losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli jest równe:

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Zadanie 5. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej raz liczby oczek podzielnej przez 3 jest równe:

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{3}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{5}{9}$

Zadanie 6. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia: iloczyn wyrzuconych oczek jest mniejszy od 5 jest równe:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{18}$

Zadanie 7. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia: iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 6 wynosi:

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{7}{36}$ D. $\frac{5}{9}$

Zadanie 8. W pudełku jest pięć razy więcej kul czerwonych niż niebieskich. Prawdopodobieństwo wylosowania jednej kuli niebieskiej jest równe:

B. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{6}{5}$

Zadanie 9. Rzucono trzy razy monetą. Prawdopodobieństwo, że orzeł wypadł co najmniej jeden raz, jest równe:

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{2}{8}$ D. $\frac{3}{8}$

Zadanie 10. Rzucono cztery razy monetą. Prawdopodobieństwo, że reszka wypadła co najmniej jeden raz, jest równe:

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{15}{16}$ D. $\frac{3}{4}$

Zadanie 11. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry.

Prawdopodobieństwo , że wypadło dwa razy co najmniej 5 oczek, jest równe:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{18}$ D. $\frac{1}{36}$

Zadanie 12. Spośród liczb 20, 21, 22, …, 40 wylosowano jedną.

Prawdopodobieństwo, że jest to liczba podzielna przez 4, jest równe:

A. $\frac{5}{20}$ B. $\frac{6}{20}$ C. $\frac{5}{21}$ D. $\frac{6}{21}$

Zadanie 13. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry.

Prawdopodobieństwo , że wypadła dwa razy parzysta liczba oczek jest równe:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

Zadanie 14. Rzucono kostką do gry i dwiema monetami.

Prawdopodobieństwo, że wyrzucono dokładnie jednego orła i 6 oczek na kostce, jest równe:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{12}$

Zadanie 15. Rzucono kostką do gry i monetą. Prawdopodobieństwo, że wyrzucono reszkę i co najwyżej 5 oczek jest:

A. Większe od $\frac{1}{2}$

B. Mniejsze od $\frac{1}{2}$

C. Równe $\frac{1}{2}$

D. Mniejsze od $\frac{1}{3}$

Temat: WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Twierdzenie. Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych.

Jeżeli P(A) jest prawdopodobieństwem zdarzenia A, gdzie $A \subset \Omega$ oraz:

1. Zdarzenie A jest zdarzeniem niemożliwym, to P(A)=0
2. Zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym, to P(A)=1
3. $A \neq \emptyset\ i\ A \neq \Omega$, to $0 < P(A) < 1$.

Twierdzenie. Jeżeli zdarzenia A i $\grave{A}$ są zdarzeniami przeciwnymi , to

$$P(\grave{A}) = 1 - P(A).$$

Twierdzenie. Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych i $A \subset \Omega$ oraz $B \subset \Omega$. Wtedy: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Zadanie 1. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a)A', gdy $P(A) = \frac{3}{5}$ b) A, gdy $P(A') = \frac{2}{7}$.

Zadanie 2. Wiedząc, że $\frac{P(A)}{P(A')} = 5$ oblicz P(A) oraz P(A').

Zadanie 3. Wiedząc, że $16 \cdot P(A) \cdot P(A') = 3$, oblicz P(A).

Zadanie 4. Wiadomo, że $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym, zdarzenia A i B przestrzeni Ω wykluczają się oraz P(A)=0,57. Oblicz P(B).

Zadanie 5. Zdarzenia losowe A i B są zawarte w przestrzeni Ω. Wiedząc, że $A \subset B$ *oraz* $P(A \cup B) = 0{,}9$, oblicz $P(B')$.

Zadanie 6. A i B są zdarzeniami zawartymi w zbiorze Ω, takimi, że P(A) = 0,8 i P(B) = 0,4. Sprawdź, czy zdarzenia A i B mogą się wyłączać.

Zadanie 7. A i B są zdarzeniami losowymi, takimi, że $B \subset A$, $P(A) = 0{,}8\ i\ P(B) = 0{,}5$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Zadanie 8. A i B są zdarzeniami losowymi, takimi, że $B \subset A$, $P(A) = 0{,}9\ i\ P(B) = 0{,}6$. Oblicz P(A\B).

