Spis treści:

1. LICZBY RZECZYWISTE I DZIAŁANIA NA NICH

Zbiór liczb **naturalnych**: N ={0,1,2,3,…}

Zbiór liczb naturalnych dodatnich: N^+ ={1,2,3,…}

Zbiór liczb **całkowitych**: C ={…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…}

Zbiór liczb całkowitych dodatnich: $C^+ = N^+$

Zbiór liczb całkowitych ujemnych: $C^- = \{...,-3,-2,-1\}$

Zbiór liczb **wymiernych** W, to zbiór liczb, które można przedstawić w postaci ułamka dwóch liczb całkowitych. Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego okresowego (np. $0;\ 2;\ -3;\ \frac{4}{7};\ -1\frac{2}{13};\ -1{,}6;\ 5{,}(7);\ 100$).

Zbiór liczb **niewymiernych** NW, to zbiór liczb, które nie są wymierne, to znaczy nie można ich przedstawić w postaci ułamka dwóch liczb całkowitych.
Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe (np. $\sqrt{2}, -\sqrt[3]{4}, \pi, \frac{\sqrt{5}}{3}, -2\pi+1$).

Zbiór liczb **rzeczywistych** $R = W \cup NW$.
Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada na osi liczbowej dokładnie jeden punkt. Każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada tylko jedna liczba rzeczywista.

Liczbę naturalną nazywamy **liczbą pierwszą**, jeżeli posiada ona dokładnie dwa dzielniki: dzieli się tylko przez 1 i przez samą siebie.
Przykłady liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,…

Liczbę naturalną, która nie jest pierwsza, nazywamy **liczbą złożoną**.
Przykłady liczb złożonych: 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18,…

Liczbą przeciwną do liczby a nazywamy liczbę $-a$.

Liczbą odwrotną do liczby a nazywamy liczbę $\frac{1}{a}$.

Największym wspólnym dzielnikiem dwóch liczb naturalnych a i b (oznaczenie: NWD(a,b)), nazywamy największą z liczb, przez którą dzielą się liczby a i b.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i b (oznaczenie: NWW(a,b)), nazywamy najmniejszą z liczb, które dzielą się przez liczby a i b.

Temat: ZBIORY I DZIAŁANIA NA NICH

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, a więc nie definiujemy go.

Pojęciem pierwotnym jest także **element zbioru**.

Zbiory oznaczamy dużymi literami alfabetu, elementy zbioru - małymi literami.

Używamy też następujących symboli:

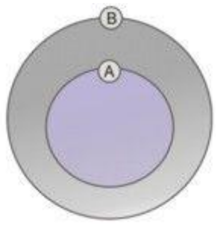
$\in$ - czytamy: należy do; $\not\in$ - czytamy: nie należy do;

a $\in$ A czytamy: "element a należy do zbioru A"

a $\not\in$ A czytamy: "element a nie należy do zbioru A"

Jeżeli zbiór X składa się z elementów a, b, c, to piszemy X={a, b, c}.

Zbiór pusty jest to taki zbiór, do którego nie należy żaden element.
Zbiór pusty oznaczamy symbolem **Ø**.



Jeżeli każdy element zbioru A należy do zbioru B , to mówimy, że zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B (zbiór A zawiera się w zbiorze B) i oznaczamy: $A \subset B$.

Zadanie 1.Sprawdź, czy dla zbiorów A i B zachodzi zależność: $A \subset B$ lub $B \subset A$.

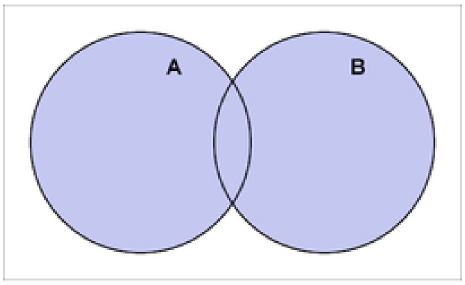
a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \ \ B = \{0, 2, 4\}$
b) $A = \{-1, 0, 1, 2\}, \ \ B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 9\}$
c) $A = \{-1, 0, 1, 2\}, \ \ B = \{-2, 0, 2, 4\}$
d) $A = \{1, 3, 6\}, \ \ B -$ zbiór liczb naturalnych mniejszych od 7
e) $A = \{2, 4, 6\}, \ \ B -$ zbiór liczb parzystych.

Zadanie 2. Sprawdź, które z podanych zbiorów są równe:

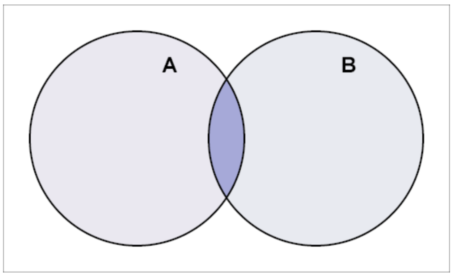
a) $A = \{\ 1, 2, 3, 4\}, \ \ B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \ \ C = \{1, 2, 3, 4\}$
b) $A = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, -(-2)^2\right\}, B = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}, \ C = \{1, 4, \sqrt{\frac{1}{4}}, \ \sqrt[3]{8}\}.$

Działania na zbiorach

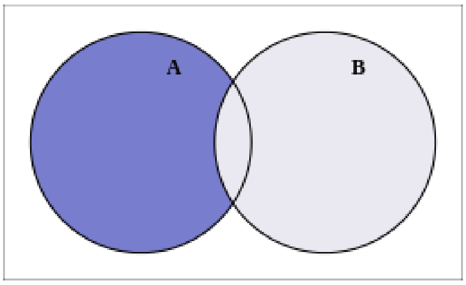
$A \cup B$ - suma zbiorów A i B



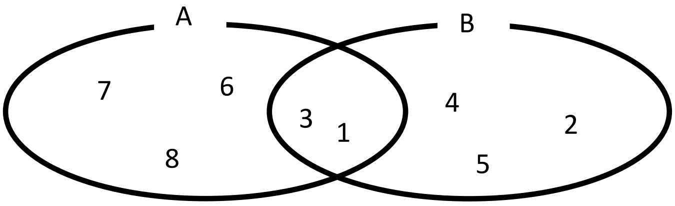
$A \cap B$ - iloczyn zbiorów A i B



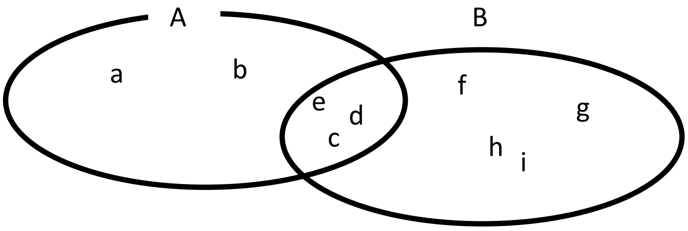
$A \setminus B$ - różnica zbiorów A i B



Zadanie 3. Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów: $A, B \ \ oraz\ A \cap B$.



Zadanie 4. Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów: $A, B, \ \ A \cup B$.



Zadanie 5. Wypisz elementy zbioru $A \cap B$:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \ B = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\}$

b) $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \ B -$ zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 3.

Zadanie 6. Wypisz elementy zbioru $A \cup B$:

a) $A = \{2, 3, 4\}, \ B = \{1, 3, ,5, 7\}$

b) A- zbiór naturalnych dzielników liczby 8,
B- zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3 i mniejszych od 10.

Zadanie 7. Wyznacz zbiory $A\backslash B$, $B\backslash A$:

$a)\ A = \{0, 2, 6, 4, 8\},\ B = \{0, 1, 2, 3\}$ $b)\ A = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\},\ B = \{0, \sqrt{2}, \sqrt{4}\}$

$c)\ A = \{2, 4, 6, 8\},\ B = \{-7, -5, -3, -1\}$.

Zadanie 8. Które z podanych zbiorów są rozłączne ze zbiorem {2, 3, 4}:

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\quad B = \{1\},\ C = \{2, 3, 4\},\ D = \{5, 6\},\ E = \emptyset?$$

Zadanie 9. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, jeżeli:

a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 3, 5, 7\}$

b) $A = \{-5, -3, -1, 0, 1, 6\}$, $B = \{-3, 3, 6, 7\}$

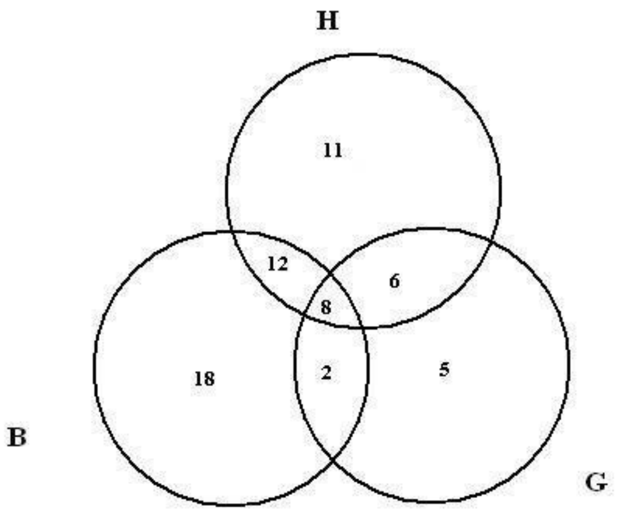
c) $A = \{-2, 0, 2, 4\}$, $B = \{-4, 3, 7\}$

d) $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$, $B = \{0, -1\}$

e) $A = \{-2, 0, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 7\}$.