Zadanie 9. Wiedząc, że $P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{3}{10}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, wykaż, że zdarzenia A i B przestrzeni Ω wykluczają się.

Zadanie 10. Zdarzenia A i B są zdarzeniami przestrzeni Ω. Wiedząc, ze $P(A) = \frac{3}{7}$, $P(B) = \frac{5}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{6}{7}$, sprawdź:

a) czy zdarzenie A jest przeciwne do zdarzenia B,

b) czy zdarzenia A i B wykluczają się.

Zadanie 11. Zdarzenia A i B są zdarzeniami przestrzeni Ω. Wiedząc, że $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, oblicz P(A), P(B), P(A∩B).

Zadanie 12. W grupie 200 osób 65% uczy się języka angielskiego, 47% uczy się języka rosyjskiego, a 30% uczy się obu tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana losowo z tej grupy osoba nie uczy się żadnego z wymienionych języków.

Zadanie 13. W pewnym liceum spośród stu uczniów przystępujących do matury pięćdziesięciu zdawało matematykę, dwudziestu dziewięciu biologię, trzynastu oba te przedmioty, a pozostali inne. Przyjmijmy:

Zdarzenie M – losowo wybrany uczeń zdawał matematykę

Zdarzenie B – losowo wybrany uczeń zdawał biologię.

Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń:

a) Zdawał biologię i matematykę

b) Zdawał biologię lub matematykę

Zadanie 14. W grupie pracowników pewnego biura 10% z nich zjada rano ciepłe śniadanie, 20% ciepły lunch, 25% ciepłe śniadanie lub ciepły lunch. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z tej grupy pracowników je zarówno ciepłe śniadanie jak i ciepły lunch.

Zadanie 15. Na stoliku w czytelni wyłożone są dwa czasopisma A i B. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo odwiedzający czytelnię uczeń przejrzy czasopismo A jest równe 0,75, zdarzenie, że przejrzy czasopismo A i nie przejrzy czasopisma B, jest równe 0,65, a zdarzenie, że nie przejrzy żadnego czasopisma, jest równe 0,2. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) Przejrzy oba czasopisma,

b) Nie przejrzy czasopisma A, ale przejrzy czasopismo B.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Wiadomo, że $A, B \subset \boldsymbol{\Omega}$, oraz P(A)=0,7, P(B)=0,5, $P(A \cup B) = 1$. Zatem:

A. $P(A \cap B) = 0{,}5$

B. $P(A \cap B) = 0{,}4$

C. $P(A \cap B) = 0{,}3$

D. $P(A \cap B) = 0{,}2$

Zadanie 2. Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$, oraz P(A)=$\frac{2}{5}$, P(B)=$\frac{4}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$. Zatem:

A. $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

B. $P(A \cup B) = 1$

C. $P(B - A) = 0{,}5$

D. $P(B - A) = 0{,}4$

Zadanie 3. Z talii 24 kart wylosowano jedną kartę. Prawdopodobieństwo, że wylosowano kiera lub asa, jest równe:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{11}{24}$

Zadanie 4. Z talii 52 kart wylosowano jedną kartę. Prawdopodobieństwo, że wylosowano pika lub króla, jest równe:

A. $\frac{1}{52}$ B. $\frac{4}{52}$ C. $\frac{16}{52}$ D. $\frac{17}{52}$

Zadanie 5. Zdarzenia A i B zawarte są w zbiorze Ω i spełniają warunki: $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $A \subset B$. Wówczas:

A. $P(A \cup B) = \frac{1}{5}$

B. $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$

C. $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$

D. $P(A \cup B) = 1$

Zadanie 6. Zdarzenie $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym, a prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$ jest równe 0,25. Wobec tego suma prawdopodobieństw zdarzeń A i B jest równa:

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{5}$ C. 1 D. $\frac{5}{4}$

Zadanie 7. Wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, a suma zdarzeń $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B jest równe:

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Zadanie 8. Dane są dwa rozłączne zdarzenia A i B, takie, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$. Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B jest równe:

A. $\frac{4}{10}$ B.1 C. $\frac{9}{10}$ D. $\frac{7}{10}$

Temat: PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE I JEGO WŁASNOŚCI

Twierdzenie. Jeśli A i B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω i $P(B) > 0$, to prawdopodobieństwem zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, nazywamy liczbę $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Ponadto, ponieważ $0 < P(B) \leq 1$, więc $P(A|B) \geq P(A \cap B)$.