Zadanie 10. Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów:

a) $B \cup G \cup H$
b) $B \cap H$
c) $B \cap G$
d) $B \cap G \cap H$
e) $H\backslash B$
f) $G\backslash H$
g) $H\backslash(H \cup G)$



Temat: LICZBY NATURALNE

Zadanie 1. Wypisz dzielniki naturalne liczby:

a) 6 b)16 c)23 d)55 e)63.

Cechy podzielności liczb (przypomnienie)

Liczba jest podzielna przez:

- **2**, gdy jej ostatnią cyfrą jest 2, 4, 6, 8 lub 0
- **3**, gdy suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 3
- **4**, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4
- **5**, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5
- **6,** gdy dzieli się bez reszty prze 2 i przez 3
- **8,** gdy trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 8
- **9**, gdy suma jej cyfr jest liczba podzielną przez 9
- **10,** gdy jej ostanią cyfrą jest 0.

Zadanie 2. Nie używając kalkulatora, wskaż zdania prawdziwe:

a) Liczba 45984 jest podzielna przez 2
b) Liczba 21534 jest podzielna przez 3
c) Liczba 4984321 jest podzielna przez 4
d) Liczba 60000700 jest podzielna przez 4
e) Liczba 6753 jest podzielna przez 9
f) Liczba 18945 jest podzielna przez 5.

Zadanie 3. Wypisz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 30.

Zadanie 4. Podaj wszystkie liczby pierwsze:
a)parzyste b) mniejsze od 16 c)większe od 3 i mniejsze od 25.

Zadanie 5. Ze zbioru $A = \{0, 1, 3, 5, 9, 11, 12, \sqrt{169}, 25, 27, 31, 50, 24561\}$ wypisz wszystkie liczby:
a)wielokrotności liczby 3 b)liczby złożone c)liczby nieparzyste.

Zadanie 6. Które spośród liczb: 2, 3, 4, 5, 6, 9 są dzielnikami podanej liczby?

a) 256 b) 294 c) 405 d)588 e) 648.

Zadanie 7. Zapisz podane liczby w postaci iloczynu czynników pierwszych:

a) 54 b) 225 c)540 d)600 e)1500.

Zadanie 8. Rozłóż na czynniki pierwsze podane liczby, a następnie oblicz ich największy wspólny dzielnik NWD i najmniejszą wspólną wielokrotność NWW:
a) 54 i 225 b)175 i 245 c)33 i 363 d)102 i 189
e)145 i 150 f)165 i 770 g)300 i 990 h) 546 i 306 .
i) 12, 18 i 96 j) 75, 120 i 96.

Zadanie 9. Podaj pięć elementów następujących podzbiorów zbioru liczb naturalnych:

a) zbiór wielokrotności liczby 7
b) zbiór kwadratów liczb naturalnych
c) zbiór liczb nieparzystych większych od 100.

Zadanie 10. Podaj wszystkie elementy zbiorów:

a) zbiór naturalnych dzielników liczby 12
b) zbiór jednocyfrowych liczb pierwszych.

Zadanie 11. Podaj trzy kolejne liczby:

a) Parzyste, z których pierwszą jest 2n
b) Nieparzyste, z których pierwszą jest 2n+1.

Zadanie 12. Uzasadnij, że suma:

a) trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9
b) czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

Temat: LICZBY CAŁKOWITE

Zadanie 1. Wykonaj dodawanie:

a) $-5+(-3)+7+2+(-1)$

b) $2+12+(-15)+(-7)$

c) $2+1+8+9+(-10)+[-8+(-2)]$.

Zadanie 2. Wykonaj odejmowanie:

a) $5-(-2)-(-3)-8$

b) $2-(-2)-(-7)-7-15$.

Zadanie 3. Oblicz:

a) $-3\big(1-(-4)\big)$

b) $\big(-2\cdot(-3)+2\cdot(-3)\big)\cdot 5\cdot 2$

c) $2+3(5-1)$

d) $-2+(4-2)\cdot 3$

e) $5(6-10)+3(8-5)$

f) $-3(4-5)+7(8-6)$

g) $\big((5-2)+7\big)\cdot 625+12-3\cdot 4$

h) $(48:2-36):3$

i) $48:2-36:3$

j) $4\cdot 6:3-2+20:5\cdot 2$

k) $[4\cdot(6:3-2+20):5]\cdot 2$

l) $180:9\cdot 5$

m) $180\cdot 30:15:3$.

Zadanie 4. Uzupełnij tabelkę:

a	-10		8-11	5+(-3)		2-(-5)	
-a		8			-5		$20:4\cdot 5$

Zadanie 5. Wskaż wśród podanych liczb liczby ujemne:

a) $17-10031$

b) $-12:(7-25)$

c) $-(-\big(-(3-5)\big))$.

Temat: ZBIÓR LICZB WYMIERNYCH I ZBIÓR LICZB NIEWYMIERNYCH

Zadanie 1. Ze zbioru: $A=\{-\frac{7}{8};-2\frac{2}{3};-\sqrt{25};0;2;2,(28);\sqrt{5};13\}$ wypisz liczby:

a) naturalne

b) całkowite

c) wymierne

d) niewymierne.

Zadanie 2. Uzupełnij tabelkę.

Liczba a	$\frac{1}{4}$					-5
Liczba odwrotna do a		$1\frac{1}{5}$		-1,2		
Liczba przeciwna do a			$-\frac{2}{3}$		$-1\frac{5}{8}$	

Zadanie 3. Uzupełnij tabelkę, wpisując w odpowiednie kratki znak „+", jeżeli dana liczba należy do zbioru.

	N	**C**	**W**	**NW**	**R**
-13					
0					
$-2,(27)$					
$\sqrt{2\frac{1}{4}}$					
$-\sqrt{3\frac{3}{9}}$					

Zadanie 4. Wskaż liczby niewymierne spośród liczb:

$$a = 1{,}3245, b = 0{,}38(42), c = \frac{2}{3}, d = \sqrt{32}, e = \sqrt{2} + 1, f = \pi, g = \frac{22}{7}.$$

Zadanie 5. Uzasadnij, że liczby $x = -2\frac{8}{9}$, y = 0,008, z = $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ są wymierne.

Zadanie 6. Uzasadnij, ze rozwinięcia dziesiętne ułamków $\frac{7}{11}$ i $\frac{107}{111}$ mają na 5555. miejscu po przecinku taką samą cyfrę.

Zadanie 7. Podaj dwie liczby wymierne zawarte między liczbami $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$.

Zadanie 8. Wskaż największą spośród liczb: 0,(27); 0,2(7); 0,2(27); 0,2(727).

Zadanie 9. Skróć ułamki:

a) $\frac{15}{25}$ b) $\frac{42}{63}$ c) $\frac{14}{28}$ d) $\frac{121}{11}$ e) $\frac{15}{225}$.

Zadanie 10. Rozszerz ułamki przez 5, a następnie przez 7:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{11}{3}$.

Zadanie 11. Która liczba jest większa:

a) $\frac{1}{3}$ czy 0,33 b) $\frac{15}{16}$ czy $\frac{14}{15}$ c) $-\frac{27}{45}$ czy -0,59?

Zadanie 12. Zamień ułamki mieszane na niewłaściwe:

a)$2\frac{1}{3}$ b)$3\frac{2}{5}$ c)$13\frac{1}{4}$ d)$70\frac{4}{5}$.

Zadanie 13. Wiedząc, że $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{15}{16}$, oblicz:

a) *a + b* b) *a – b* c) $a \cdot b$) d) *a : b* *e)* $\frac{a+b}{a \cdot b}$ f) $\frac{a-b}{a:b}$.

Zadanie 14. Oblicz:

a) $\frac{5}{8} + \frac{1}{16}$ b) $\frac{3}{4} - (-\frac{5}{6})$ c) $\frac{3}{13} \cdot \frac{52}{27}$

d) $1\frac{3}{7} \cdot 14$ e) $3\frac{1}{9} : 4\frac{1}{2}$ f) $(-8) : \frac{1}{4}$

g) $8\frac{5}{9} \cdot \left(\frac{-9}{11}\right)$ h) $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} : 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} : 2$.

Zadanie 15. Oblicz:

a)$3 + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8} + \frac{1}{16}$ c)$2\frac{5}{12} + 1\frac{1}{6} + 3\frac{3}{4}$

d)$1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{9}$, e)$5\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}$ f)$\frac{3}{4} - \left(-\frac{5}{6}\right)$

g)$3\frac{2}{7} - 1\frac{1}{2}$ h)$1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}$ i)$\frac{5}{8} \cdot 1\frac{1}{3}$

j)$2\frac{2}{5} \cdot 10$ k)$2{,}3 \cdot 2\frac{1}{2}$ l)$3\frac{2}{3} \cdot 0{,}9$

m)$\frac{3}{4} : 1\frac{1}{8}$ n)$4\frac{1}{2} : 3$ o)$3\frac{2}{5} : \frac{3}{10}$

p)$2\frac{4}{5} : 0{,}7$ r)r)$1\frac{2}{3} : 2\frac{7}{9}$ s)$5\frac{2}{5} : 1{,}7$.

Zadanie 16. Wykonaj działania:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) : \frac{1}{2}$ b)$\left(11\frac{1}{3} - 10\frac{1}{2}\right) : 2\frac{5}{6}$

c) $-6\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} : (-\frac{2}{9})$ d) $-5\frac{5}{9} : (5\frac{5}{6} - 10)$

e)$2\frac{2}{3} - 5\frac{1}{4} + 0{,}75$ f)$1\frac{7}{12} + 1\frac{5}{6} - \frac{1}{2} : \frac{2}{3}$

g)$\left(-2\frac{2}{3}\right) : \left(-1\frac{1}{5}\right) - \left(5\frac{1}{18} - 6\frac{1}{9}\right)$ h)$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} : 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} : 2$

i) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$ j) $\dfrac{3\frac{1}{4}-2\cdot 0{,}25}{2\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}+3{,}5\cdot 2\frac{1}{4}}$ k) $-2{,}15:(-6{,}45)+\frac{2}{5}:5{,}4$

l) $\left[4-6\left(2\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{8}+3\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}-0{,}375\right)\right]:(9{,}6:0{,}24)$ m) $\sqrt{10\cdot\dfrac{\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{3}{5}}}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}}}$.

Zadanie 17. Zapisz liczbę odwrotną do liczby:

a) $\frac{7}{15}:\frac{14}{5}$ b) $-2\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$ c) $-\frac{5}{42}:\frac{10}{21}$.

Zadanie 18. Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły:

a) 5,(6) b) 1,(37) c) 4,(159) d) 0,4(82).

Zadanie 19. Liczbę $0,(4)-0{,}2(1)$ zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 20. Zamień ułamek okresowy 0,(23) na ułamek zwykły.

Zadanie 21. Wykaż, że $0{,}0(8)-0{,}0(4)=\frac{2}{45}$.

Z**adanie 22.** Podaj liczbą odwrotną i liczbę przeciwną do liczby $a=1\frac{2}{3}-1{,}2\cdot\frac{9}{12}$.

Temat: POTĘGA O WYKŁADNIKU CAŁKOWITYM

Potęga o wykładniku naturalnym (przypomnienie)

$a^0=1$ dla $a\neq 0$ $a^1=a$ dla $a\in R$

Jeżeli $a\in R$ i $n\in N\setminus\{0\}$, to $a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$

$a^{n+1}=a^n\cdot a$ dla $a\in R, n\in N^+$

Zadanie 1. Uzupełnij tabelkę:

a) kolejne potęgi liczby 2

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2	4	8					256		

b) kolejne potęgi liczby 3

3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
1	3	9				

c) kolejne potęgi liczby 5.

5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5
1	5				

Zadanie 2. Oblicz:

a) 10^0 b) $(-4)^3$ c) 6^3 d) $(0{,}5)^4$

e) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$ f) $(-5)^2$ g) -5^2 h) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^4$.

Potęga o wykładniku całkowitym

Jeżeli $n \in N^+$ i $a \in R\setminus\{0\}$, to $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

W szczególności: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Zadanie 3. Oblicz:

a) 7^{-2} b) 5^{-3} c) $(-2)^{-6}$ d) $(-0{,}1)^{-3}$

e) -3^{-4} f) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}$ g) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^{-2}$ h) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-3}$

i) 10^{-4} j) $(0{,}5)^{-3}$ k) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-3}$ l) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

Działania na potęgach:

Jeżeli $m, n \in R$ i $a, b \in R^+$ albo $m, n \in C$ i $a, b \in R$ i $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (mnożenie potęg o tych samych podstawach)

$a^m : a^n = a^{m-n}$ (dzielenie potęg o tych samych podstawach)

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ (mnożenie potęg o tym samym wykładniku)

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (dzielenie potęg o tym samym wykładniku)

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (potęgowanie potęgi)

Zadanie 4. Przedstaw iloczyn w postaci potęgi:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3$ b) $4^2 \cdot 4^0$ c) $6 \cdot 6^2 \cdot 6 \cdot 6^0$.

Zadanie 5. Przedstaw iloczyn w postaci potęgi liczby 2:

a) $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$

b) $64 \cdot 32$

c) $32 \cdot 128$

d) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot 32.$

Zadanie 6. Zapisz w postaci potęgi liczby 10:

a) 10000^3

b) $(0{,}0001)^{-3}$

c) $(0{,}01)^2 \cdot 10^2 : 100^{-3}$

d) $1000^{-3} \cdot 0{,}001^{-4}.$

Zadanie 7. Przedstaw iloraz potęg w postaci potęgi:

a) $5^4 : 5$

b) $5^{-3} : 5^{-4}$

c) $18^3 : 18^{-5}$

d) $5^{-6} : 5^{-5}$

e) $2^{15} : 2^3 : 2^4$

f) $4^{15} : 4^{-5} : 4^{30}$

g) $6^{41} : 6^{24} : 6^{10} : 6^7.$

Zadanie 8. Oblicz:

a) $2^6 \cdot (\frac{1}{2})^6$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \cdot 63^{-3}$

c) $(0{,}5)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^2$

d) $1200^{-8} : 600^{-8}$

e) $125^{-2} : 25^{-2}.$

Zadanie 9. Skorzystaj z praw działań na potęgach i oblicz:

a) $(3^6)^{-2} \cdot 3^{10}$

b) $(4^{-3})^{-4} : 4^9$

c) $2^{-3} \cdot (0{,}5)^{-3}$

d) $(3)^{13} : (9)^{-3}$

e) $27^{50} : 81^{37}$

f) $16^{75} : 64^{49}$

g) $(3^7 \cdot 3^{-9}) : 3^{-6}$

h) $(2^3 - 2^2 \cdot 2^0) \cdot 0{,}25^{-4}$

i) $\dfrac{(b^2)^4 \cdot (b^3)^5}{(b^7)^2 \cdot (b^2)^2}$

j) $\frac{3^{30} \cdot 125^{10}}{15^{20}}.$

Zadanie 10. Oblicz:

a) $0{,}5 \cdot (2^3 \cdot 2^{112})^{-2}$

b) $15 \cdot 3^{17} - 6 \cdot 3^{17}$

c) $0{,}5 \cdot 3^{123} + 8{,}5 \cdot 3^{123}$

d) $5^{12} + 5^{12} + 3 \cdot 5^{12}$

e) $17 \cdot 2^{14} - 4^7$

f) $\frac{27^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{-2}}{3^{-0{,}5}}$

g) $\frac{4^{-6} \cdot 2^{-6}}{(8^{-2})^4} \cdot 5^2$

h) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-4}$

i) $\left[\left(1\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5\right] : \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}\right].$

Zadanie 11. Zaznacz liczby równe 2^{10}:

a) $2^3 \cdot 2^2 + 2^5$ b) $4^{-1} : 64^{-2}$ c) $(2^5)^5 - 2^{15}$

d) $((-2)^4)^{-5} : (2^{-10})^3$ e) 1024 f) $2 \cdot 2^8 + 2 \cdot 2^2$

g) $32 \cdot 16$ h) $16^{11} : (4 \cdot 2^4)^3$

Zadanie 12. Zapisz w postaci jednej potęgi: $2 \cdot 5^{201} + 3 \cdot 5^{201}$.

Zadanie 13.Wykaż, że liczba $a = 8^5 + 4^8 + 6 \cdot 16^4$ jest podzielna przez 5.

Zadanie 14. Wykaż, że liczba postaci $7^{100} - 7^{99} - 2 \cdot 7^{98}$ jest podzielna przez 10.

Temat: NOTACJA WYKŁADNICZA

Liczbę wymierną dodatnią a możemy przedstawić w postaci $a = x \cdot 10^n$, gdzie x jest liczbą większą lub równą 1 i mniejszą od 10 ($x \geq 1$ i $x < 10$), natomiast n jest liczbą całkowitą. Taki zapis liczby a nazywamy **notacją wykładniczą.**

Zadanie 1. Zapisz w postaci notacji wykładniczej:

a)32,0002 b)4120000000

c)0,00745001 d)189 000 0000 000

e)432 100 f)9 399 872 000 000 000

g)0,034 h)0,00005678

i) 46 000 000 000 j) 0,00037

k) 60 000 600 l) 0,0002002

i) $11{,}4 \cdot 10^4$ j) $0{,}235 \cdot 10^{13}$

k) $0{,}00345 \cdot 10^{-3}$ l) $76895 \cdot 10^{-25}$.

Zadanie 2. Stosując notację wykładniczą uzupełnij zapis:

a)1km = ………… m b)1m = …………mm

c)1km = ………… cm d)1kg = …………dag

e)1kg = ………… g f)1tona = ………… g

g) 25 arów = …………m^2

Zadanie 3. Oblicz wartość wyrażenia, odpowiedź zapisz w postaci notacji wykładniczej:

a) $2{,}4 \cdot 10^{-5} + 3{,}5 \cdot 10^{-6}$

b) $2{,}81 \cdot 10^{-3} - 1{,}1 \cdot 10^{-4}$

c) $(6 \cdot 10^{7}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3})$

d) $(8{,}4 \cdot 10^{3}) : (2{,}1 \cdot 10^{-7})$

e) $2{,}4 \cdot 10^{-5} + 3{,}5 \cdot 10^{-6}$

f) $\frac{5{,}6 \cdot 10^{12}}{1{,}6 \cdot 10^{8}}$

g) $\frac{9 \cdot 10^{-44}}{6 \cdot 10^{20}}$

h) 420 000 000 : 0,003

i) $2\,500\,000 \cdot 0{,}0015$

Zadanie 4. Przyjmijmy, że powierzchnia Polski wynosi $312\,685 km^2$. Wyraź tę wielkość w metrach kwadratowych i zapisz wynik w notacji wykładniczej.