Zadanie 1. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, 10\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3, jeżeli wiadomo, że otrzymano liczbę parzystą.

Zadanie 2. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, 12\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby nieparzystej, jeżeli wiadomo, że otrzymano liczbę pierwszą.

Zadanie 3. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania asa, jeżeli wiadomo, że otrzymana karta jest pikiem.

Zadanie 4. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania kiera, jeżeli wiadomo, że otrzymana karta jest starsza od waleta.

Zadanie 5. Rzucamy symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek większej od trzech, jeżeli wiadomo, że otrzymano parzystą liczbę oczek.

Zadanie 6. Z pojemnika, w którym znajduje się pięć kul białych i sześć czarnych losujemy kolejno dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w drugim losowaniu kuli białej, jeżeli wiadomo, że w pierwszym losowaniu otrzymaliśmy kulę

a) białą, b) czarną.

Zadanie 7. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, 7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania pary liczb, których iloczyn jest parzysty, jeżeli wiadomo, że suma wylosowanych liczb jest parzysta.

Zadanie 8. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch szóstek, jeżeli wiadomo, że:

a) W pierwszym rzucie otrzymano szóstkę
b) Otrzymano co najmniej jedną szóstkę

Zadanie 9. Z talii 52 kart losujemy pięć kart. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch pików, jeżeli wiadomo, że wśród wylosowanych kart:

a) jest as kier, c) jest dokładnie jeden kier,
b) są dokładnie dwa kiery.

Zadanie 10. Dane są dwa pojemniki. W pierwszym znajdują się trzy kule białe i dwie czarne, a w drugim cztery białe i trzy czarne. Doświadczenie polega na losowym wyborze kuli z losowo wybranego pojemnika. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: wylosujemy kulę białą z pierwszego pojemnika.

Temat: PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \cdots, B_n$ zawarte w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω spełniają warunki:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset \; dla \; i \neq j$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0 \;\; dla \; i = 1,2, \cdots, n$

to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi równość

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

Zadanie 1. W pierwszym pojemniku są 3 kule zielone i 5 białych, a w drugim 4 kule zielone i 3 białe. Z pierwszego pojemnika przenosimy w sposób losowy jedną kulę do drugiego pojemnika, a następnie z drugiego pojemnika losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania z drugiego pojemnika kuli zielonej?

Zadanie 2. Na loterii są trzy pudełka z losami. W pierwszym pudełku jest 50 losów, w tym 3 wygrywające, w drugim 40 losów, w tym 2 wygrywające, a w trzecim 60 losów, w tym 4 wygrywające. Kupujący najpierw wybiera w sposób losowy pudełko, a następnie z wylosowanego pudełka jeden los. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupi los wygrywający?

Zadanie 3. W grupie uczniów klas trzecich pewnego gimnazjum 80% liczby chłopców i 75% liczby dziewcząt zadeklarowało, że po ukończeniu gimnazjum będą kontynuować naukę w liceum ogólnokształcącym. Liczba chłopców stanowi 55% wszystkich uczniów klas trzecich. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba z tej grupy zamierza kontynuować naukę w liceum ogólnokształcącym.

Zadanie 4. Strzelec A trafia do tarczy osiem na dziesięć strzałów, a strzelec B trafia dziewięć razy na dziesięć strzałów. Sędzia rzuca dwiema symetrycznymi monetami. Jeżeli wypadnie co najmniej jeden orzeł, to strzela strzelec A, a jeżeli będzie miało miejsce zdarzenie przeciwne, to strzela strzelec B. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrany strzelec trafi w tarczę.

Zadanie 5. Zbadano, że wśród 10 000 mężczyzn 500 z nich jest daltonistami, a wśród 10 000 kobiet daltonistkami jest tylko 50. Spośród grupy osób, w skład której wchodziło 400 mężczyzn i 600 kobiet, wybrano losowo jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana osoba jest daltonistą.