Zadanie 5. Powierzchnia Europy wynosi około 10,5 $mln\ km^2$. Ile to arów? Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

Zadanie 6. Najcięższe zwierzę świata – płetwal błękitny – waży średnio 120 ton, a uważany za najlżejszego ptaka świata – koliberek hawański – 2g. Ile razy płetwal błękitny jest cięższy od koliberka hawańskiego? Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

Temat: PIERWIASTKI STOPNIA N I DZIAŁANIA NA NICH

$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = b}$, *$a$ – liczba podpierwiastkowa,*
b – pierwiastek n-tego stopnia z liczby a, *n – stopień pierwiastka*

Jeżeli $\boldsymbol{a \geq 0, b \geq 0\ \ i\ n \in N \setminus \{0,1\}}$, *to* $\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a.}$

PRAWA DZIAŁAŃ NA PIERWIASTKACH:

Jeżeli $\boldsymbol{a \geq 0, b \geq 0\ \ i\ n \in N \setminus \{0,1\}\ i\ m \in N \setminus \{0,1\}}$, *to:*

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Ponadto: $\sqrt{x^2} = |x|$ $\sqrt[3]{x^3} = x$

Zadanie 1. Oblicz:

a) $\sqrt{0}$
b) $\sqrt{1}$
c) $\sqrt{49}$
d) $\sqrt[3]{8}$
e) $\sqrt[11]{-1}$
f) $\sqrt{169}$
g) $\sqrt{196}$
h) $\sqrt{0,09}$
i) $\sqrt{0,36}$
j) $\sqrt{0,0064}$
k) $\sqrt{0,01}$
l) $\sqrt[3]{125}$
m) $\sqrt[3]{-64}$
n) $\sqrt[3]{216}$
o) $\sqrt[4]{10000}$
p) $\sqrt[5]{-32}$
r) $\sqrt{\frac{144}{121}}$
s) $\sqrt{\frac{225}{361}}$
t) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$
u) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$
w) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$
x) $\sqrt{5\frac{19}{25}}$
y) $\sqrt{2\frac{63}{81}}$
z) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Zadanie 2. Oblicz bez pomocy kalkulatora:

a) $\sqrt[3]{125}$
b) $\sqrt[7]{-1}$
c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$
d) $\sqrt[6]{\frac{16}{0,25}}$
e) $\sqrt{\sqrt{81}}$
f) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$
g) $\sqrt[3]{-56} : \sqrt[3]{7}$
h) $\sqrt[3]{-2} : \sqrt[3]{-500}$
i) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{-1} + \frac{1}{3}\sqrt[5]{-32}$.

Zadanie 3. Oblicz stosując działania na pierwiastkach:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$
b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{4,5}$
c) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{343}$
d) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$
e) $\sqrt[3]{375} : \sqrt[3]{3}$
f) $\sqrt{4 \cdot 225}$
g) $\sqrt{25 \cdot 121}$
h) $\sqrt{400 \cdot 361}$
i) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{6}$
j) $\sqrt[3]{125 : 8}$
k) $\sqrt[3]{-64} : \sqrt[3]{-343}$
l) $\sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{0,008}$
m) $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}} - \sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$
n) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt[3]{-0,125}$
o) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$
p) $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{3}$
r) $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{25}} =$
s) $\sqrt[5]{640} : \sqrt[5]{20}$

t) $\sqrt{20}:\sqrt{\frac{1}{5}}$ u) $\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{3}$ v) $\sqrt[3]{-6{,}4}:\sqrt[3]{0{,}1}$

w) $\sqrt[7]{\frac{2}{9}}\cdot\sqrt[7]{4{,}5}$.

Zadanie 4. Oblicz:

a) $\sqrt{100-36}$ b) $\sqrt{25+144}$ c) $\sqrt{144+81}$

d) $\sqrt{81-\sqrt{289}}$ e) $\sqrt{200+\sqrt{625}}$ f) $\sqrt{110+\sqrt{121}}$

g) $\sqrt{20-\sqrt{13+\sqrt[3]{27}}}$ h) $\sqrt{61+\sqrt{11-\sqrt[3]{8}}}$.

Zadanie 5. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{75}$ d) $\sqrt{128}$

e) $\sqrt{112}$ f) $\sqrt{108}$ g) $\sqrt[3]{54}$ h) $\sqrt[3]{56}$

i) $\sqrt[3]{40}$ j) $\sqrt[3]{192}$ k) $\sqrt[3]{162}$ l) $\sqrt[4]{64}$.

Zadanie 6. Włącz czynnik pod znak pierwiastka:

a) $2\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{7}$ c) $2\sqrt[3]{5}$ d) $3\sqrt[3]{2}$.

Zadanie 7. Uprość wyrażenia:

a) $6\sqrt{3}+5\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{8}-\sqrt{50}$

c) $\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$ d) $\sqrt{48}-\sqrt{192}+\sqrt{27}$

e) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$ f) $2\sqrt{125}+3\sqrt{180}-\sqrt{245}$

g) $\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{243}$ h) $\frac{3\sqrt{8}-\sqrt{50}}{2}$.

Zadanie 8. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ d) $\frac{4}{5\sqrt{11}}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ f) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}}$.

Zadanie 9. Wykonaj działania:

a) $\left(-3\sqrt{2}\right)^2$ b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{2}\right)^6$

d) $\left(\sqrt{3}\right)^3$ e) $\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ f) $\sqrt{10}\left(2\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)$

g) $(1-2\sqrt{5})(1+2\sqrt{5})$ h) $(2\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+2)$ i) $\left(\sqrt{11}-2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{11}-4\sqrt{2}\right)$

Temat: OBLICZANIE WARTOŚCI WYRAŻEŃ ARYTMETYCZNYCH WYMIERNYCH

Zadanie 1. Wykonaj działania:

a) $30:(-6)\cdot 5$ b) $(-8)^2$ c) -3^2

d) $-5(-4)^3+2(-2)^4$ e) $-6^2-2^5=$ f) $[4(-4)-6^2]-(-3)^2-2^4$

Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{\sqrt{1\frac{9}{16}-(-2)^2:1\frac{1}{3}}}{-5}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3\frac{3}{8}+(-3)^2:1{,}5}}{\left(6-2\cdot 2\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}}$

c) $(-3)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left[3\frac{1}{3}:\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]-2^4$

d) $\frac{3\cdot\sqrt{5\frac{4}{9}}-3^2:1{,}5}{\left(10-4\cdot 2\frac{1}{4}\right)\cdot(-2)^2}$

e) $\frac{4^2\cdot 4^{-1}-7^0}{1+2^{-3}}$

f) $\frac{2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{9^{-1}+\left(-\frac{1}{8}\right)^0}$

g) $\frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}:\sqrt{\frac{16}{81}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

h) $\frac{9\cdot\left(\frac{1`}{3}\right)^2+(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)}{\left(\frac{14}{20}\right)^{-1}:\sqrt{\frac{25}{49}}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}}$

i) $\frac{4\cdot 5^3\cdot 5^6-2\cdot 5^4\cdot 5^5}{2^{-1}\cdot 5^{-3}\cdot 5^{12}}$

j) $\frac{\sqrt[3]{27}-(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{-2{,}5+1{,}75\cdot\left(-1\frac{3}{7}\right)}\cdot\sqrt{1\frac{9}{16}}-1\frac{3}{4}\cdot(-0{,}3)^0.$

Zadanie 3. Oblicz dokładną wartość wyrażenia $\dfrac{1{,}7-\sqrt{0{,}81}\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}}{(-0{,}5)^{-2}}$,

a następnie wynik obliczeń zaokrąglij do części dziesiątych .

Zadanie 4. Oblicz iloraz liczby k przez liczbę l, gdzie:

$k=(-2)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 3-\sqrt{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2,\quad l=\sqrt{16+9}-\frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2.$

Zadanie 5. Znajdź liczbę przeciwną i liczbę odwrotną do liczby: $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)(2-6\cdot 1\frac{1}{3})}{3\frac{3}{5}+1{,}2:\frac{3}{5}}$.

Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI - LICZBY RZECZYWISTE

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ wyznaczyć sumę iloczyn i różnice zbiorów
- ✓ rozpoznać w zbiorze liczby: naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne, pierwsze, złożone
- ✓ wykonać działania na liczbach całkowitych, ułamkach zwykłych i dziesiętnych
- ✓ obliczyć wartości potęg o wykładnikach całkowitych
- ✓ stosować własności działań na potęgach
- ✓ stosować notacje wykładniczą
- ✓ obliczyć pierwiastki i wykonywać na nich działania
- ✓ wyłączyć czynnik przed znak pierwiastka i włączyć czynnik pod pierwiastek
- ✓ usunąć niewymierność z mianownika ułamka.

Zadanie 1. Wśród elementów zbioru

$\left\{\ -7{,}5;\ -4;\ -\pi;\ -1;\ -\frac{1}{3};\ 0;\ 0,(7);\ 1;\ \sqrt[3]{27};\ 4;\ 7\frac{1}{13};\ 12\ \right\}$ wskaż liczby:

a) naturalne b) wymierne c) całkowite d) niewymierne.

Zadanie 2. Dane są zbiory $A=\{0,2,3,5,8\}$ i $B=\{1,2,3,4\}$. Wyznacz ich sumę, iloczyn i obie różnice.

Zadanie 3. Oblicz:

a) $[3\cdot(8:2-4+15):5]\cdot 4$

b) $\frac{7^6}{7^5}$

c) $(4^{-3})^{-4} \cdot 4^9$

d) $\sqrt{25+144}$

e) $\frac{3^2 \cdot 3 - 5^0}{3 - 3^{-2}}$

f) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$.

Zadanie 4. Uprość wyrażenie $2\sqrt{8} - \sqrt{32} + 4\sqrt{200}$.

Zadanie 5. Wyznacz NWD liczb 150 i 625.

Zadanie 6. Liczba $\sqrt[3]{(-2)^2}$ jest:

A.ujemna B. niedodatnia C. niewymierna D.równa 4.

Zadanie 7. Liczba $(0{,}25)^{-2} \cdot 16^{-7}$ jest równa:

A. 4^{12} B. 4^{-12} C. 2^7 D. 2^{-7}.

Zadanie 8. Wyznacz cyfrę jedności liczby 123456a wiedząc, że ta liczba jest podzielna przez 18.

Zadanie 9. Przedstaw liczbę $(0{,}2)^0 \cdot 125^{-3} : 5^4$ w postaci potęgi o podstawie 5.

Zadanie 10. Która z liczb: $0,(24);\ 0{,}242;\ 0,(242);\ \frac{23}{99}$ jest najmniejsza?

Zadanie 11. Zapisz liczbę w postaci notacji wykładniczej

a)3 180 000 000 b)0,00745001 .

Zadanie 12. Wypisz wszystkie liczby pierwsze z przedziału (20; 35).

Zadanie 13. Podaj liczbą odwrotną i liczbę przeciwną do liczby

a) $a = 1\frac{2}{20} - 2{,}2 \cdot \frac{9}{22}$ b) $b = 3\frac{1}{3} - 1{,}1 \cdot \frac{5}{11}$.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1.Rozwinięcie dziesiętne skończone ma liczba:

A. $\frac{4}{12}$ B. $\frac{14}{35}$ C. $\frac{80}{110}$ D. $\frac{6}{7}$.

Zadanie 2. Nieprawdą jest, że:

A. 0,(15) < 0,15 B. $0,(15) = \frac{5}{33}$ C. 1,(7) > 1,777 D. 2,8(27) < 2,(827) .

Zadanie 3. Wskaż liczbę, która jest mniejsza od $\frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}} : \left(-\frac{1}{3}\right)$:

A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{9}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Zadanie 4. Dany jest zbiór liczb $\left\{-1;\frac{3}{5};\sqrt{2};1\frac{3}{4};0;\pi;\sqrt[3]{27};-4,7;\frac{\sqrt{5}}{2};-9\frac{2}{7}\right\}$. Liczby niewymierne zawarte w tym zbiorze to:

A. $\left\{\sqrt{2};\sqrt[3]{27};\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$ B. $\left\{\frac{3}{5};1\frac{3}{4};-4,7\right\}$ C. $\left\{-1;-4,7;-9\frac{2}{7}\right\}$ D. $\left\{\sqrt{2};\pi;\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

Zadanie 5. Liczb wymiernych w zbiorze $A=\left\{-12,(11);-\sqrt{0,49};-\frac{2}{\pi};0;\sqrt[3]{8};\sqrt{10};\sqrt{20\frac{1}{4}}\right\}$ jest: A. 3 B. 5 C. 2 D. 4

Zadanie 6. W zbiorze $A=\left\{0,(1);-\sqrt{0,49};\frac{-2}{\pi};0;\sqrt[3]{8};\sqrt{10};\sqrt{20\frac{1}{4}}\right\}$ znajdują się liczby wymierne. Ile jest tych liczb?

A. 3 B. 5 C. 2 D. 4

Zadanie 7. Liczbą wymierną jest:

A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ C. $\sqrt{4\frac{4}{9}}$ D. $\sqrt[3]{25}$

Zadanie 8. Wśród liczb naturalnych należących do przedziału < 44,50 >:

A. Jest jedna liczba pierwsza B. Są dwie liczby pierwsze

C. Są trzy liczby pierwsze D. Nie ma liczb pierwszych

Zadanie 9. Liczbą odwrotną do liczby $a=2\frac{2}{3}-2,1\cdot\frac{8}{21}$ jest:

A. $-\frac{28}{15}$ B. $-\frac{15}{28}$ C. $1\frac{13}{15}$ D. $\frac{15}{28}$

Zadanie 10. Liczbą odwrotną do liczby $a=1\frac{2}{3}-1,2\cdot\frac{9}{12}$ jest:

A. $-1\frac{7}{23}$ B. $1\frac{7}{23}$ C. $\frac{23}{30}$ D. $-\frac{7}{23}$

Zadanie 11. Wskaż największą spośród podanych liczb:

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 0,(8) C. $\frac{7}{8}$ D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

Zadanie 12. Wskaż największą spośród liczb:

A. $0,(34)$ B. $0,3(4)$ C. $0,3(34)$ D. $0,3(434)$.

Zadanie 13. Licznik pewnego ułamka jest równy 6. Jeśli licznik tego ułamka zmniejszymy o 2, a mianownik o 3, to wartość tego ułamka nie zmieni się. Jaki to ułamek?

A. $\frac{6}{10}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{6}{11}$ D. $\frac{6}{9}$

Zadanie 14. Która z poniższych liczb ma najwięcej dzielników naturalnych?

A.12 B. 50 C. 60 D. 110

Zadanie 15. Liczba $\sqrt{2}-2$ należy do przedziału

A. $\langle 0,1)$ B. $\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ C. $(-1,0)$ D. $(1,2\rangle$

Zadanie 16. Wartość wyrażenia $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}$ jest równa:

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{72}$

Zadanie 17. Liczbą większą od zera jest liczba:

A. $\frac{1}{3}-0,(3)$ B. $-\sqrt{3}+1\frac{7}{9}$ C. $4\frac{2}{3}-4\sqrt{3\frac{1}{16}}$ D. -2^2

Zadanie 18. Ile jest liczb całkowitych x spełniających warunek $\sqrt[3]{-12}<x<\sqrt{12}$?

A. 23 B. 12 C. 9 D. 6

Zadanie 19. Liczba 350 mln jest równa:

$A.$ $3,5\cdot 10^6$ B. $3,5\cdot 10^7$ C. $3,5\cdot 10^8$ D. $3,5\cdot 10^9$

Zadanie 20. Liczba 0,00023 jest równa:

$A.$ $2,3\cdot 10^{-5}$ B. $2,3\cdot 10^{-4}$ C. $2,3\cdot 10^{-6}$ D. $2,3\cdot 10^4$

Zadanie 21. Liczba $0,00035\cdot 10^{-3}$ zapisana w notacji wykładniczej ma postać:

$A.$ $3,5\cdot 10^7$ B. $0,35\cdot 10^0$ C. $3,5\cdot 10^1$ D. $3,5\cdot 10^{-7}$

2. POTĘGI I LOGARYTMY

Temat: POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM

$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}}$ $, gdzie\ a\in R^+, m\in N^+, n\in N^+\backslash\{1\}$

Zadanie 1. Oblicz:

a) $(-3)^3$ b) $(-3)^0$ c) 4^{-3}

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e) $49^{\frac{1}{2}}$ f) $16^{\frac{1}{4}}$

g) $27^{\frac{1}{3}}$ h) $3\cdot 81^{\frac{1}{4}}$ i) $125^{\frac{2}{3}}$

j) $36^{0,5}$ k) $32^{-\frac{3}{5}}$ l) $100^{\frac{1}{2}}$

m) $64^{-\frac{2}{3}}$ n) $16^{-\frac{1}{2}}$ o) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

p) $10000^{-\frac{3}{4}}$ r) $(0,75)^{-1}$ s) $32^{\frac{7}{5}}$

t) $\left(5\frac{11}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$

t) $25^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{3}}$

u) $4^{-\frac{1}{2}}+8^{-\frac{1}{3}}$

w) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$

Uwaga: W działaniach na potęgach o wykładnikach wymiernych obowiązują te same wzory jak dla poteg o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 2. Oblicz korzystając z własności potęg:

a) $7^6\cdot 7^{5,5}\cdot 7^{-11}$

b) $2^6\cdot 2^3 : 2^{8,25}$

c) $\frac{5^{700}\cdot 5^{-2,5}}{5^{698,5}}$

d) $\left(2^{-0,25}\right)^2$

e) $\left(9^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$

f) $\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^4$

g) $49^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{1}{3}}$

g) $216^{\frac{2}{3}}:6^2$

h) $\frac{3^7\cdot 9^{-2}}{3^{6,5}}$

i) $3\cdot 81^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{-3}$

j) $\frac{4^{\frac{1}{2}}\cdot 32^{-\frac{1}{5}}}{2}$

k) $2^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{2}$

l) $\frac{14^4}{2^5\cdot 7^3}$.