Zadanie 6. Gracz w golfa ma w torbie sześć różnych kijów golfowych, ale tylko jeden z nich przeznaczony jest do kolejnego uderzenia w piłeczkę. Jeżeli golfista wybierze właściwy kij, to prawdopodobieństwo zdarzenia, że będzie miał udany strzał piłeczką jest równe $\frac{2}{5}$, jeśli wybierze niewłaściwy kij, to prawdopodobieństwo będzie równe $\frac{1}{3}$. Gracz losowo wyciąga z torby jeden kij. Oblicz prawdopodobieństwo, że trafi piłeczką do celu.

Temat: DOŚWIADCZENIA WIELOETAPOWE- DRZEWKA

Reguła mnożenia dla drzew stochastycznych

Prawdopodobieństwo wyniku, któremu odpowiada dana gałąź drzewa, jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przypisanych krawędziom, z których składa się dana gałąź.

Zadanie 1. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 3 czerwone losujemy jedną kulę, zapisujemy jej kolor i wrzucamy do urny. Ponownie losujemy kulę z urny i zapisujemy jej kolor. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano:

a) dwie kule czerwone, b) kulę czerwoną i białą.

Zadanie 2. W szufladzie jest 7 długopisów zielonych i 12 długopisów czarnych. Wybrano losowo 3 długopisy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkie będą tego samego koloru.

Zadanie 3. W pewnej loterii przygotowano 100 losów, z których 10 wygrywa, a 2 losy uprawniają do kolejnego losowania. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej przy zakupie jednego losu.

Zadanie 4. Mamy dwie urny. W pierwszej urnie są 4 kule białe i 2 czarne, a w drugiej 3 czarne i 3 białe. Rzucamy kostką do gry i jeśli wypadnie 1 lub 2 oczka, to losujemy kulę z pierwszej urny.

W przeciwnym wypadku losujemy kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo,

że w wyniku tego doświadczenia wylosujemy kulę białą?

Zadanie 5. W pudełku znajduje się 10 cukierków czekoladowych, 8 krówek i 6 cukierków owocowych. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągniemy dwa cukierki czekoladowe.

Zadanie 6. Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że w trzecim rzucie wypadła reszka.

Zadanie 7. W ogrodzie dziadka Adama rośnie dwadzieścia drzew, w tym siedem to drzewa owocowe. Na sześciu drzewach ptaki uwiły sobie gniazda, z czego dwa z nich są na drzewach owocowych. Dziadek pozwolił Adamowi bawić się w ogrodzie, ale zabronił mu wchodzić na te drzewa, na których są ptasie gniazda. Adam losowo wybrał sobie drzewo, na które zamierza wejść.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że jest to drzewo, na które nie wolno mu wejść.

Zadanie 8. Salon samochodowy prowadzi sprzedaż aut krajowych i zagranicznych. Ze względu na atrakcyjność salon sprzedaje dwa razy więcej pojazdów krajowych niż zagranicznych. W czasie transportu ulega uszkodzeniu 0,9% liczby samochodów krajowych i 1,5% liczby samochodów zagranicznych. Klient dokonał zakupu auta w salonie. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) zakupił auto bez uszkodzeń, b) zakupił samochód posiadający uszkodzenia.

Temat: ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ RÓŻNYCH Z PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zadanie 1. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) sześciu oczek w pierwszym rzucie,
b) sześciu oczek w drugim rzucie,
c) sumy oczek równej 6,
d) iloczynu oczek równego 6,
e) iloczynu oczek większego od 20,
f) iloczynu oczek mniejszego od 14,
g) sumy oczek podzielnej przez 3.

Zadanie 2. Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy jednocześnie dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) dwóch liczb parzystych,
b) dwóch liczb nieparzystych,
c) dwóch liczb, których suma jest parzysta.

Zadanie 3. Z pojemnika, w którym znajdują się 3 kule białe, 2 czarne i 4 zielone losujemy kolejno 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania :

a) kul trzech kolorów, b)kul jednego koloru, c) dwóch kul białych.

Zadanie 4. Z szuflady, w której znajduje się 10 piłek tenisowych, w tym 6 nowych wyjmujemy 4 piłki. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) 4 piłek nowych
b) 2 piłek nowych
c) Co najmniej 3 piłek nowych

Zadanie 5. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
a) pięciu kierów,
b) dwóch kierów i trzech pików,
c) dwóch kierów,
d) dwóch asów.

Zadanie 6. Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ wybieramy losowo jedną. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
a) liczby parzystej,
b) liczby podzielnej przez 3,
c) liczby parzystej lub podzielnej przez 4.