Zadanie 3. Przedstaw w postaci potęgi liczby 3:

a) 1

b) $3^8\cdot 3^8\cdot 3^8$

c) $\sqrt[7]{3}$

d) $\frac{1}{81}$

e) $\left(3^5\right)^7$

f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\frac{27\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$

h) $\sqrt{3}\sqrt[3]{3}$

i) $3^8+3^8+3^8$

j) $3\cdot 81^2\cdot 9^{-\frac{1}{2}}$

k) $27^0\cdot 3^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{5}}\cdot 9$.

Zadanie 4. Zapisz wyrażenia w postaci jednej potęgi:

a) $9^{-2}\cdot\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5\sqrt{5}}$

c) 2^{3^0}

d) $2^{20}\cdot 8^{40}$

e) $\sqrt{7^5}\cdot 7^{-\frac{3}{2}}$

f) $\sqrt[3]{4}\cdot 8^{-2}\cdot \frac{1}{16}$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{25}\cdot 5^{-4}}{125^{-\frac{2}{3}}}$

h) $8^{-3}\cdot 2^{\frac{1}{3}}:\frac{1}{16}$.

Zadanie 5. Zapisz wyrażenie $\dfrac{8^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}}{(0{,}25)^{-1}:32}$ w postaci potęgi liczby 2.

Zadanie 6. Zapisz wyrażenie $\dfrac{(125)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{5}\right)^{-1}}$ w postaci potęgi liczby 5.

Zadanie 7. Uzasadnij, że $\sqrt[6]{72}<\frac{9}{4}$.

Temat: LOGARYTM I JEGO WŁASNOŚCI

Logarytmem liczby dodatniej b przy dodatniej podstawie a różnej od 1 nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b, co zapisujemy $c=\log_a b$.

Gdy $a>0,\ a\neq 1\quad i\quad b>0,$ to $\boxed{\log_a b=c\quad\Leftrightarrow\quad a^c=b}$

Wyrażenie $\log_a b$ jest równe odpowiedzi na pytanie:

Do jakiej potęgi należy podnieść a, żeby otrzymać b ?

np. $\log_3 9=2$, bo $3^2=9$, $\log_2 8=3$, bo $2^3=8$

W szczególności: $\log_a 1=0$ $\log_a a=1$

Uwaga: Logarytm o podstawie 10 nazywamy logarytmem dziesiętnym.
Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$.

Zadanie 1. Oblicz:

a) $\log_7 49$

b) $\log_2\frac{1}{4}$

c) $\log 100$

d) $\log_5 125$

e) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

f) $\log_6 1$

g) $\log_{12} 12$ h) $\log_2 \frac{1}{2}$ i) $\log_3 \frac{1}{27}$

j) $\log 0{,}01$ k) $\log_4 64$ l) $\log_{0,5} 4$

m) $\log_{100} 10$ n) $\log_4 \frac{1}{4}$ o) $\log_3 \sqrt[3]{3}$

p) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ q) $\log_{11} 1$ r) $\log_{\sqrt{5}} 25$

s) $\log_2 \frac{1}{16}$ t) $\log_2 \sqrt{2}$ u) $\log_8 \frac{1}{2}$

v) $\log_{16} 4$ w) $\log_9 3$ x) $\log_{36} 6$

y) $\log_{\sqrt{3}} 3$ z) $\log_{\sqrt{3}} 9$ ź) $\log_{\sqrt{2}} 32$

Zadanie 2. Zapisz rozwiązanie równania jako logarytm pewnej liczby:

a) $2^x = 15$ b) $2^x = 100$

c) $3^x = 5$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 10$.

Zadanie 3. Oblicz x:

a) $\log_x 16 = 2$ b) $\log_7 \sqrt[4]{7} = x$ c) $\log_{25} x = \frac{1}{2}$

d) $\log_x 4 = \frac{2}{3}$ e) $\log_2 (x-1) = -3$ f) $\log_3 x = -2$

g) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ h) $\log_{\sqrt{3}} x = 4$ i) $\log_x \frac{1}{4} = -1$.

Zadanie 4. Oblicz

a) $\log_2(\log_3 9)$ b) $\log_{27}(\log_2 \sqrt[3]{2})$ c) $\log_2(\log_2 \sqrt[4]{2})$

Temat: LOGARYTM ILOCZYNU, ILORAZU ORAZ LOGARYTM POTĘGI

Własności działań na logarytmach:

Jeżeli $a \in R^{+} \setminus \{1\}, \ \ x, y \in R^{+}$, to :

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ (logarytm iloczynu)
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (logarytm ilorazu)
- $\log_a x^m = m \cdot \log_a x, \quad gdy\, m \in R.$ (logarytm potęgi)
- $a^{\log_a x} = x$

Zadanie 1. Oblicz korzystając z własności logarytmu:

a) $\log_2 80 + \log_2 0{,}1$

b) $\log 4 - \log 5 + \log 125$

c) $2\log 100$

d) $\log_2 7 - \log_2 56$

e) $\log 4 + \log 25$

f) $\log_5 100 - \log_5 4$

g) $\log_2 32 + \log_2 2$

h) $\log 15 + \log 50 - \log \frac{3}{4}$

i) $\log 40 - \log 8 + \log 200$

j) $2\log_3 6 - \log_3 4$

k) $2\log_2 16$

l) $\log_4 400 - 2\log_4 5$

l)$log_7 \frac{1}{2} + log_7 98$

m) $log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} - log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}$

n)$log_{0,2} 10 - log_{0,2} 250$

o)m) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}6 - \log_{\frac{1}{2}} 0{,}15$

p) $\log 6 - \log 2 - \log 3$

r) $\log 8 - 3\log 2$

s) $2\log_{\sqrt{3}} 27 + 6\log 10$.

Zadanie 2. Przedstaw wyrażanie w postaci logarytmu pewnej liczby:

a) $2 + \log 5$

b) $\log_2 10 - 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 6 - 2$ d) $4 - \log_3 36$.

Zadanie 3. Oblicz

a) $25^{\log_5 2}$ b) $2^{\log_2 5}$ c) $81^{\log_3 4}$

d) $4^{\log_2 3+1}$ e) $3^{2\log_3 4}$ f) $5^{2+\log_5 4}$

g) $4^{\log_4 6 - 2\log_4 3}$ h) $8^{\log_2 3 - 1}$ i) $4^{\log_2 5 + \log_8 3}$.

Zadanie 4. Oblicz x, gdy:

a) $\log x = 3\log 5 - \frac{1}{2}\log 9$ b) $\log_2 x = \log_2 10 + \log_2 5 - \log_2 25$.

Zadanie 5. Oblicz $log_3(2 + log_4 0{,}25)$.

Zadanie 6. Uzasadnij, że liczba $7^{\log 4} \cdot 7^{\log 250}$ jest całkowita.

Zadanie 7. Uzasadnij, że liczba $\frac{2^{\log_3 63}}{2^{\log_3 7}}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 8. Uzasadnij, że liczba $\log_6(\log_{64} 8) + \log_6(\log_{64} 4)$ jest całkowita.

Zadanie 9.Korzystając z własności logarytmów oblicz : $\log_6 x = 2\log_2 \sqrt{3} - \log_2 12$.

Temat: ZMIANA PODSTAWY LOGARYTMU

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeżeli $a, c \in R^+ \setminus \{1\}, b \in R^+,\quad to$ $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a.}}$

Zadanie1. Przedstaw podany logarytm w postaci logarytmu o podstawie c:

a) $\log_{0,1} 7,\ \ c = 10$ b) $\log_8 3,\ \ c = 2$ c) $\log_7 11,\ \ c = 49$

d) $\log\ \ 625,\ \ c = 0{,}1$ e) $\log_2 6,\ \ c = \frac{1}{2}$ f) $\log_{\frac{1}{3}} 12,\ \ c = 3$.

Zadanie 2. Oblicz korzystając z własności logarytmu:

a) $\frac{\log 8}{\log 2}$ b) $\frac{\log_7 0{,}1}{\log_7 10}$

c) $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$

d) $\log_3 13 \cdot \log_{13} 9$

e) $\log_3 7 \cdot \log_7 27$

f) $\frac{\log_{11} 8}{\log_{11} 15 - \log_{11} 30}$

g) $\frac{2\log 4 + \log 0{,}25}{\log 16 - \log 8}$

h) $\frac{\log_7 20 - \log_7 5}{2\log_7 2}$

i) $\frac{1 - \log_{24} 3}{\log_{24} 2}$

j) $\log_3 100 \cdot \log_{10} 27$

k) $\log_3 11 \cdot \log_{11} 17 \cdot \log_{17} 27$

l) $\log_3 2 \cdot \log_4 3$

m) $\log 2 \cdot \log_3 10 \cdot \log_2 3$

n) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – POTĘGI I LOGARYTMY

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ obliczyć wartości potęg o wykładnikach wymiernych
- ✓ stosować własności działań na potęgach do obliczania wartości wyrażeń
- ✓ obliczyć wartości logarytmów
- ✓ wykonać działania na logarytmach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę)
- ✓ stosować definicję logarytmu do rozwiązywania równań.

Zadanie 1. Zamień pierwiastek na potęgę:

a) $\sqrt[5]{5^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{3^2}}$ c) $\sqrt[7]{16}$ d) $\sqrt{\sqrt[5]{11^3}}$.

Zadanie 2. Oblicz:

a)) $27^{\frac{1}{3}}$

b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

c) $\left(\frac{125}{216}\right)^{-\frac{2}{3}}$

d) $\log_8 64$

e) $\log_{17} 1$

f) $\log_2 \frac{1}{32}$

g) $\log_{1000} 10$

h) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

i) $\log_4 0{,}5$

j) $\log_{0,5} \sqrt{32}$

k) $\log_2 16\sqrt{8}$

l) $\log_2(\log_3 81)$

m) $\log_5(\log 10)$

n) $\log_{0,1}(\log_6 6)$

Zadanie 3. Wykonaj działania:

a) $\log_3 45 - \log_3 5$

b) $2\log_5 10 - \log_5 4$

c) $3^{\log_3 6} + 81^{\log_3 4}$

d) $\frac{\log 25 + log4}{\log_2 16 - \log_2 8}$

e) $\log_9(\log_3 243 + \log_3 \frac{1}{81})$

f) $\log_4(\log_3(\log_2 8))$

g) $\log_8 \frac{1}{3} - \log_8 \frac{64}{3} + \log_9 \frac{1}{81}$

h) $25^{\log_5 4}$

i) $2\log_4 \frac{1}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$

j) $\frac{\log_{15} \frac{1}{49}}{\log_{15} 7}$.

Zadanie 4. Oblicz x, gdy:

a) $\log_5 x = 2$

b) $\log_9 3 = x$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$

d) $\log x = 2log3 + log4$

e) $\log_5(\log_3 x) = 0$

f) $\log_3 x = \sqrt{2}$.

Zadanie 5. Ile wynosi 25% liczby 4^{32}?

Zadanie 6. Zapisz liczbę $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 27^{-4}}{\sqrt[5]{3} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{3}}}$ w postaci potęgi o podstawie 3.

Zadanie 7. Uporządkuj liczby: $a = \left(8\sqrt{2}\right)^{-8}$, $b = \left(\frac{1}{64}\right)^{5}$, $c = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{62}$ w kolejności rosnącej.

Zadanie 8. Wykaż, że $3\log 100 - \log 1000 + 12\log 1 = 3$.

Zadanie 9. Uzasadnij, że liczba $\log 0{,}001 - \log_{0{,}01} 100$ jest ujemna.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Jeżeli a = $\sqrt[3]{-1\frac{91}{125}}$, to:

A. a jest liczbą niewymierną B. a = -1,1 C. a = -1,2 D. a = -1,3

Zadanie 2. Która równość jest fałszywa?

A. $\sqrt{10 \cdot 5} = 5\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10+5} = \sqrt{15}$ C. $\sqrt{10 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10-5} = \sqrt{5}$

Zadanie 3. Która równość jest prawdziwa?

$A.$ $\sqrt{16-9} = 1$ B. $\sqrt{16+4} = 6$ C. $\sqrt{111} = 11$ D. $\sqrt{25-9} = 4$

Zadanie 4. Która z podanych liczb jest liczbą wymierną?

$A.\ \sqrt[3]{1\frac{1}{8}}$ B. $\sqrt[3]{0{,}0001}$ C. $\sqrt[5]{-125}$ D. $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

Zadanie 5. Która liczba jest najmniejsza?

A. $\sqrt[8]{2^2\cdot 2^6}$ B. $\sqrt[6]{16\cdot 16}$ C. $\sqrt[4]{4\cdot 4^3}$ D. $\sqrt{8\cdot 8}$

Zadanie 6. Liczba $\sqrt[3]{(-8)^2}$ jest:

A.Ujemna B. niedodatnia C. niewymierna D. równa 4

Zadanie 7. Która z podanych liczb jest ujemna?

$A.\ \sqrt[3]{(-4)^2}$ B. $\sqrt[7]{(-1)^9}$ C. $-3{,}14\sqrt[3]{-2}$ D. $\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt[5]{-7}}$

Zadanie 8. Po uroszczeniu wyrażenia $\sqrt{20}-\sqrt{80}+\sqrt{125}$ otrzymamy:

A. $3\sqrt{5}$ B. $-\sqrt{25}$ C. $\sqrt{225}$ D. $11\sqrt{5}$

Zadanie 9. Po uroszczeniu wyrażenia $\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{75}$ otrzymamy:

A. $\sqrt{74}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $\sqrt{150}$ D. $12\sqrt{3}$

Zadanie 10. Iloczyn $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\cdot\sqrt[3]{2}$ jest równy:

$A.\ \sqrt[3]{12}$ B. 6 C. $2+\sqrt[3]{4}$ D. $2+2\sqrt[3]{2}$

Zadanie 11. Wyrażenie $2\sqrt{12}-\sqrt{27}$ można zapisać w postaci:

A. $3^{\frac{1}{2}}$ B. 3^{-1} C. $2\cdot 3^{\frac{1}{2}}$ D. $2\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$

Zadanie 12. Liczba $3^{30}\cdot 9^{90}$ jest równa:

A. 3^{210} B. 3^{300} C. 9^{120} D. 27^{2700}

Zadanie 13. Liczba $3^{\frac{8}{3}}\cdot\sqrt[3]{9^2}$ jest równa:

A. 3^3 B. $3^{\frac{32}{9}}$ C. 3^4 D. 3^5

Zadanie 14. Iloraz $32^{-3}:\left(\frac{1}{8}\right)^4$ jest równy:

A. 2^{-27} B. 2^{-3} C. 2^3 D. 2^{27}

Zadanie 15. Liczba $2^{-3}\cdot\sqrt[3]{8^2}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 16. Liczba $2^{40}\cdot 4^{20}$ jest równa:

A. 4^{40} B. 4^{50} C. 8^{60} D. 8^{800}

Zadanie 17. Liczba $7^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{7^5}$ jest równa:

A. $7^{\frac{4}{5}}$ B. 7^3 C. $7^{\frac{20}{9}}$ D. 7^2

Zadanie 18. Wartość wyrażenia $-(-a)^{-2}$ dla $a=-(-2)^{-2}$ jest równa

A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. -16 D. 16

Zadanie 19. Wyrażenie $7^{15}+9\cdot 7^{15}-3\cdot 7^{15}$ zapisane w postaci potęgi liczby 7, to

A. 7^{15} B. 7^{16} C. 7^{14} D. 7^{17}

Zadanie 20. Trzecia część liczby 9^{-10} jest równa:

A. 3^{-10} B. 9^{-9} C. 3^{-21} D. 3^{-19}

Zadanie 21. Liczba 32^{-8} przedstawiona w postaci potęgi liczby 16, to:

A. 16^{-8} B. 16^{-10} C. 16^{-12} D. 16^{-14}

Zadanie 22. Liczba wymierna $\frac{5^8+5^6}{5^6+5^4}$ zapisana w postaci potęgi liczby 5, to:

A. 5^1 B. 5^2 C. 5^3 D. 5^4

Zadanie 23. Większa od 1 jest liczba:

A. $3^{-\frac{1}{2}}$ B. 2^{-1} C. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ D. $(-2)^{-2}$

Zadanie 24. Liczba $\sqrt[5]{9}$ jest większa od:

A. $\sqrt{3}$ B. $3^{0,3}$ C. $\sqrt[9]{81}$ D. 3

Zadanie 25. Połową odwrotności sześcianu liczby 8^{19} jest:

A. 2^{170} B. 4^{-86} C. $\frac{1}{8^{57}}$ D. $\frac{1}{2^{170}}$

Zadanie 26. Wskaż liczbę, która nie jest równa $2^{\frac{5}{2}}$.

A. $4\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2^5}$ C. $2^{2,5}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}$

Zadanie 27. Liczba $5^{25}\cdot 25^{50}$ jest równa:

A. 5^{75} B. 125^{1250} C. 5^{125} D. 25^{50}

Zadanie 28. Liczba $5^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{5^5}$ jest równa:

A. $5^{\frac{4}{5}}$ B. 5^3 C. $5^{\frac{20}{9}}$ D. 5^2

Zadanie 29. Wskaż liczbę dwa razy większa od liczby $\left[(4,2)^{-1}\right]^{-8}\cdot(4,2)^{-6}$.