Zadanie 7. Rzucamy dwa razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
a) dokładnie raz orła, b) co najmniej raz orła.

Zadanie 8. Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia:
a) dokładnie dwa razy orła,
b) co najmniej dwa razy reszki,
c) kolejno reszki, orła, orła.

Zadanie 9. Z klasy liczącej 12 dziewcząt i 8 chłopców wybieramy pięcioosobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń, że w skład delegacji wejdą:
a) 3 dziewczyny i 2 chłopców,
b) sami chłopcy,
c) co najmniej 3 chłopców.

Zadanie 10. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 3 czerwone losujemy jedną kulę, zapisujemy jej kolor i wrzucamy do urny. Ponownie losujemy kulę z urny i zapisujemy jej kolor. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano:
a) 2 kule czerwone, b) kulę czerwoną i białą.

Zadanie 11. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 3 czerwone losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) 2 kul czerwonych, b) kuli białej i czerwonej.

Zadanie 12. Wśród sześciu kart znajdują się 4 karty czerwone i 2 czarne. Karty te tasujemy, wyciągamy losowo cztery razy po jednej karcie i układamy je w jednym rzędzie w kolejności losowania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) w rzędzie znajdują się tylko karty czerwone,
b) w rzędzie znajdują się dokładnie dwie karty czerwone,
c) w rzędzie pierwsza i trzecia karta są czerwone.

Zadanie 13. Zdarzenia A i B są zdarzeniami przestrzeni Ω i spełniają warunki: $A \subset B \;\; i \;\; P(A') = \frac{2}{3},\; P(B') = \frac{1}{3}$. Oblicz $P(A \cap B) \;\; i \;\; P(A' \cup B')$.

Zadanie 14. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba trzycyfrowa ma wszystkie cyfry różne od 1 i jest liczbą parzystą.

Zadanie 15. Spośród cyfr 1, 2, 3, …, 9 losujemy kolejno bez zwracania 3 cyfry i tworzymy z nich liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

A- otrzymana liczba jest nieparzysta
B- otrzymana liczba jest podzielna przez 25,
C- otrzymana liczba jest większa od 237

Zadanie 16. Bal studniówkowy rozpocznie się polonezem. W pierwszej parze tańczyć będą dyrektor szkoły (mężczyzna) i uczennica z klasy trzeciej, a w następnych parach pozostali uczniowie klasy trzeciej. Do tej klasy uczęszcza 17 dziewcząt i 16 chłopców, są wśród nich Alicja, Ewa i Bartek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) Alicja będzie tańczyć z dyrektorem,
b) Ewa i Bartek zatańczą razem w trzeciej parze,

Zadanie 17. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby dwucyfrowej o niepowtarzających się cyfrach, takich, że cyfra jedności jest większa od 4, a cyfra dziesiątek jest mniejsza od 8.

Zadanie 18. W jednym dniu uczeń otrzymał dwie oceny: jedną z języka polskiego, drugą z matematyki. Prawdopodobieństwo, że dostał co najmniej jedną piątkę jest równe 0,7, że dostał piątkę z języka polskiego jest równe 0,4.

Oblicz prawdopodobieństwo, że dostał piątkę z matematyki, jeżeli prawdopodobieństwo, że dostał piątkę z obu przedmiotów jest równe 0,2.

Zadanie 19. Z pojemnika, w którym są trzy losy wygrywające i cztery losy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy dokładnie jeden los wygrywający.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ obliczać wartości wyrażeń z silnią
- ✓ obliczać wartości wyrażeń w których występuje symbol Newtona
- ✓ korzystać z wzorów na liczbę permutacji
- ✓ obliczać liczbę wariacji z powtórzeniami i wariacji bez powtórzeń
- ✓ korzystać z wzorów na liczbę kombinacji
- ✓ obliczyć zadania w których stosuje się wzór na prawdopodobieństwo klasyczne
- ✓ stosować własności prawdopodobieństwa
- ✓ rozwiązywać zadania z prawdopodobieństwa warunkowego
- ✓ rozwiązywać zadania z prawdopodobieństwa całkowitego
- ✓ rozwiązywać zadania wieloetapowe korzystając z metody drzewka.

Zadanie 1. Rzucamy jeden raz symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) parzystej liczby oczek,
b) liczby oczek podzielnej przez 3,
c) liczby oczek parzystej i podzielnej przez 3,
d) liczby oczek parzystej lub podzielnej przez 3.

Zadanie 2. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby parzystej,
b) liczby podzielnej przez 3,
c) liczby podzielnej przez 4,

d) liczby podzielnej przez 5,
e) liczby parzystej lub podzielnej przez 3,
f) liczby podzielnej przez 3 i przez 4,
g) liczby pierwszej.

Zadanie 3. Z talii 52 kart wybieramy losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) karty koloru pikowego,
b) asa,
c) karty koloru pikowego lub asa,
d) karty młodszej od piątki,
e) karty starszej od trójki.

Zadanie 4. Pięciu chłopców i pięć dziewczynek ustawia się w szeregu w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że żadne dwie osoby tej samej płci nie stoją obok siebie.

Zadanie 5. Ze zbioru liczb {1,2,3,4,5} losujemy dwie liczby i zapisujemy w kolejności wylosowania. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 5.

Zadanie 6. Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w sumie co najmniej 8 oczek?

Zadanie 7. Ze zbioru cyfr {1,2,3,4,5,6,7} losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i zapisujemy je w kolejności losowań otrzymując liczbę dwucyfrową. Ile spośród tych liczb jest parzystych?

Zadanie 8. Wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, a suma zdarzeń $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Oblicz prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B.

Zadanie 9. Do worka wrzucono 50 losów loteryjnych w tym 15 wygrywających. Wyciągamy dwa losy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oba losy będą wygrywające?

Zadanie 10. Pan Kowalski zapomniał szyfr do sejfu. Szyfr składa się z pięciu cyfr, a pan Kowalski pamięta tylko, że pierwsza z cyfr na pewno jest piątką, a ostatnia natomiast na pewno nie była siódemką. Ile różnych możliwych pięciocyfrowych ciągów może być zapomnianym szyfrem?

Zadanie 11. Rzucamy jednocześnie monetą i kostką do gry.

a) Wypisz przestrzeń zdarzeń elementarnych i określ jej moc.
b) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że wypadnie orzeł i parzysta liczba oczek.
c) Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie reszka i co najmniej 3 oczka.

Zadanie 12. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę.

a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   A- Losowo wybrana karta jest pikiem
   B- Losowo wybrana karta jest asem
b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń $A \cap B \quad oraz \quad A \cup B$.

Zadanie 13. Losujemy jedną liczbę spośród liczb naturalnych dwucyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo, że ta liczba jest podzielna przez 15.

Zadanie 14. Spośród cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6 losujemy kolejno dwa razy po jednej cyfrze ze zwracaniem. Tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że pierwsza z wylosowanych cyfr jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia liczby większej od 43.

Zadanie 15. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo następującego zdarzenia:

A – w każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek

B – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą większą od 9

C – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą i większą od 9.

Zadanie 16. Marek ma wziąć udział w konkursie, w którym będzie odpowiadał na pytania z biologii lub chemii. Wybór przedmiotu będzie dokonany przez losowanie. Jeżeli zostanie wylosowana biologia, to prawdopodobieństwo zdarzenia, że Marek zdobędzie nagrodę jest równe 0,5, a jeżeli będzie to chemia, to prawdopodobieństwo zdobycia nagrody przez Marka jest równe 0,9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Marek zdobędzie nagrodę?

Zadanie 17. Obliczono, że jeżeli uczeń systematycznie odrabia zadaną pracę domową, to jego szanse na zdanie egzaminu są równe 0,8, jeśli niesystematycznie, to jego szanse są równe 0,4. Zakładając, że $\frac{3}{4}$ liczby uczniów danej klasy systematycznie odrabia zadane prace, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany uczeń zda egzamin.

Zadanie 18. W pęku trzydziestu kluczy, z których część jest w kolorze złotym, a reszta w srebrnym, dziesięć jest firmy Gerdus i dwadzieścia firmy Yetus. W kolorze złotym są dwa klucze firmy Gerdus, a pięć firmy Yetus. Wybieramy losowo jeden klucz. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że klucz jest srebrny.

Zadanie 19. W pojemniku znajdują się kule: 4 białe, 5 niebieskich i 3 żółte. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losując dwie kule z tego pojemnika, wylosujemy kule tego samego koloru.

Zadanie 20. W pierwszym pojemniku znajdują się kule: 2 białe,3 niebieskie i 5 żółtych, a w drugim pojemniku są 3 kule białe, 4 żółte i 2 niebieskie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losując po jednej kuli z każdego pojemnika, wylosujemy kule białą i niebieską.

Zadanie 21. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: $A \cup B$, A ∩ B, A \ B i B \ A, jeżeli $B \subset A$, $P(A) = 0{,}7$ i $P(B) = 0{,}4$.

Zadanie 22.

a) Oblicz P(A ∩ B) i P(A\B), jeżeli wiadomo, że P(A) = 0,3 , P(B) = 0,8 i P($A \cup B$) = 0,9.

b) Oblicz P(A ∩ B) i P(B \ A), jeżeli wiadomo, że P(A) = 0,6 , P(B) = 0,7 i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym.

c) Oblicz P($A \cup B$) i P(A \ B), jeżeli wiadomo, że P(A) = $\frac{1}{4}$, P(B) = $\frac{2}{3}$ i A ∩ B jest zdarzeniem niemożliwym.

Zadanie 23. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, wiedząc, że:

a) 9 P(A) · P(A') = 2

b) $\frac{P(A)}{P(A')} = 3$

Zadanie 24. W pierwszej urnie jest 8 kul białych i 2 czarne, a w drugiej urnie są 2 kule białe i *n* czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli z pierwszej urny jest o 0,2 mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli z drugiej urny. Oblicz *n*.

Bibliografia:

1. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury-podręcznik do matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych- zakres podstawowy*, Wydawnictwo Nowa Era, 2012.
2. Babiański W., Chańko L., Ponczek D., *Matematyka 1- podręcznik dla szkół ponadgimnazjalnych- zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Nowa Era, 2011.
3. Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., *Matematyka 1 – ćwiczenia i zadania dla szkół ponadgimnazjalnych- zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Nowa Era, 2012.
4. Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., *Matematyka 2 – ćwiczenia i zadania dla szkół ponadgimnazjalnych - zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Nowa Era, 2012.
5. Cewe A., Nahorska H., Kruk M., Krawczyk M., *Matematyka w otaczającym nas świecie – podręcznik dla klasy 2- zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Podkowa, 2009.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matematyka w otaczającym nas świecie – zbiór zadań dla klasy 2 – zakres podstawowy*, Wydawnictwo Podkowa, 2008.
7. Cewe A., Kobierowska J., Nahorska H., Stepuro I., Witkowska J., *Matura z matematyki od roku 2010 – zbiór zadań maturalnych z zakresu rozszerzonego*, Wydawnictwo Podkowa, 2009.
8. Gałązka K., *Obowiązkowa matura z matematyki 2012- zakres podstawowy*, Wydawnictwo Operon, 2011.
9. Gębura A., *Przed maturą – zadania z rozwiązaniami - zakres podstawowy*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, 2015.
10. Karpiński M., Dobrowolska M., Braun M., Lech J. *Matematyka 1 – podręcznik dla liceum i technikum – zakres podstawowy*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2002.
11. Masłowska D., Masłowski T., Makowski A., Nodzyński P., Słomińska E., Strzelczyk A., *Testy maturalne dla poziomu podstawowego*, Wydawnictwo Aksjomat, 2009.
12. Molęda A., Gawrońska – Popa D., *Procenty w otaczającym nas świecie*, Wydawnictwo Podkowa, 2011.
13. Przychodna A., Łaszczyk Z., *Matematyka poznać zrozumieć – podręcznik dla klas 1-zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo WSiP, 2013.
14. Wesołowski M., *Zbiór zadań z matematyki, część 1 - zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Nowa Era, 2013.
15. Zamek-Gliszczyński T., *Zadania powtórkowe przed maturą - zakres podstawowy*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, 2014.
16. Arkusze maturalne dostępne na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej www.cke.pl

Zespół redakcyjny:
Wiesława Fiszeder, Agata Gawrońska, Ludmiła Grzegórska, Agata Niezgoda, Anna Piotrowska, Ewa Tomaszewska-Guttfeld, Anna Tuczyńska, Joanna Wojtczak-Różańska.
Projekt okładki: Kacper Rostkowski
Rok szkolny 2017/2018