A. $\left[(8,4)^{-1}\right]^{-8}\cdot(8,4)^{-6}$ B. 17,64 C. $2\cdot(4,2)^{-14}$ D. 35,28

Zadanie 30. Wartość wyrażenia $(7^{-0,7}:7^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-0,9})^{\frac{1}{2}}$ jest równa:

A. 0,7 B. $\frac{1}{7}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

Zadanie 31. Wartość wyrażenia $5^{100}+5^{100}+5^{100}+5^{100}+5^{100}$ jest równa:

A. 5^{500} B. 5^{101} C. 25^{100} D. 25^{500}

Zadanie 32. Liczba $\log_3 36$ jest równa:

A. $2\log_3 6$ B. $\frac{1}{2}\log_3 72$ C. $\log_3 9\log_3 4$ D. $\log_3 20+\log_3 16$

Zadanie 33. Wartość wyrażenia $\log(\log 20+\log 5)$ jest równa:

A. 5 B. 2 C. 1 D. 0.

Zadanie 34. Liczba $8^{\log_2 3}$ jest równa:

A. 2 B. 24 C. 9 D. 27

Zadanie 35. Liczba $\log_7 2-\log_7 98$ wynosi:

A. 7 B. -2 C. 1 D. -1

Zadanie 36. Liczba $3\log_4 2-\frac{1}{2}\log_4 16$ jest równa:

A. $\log_4\frac{9}{256}$ B. 0,5 C. 2 D. $\frac{3}{2}\log_4\frac{1}{8}$

Zadanie 37. Wiemy, że $log_2 a=\sqrt{2}$ i $log_2 b=-\sqrt{2}$. Zatem liczbą niewymierną jest liczba:

A. $log_2 ab$ B. $log_2\sqrt{2}ab$ C. $\frac{log_2 a}{log_2 b}$ D. $log_2\frac{a}{b}$

Zadanie 38. Dane są liczby: $x = log_3 9$, $y = log_{16}\frac{1}{4}$, $z = log_{\frac{1}{5}}25$, $t = log_4 2$. Najmniejszą spośród tych liczb jest:

A.x B. y C. z D. t

Zadanie 39. Liczba $log_2(log20 + log5)$ jest równa:

A. 5 B. 2 C. 1 D. 0

Zadanie 40. Jeżeli $log2 = 0{,}30$, to wartość $log32$ jest równa:

A. $16 \cdot 0{,}30$ B. $5 \cdot 0{,}30$ C. $8 \cdot 0{,}30$ D. $10 \cdot 0{,}30$

Zadanie 41. Jeżeli $a = log_7 40$ i $b = 4$, to suma $a + b$ należy do przedziału:

A. (3,4) B. (4,5) C. (5,6) D. (6,7)

Zadanie 42. Jeżeli $log_2 a = 4$ i $log_4 b = 2$, to wartość wyrażenia $\sqrt{ab}$ jest równa:

A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

Zadanie 43. Jeżeli $log2 = a$ i $log3 = b$, to $log6$ jest równy:

A. ab B. $a + b$ C. $a - b$ D. $\frac{a}{b}$

Zadanie 44. Jeżeli $log9 = 0{,}95$, to wartość $log900$ jest równa:

A. 95 B. $2 \cdot 0{,}95$ C. $2 + 0{,}95$ D. 0,95

3. OŚ LICZBOWA I PRZEDZIAŁY LICZBOWE

Temat: OŚ LICZBOWA. ODLEGŁOŚĆ NA OSI LICZBOWEJ

Zadanie 1. Uporządkuj liczby w takiej kolejności, w jakiej leżą na osi liczbowej:

a) $\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{5}{12};\frac{2}{15}$ b) $2^0;\left(\frac{1}{2}\right)^{-1};2^3;\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}};4^{-\frac{1}{2}};\sqrt[3]{8^2}$.

Zadanie 2. Podaj przykład liczby wymiernej w , takiej, że:

a) $\frac{3}{7} < w < \frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{3} < w < \frac{1}{2}$ c) $0{,}999 < w < 1$ d) $\sqrt{5} < w < \sqrt{6}$.

Zadanie 3. Podaj przykład liczby niewymiernej p , takiej że:

a) $0 < p < 1$ b) $0 < p < \frac{1}{3}$ c) $-1 < p < 0$ d) $-\frac{1}{2} < p < 0$.

Zadanie 4. Podaj liczbę przeciwną do:

a) 6 b) $-1\frac{3}{7}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $1+\sqrt{2}$

e) $5-\sqrt[3]{10}$ f) $-2+\sqrt{5}$ g) $-4-\sqrt{3}$ h) $-3+\sqrt{10}$.

Zadanie 5. Podaj, w jakiej odległości od zera na osi liczbowej znajdują się liczby:

a) 20 b) -3 c) $\frac{2}{5}$ d)-3,7 e) π .

Odległość **liczby** a od zera (na osi liczbowej) nazywamy **wartością bezwzględną** i oznaczamy $|a|$.

Wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ta sama liczba, np.

$|5|=5,\ |3\frac{1}{4}|=3\frac{1}{4},\ |\sqrt{5}|=\sqrt{5},\ |2+\pi|,|\sqrt{5}-2|$

Wartością bezwzględną liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna, np.

$|-2|=2,\ \ |-3\sqrt{2}|=3\sqrt{2},\ \ |2-\pi|=-(2-\pi),|\sqrt{5}-4|=-(\sqrt{5}-4)$.

Wartość bezwzględną liczby a można zapisać wzorem:

$$|a| = \begin{cases} a, & gdy\ a \geq 0 \\ -a, & gdy\ a < 0 \end{cases}$$

Zadanie 6. Oblicz:

a) $|0|$ b) $|-2\frac{5}{6}|$ c) $|-\pi|$ d) $|\pi|$

e) $|-14|$ f) $|-(-1{,}2)|$ g) $|\sqrt{2}-3|$ h) $|-1+\sqrt{2}|$

i) $|\sqrt{3}-\sqrt{7}|$ j) $|2\pi-8|$ k) $|45|-|-1|$ l) $|\sqrt{2}-1|$

m) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|$ n) $|3-\sqrt{2}|$ o) $|2\sqrt{2}-9|$.

Zadanie 7. Liczbę $|3{,}14-\pi|+|\pi-3{,}14|$ zapisz w prostszej postaci (bez użycia wartości bezwzględnej).

Zadanie 8. Oblicz wartość wyrażenia. Oceń, jaką liczbą- wymierną czy niewymierną – jest wynik obliczeń.

a) $|3-\sqrt{2}|-|\sqrt{2}+1{,}3|$ b) $|3-\pi|-|\pi-3|$

c) $|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$ d) $2\cdot|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2\sqrt{2}|$

e) $|\sqrt{2}-1|\cdot|1-\sqrt{2}|$.

Zadanie 9. Oblicz odległość na osi liczbowej między liczbami:

a) -4 i -12 b) 7 i 1,2 c) $4\frac{1}{3}\ \ i\ \ 8\frac{1}{3}$

d) $-2\sqrt{2}\ \ i\ \ 4\sqrt{2}+3$ e) $1-2\sqrt{3}\ \ i\ \ 4+2\sqrt{3}$.

Zadanie 10. Wyznacz odległość między punktami A i B na osi liczbowej oraz środek odcinka AB.

a) A = (3), B = (7) b) A = (3), B = (-1)

c) A = $(1+\sqrt{3})$, B = $(1-\sqrt{3})$ d) A = $(2+\sqrt{5})$, B = $(-3\sqrt{5})$.

Zadanie 11. Zaznacz na osi liczbowej liczby odległe od (-4) od :

a) 4; b) 8 c) 2 d) $\sqrt{5}$.

Temat: PRZEDZIAŁY LICZBOWE

Przedziały liczbowe dzielimy na:

a)**ograniczone:**

Nazwa	Oznaczenie	Zapis warunku	Zapis graficzny
Otwarty (obustronnie)	$(a ; b)$	$a < x < b$	
Domknięty (obustronnie)	$\langle a ; b \rangle$	$a \leqslant x \leqslant b$	
Lewostronnie domknięty	$\langle a ; b)$	$a \leqslant x < b$	
Prawostronnie domknięty	$(a ; b \rangle$	$a < x \leqslant b$	

b)**nieograniczone (nieskończone):**

Nazwa	Oznaczenie	Zapis warunku	Zapis graficzny
Otwarty (prawostronnie nieskończony)	$(a ;\infty)$	$a < x$	
Lewostronnie domknięty	$\langle a ;\infty)$	$a \leqslant x$	
Otwarty (lewostronnie nieskończony)	$(\infty; b)$	$x < b$	
Prawostronnie domknięty	$(\infty; b \rangle$	$x \leqslant b$	

Zadanie 1. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek. Zapisz ten zbiór w postaci przedziału:

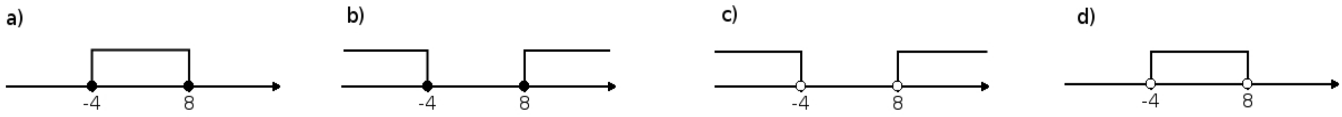
a) $1 < x < 4$ b) $-2 \le x < 1$ c) $0 \le x \le 3$

d) $x \ge 3$ e) $x < 3$.

Zadanie 2. Zapisz warunek, który spełniają liczby należące do danego przedziału. Zaznacz przedział na osi liczbowej:

a) <-3; 5>   b) <-2, 3)   c) $(-\infty;1>$ d) (0; 4).

Zadanie 3. Zapisz przedziały zaznaczone na osi liczbowej:



Zadanie 4. Wypisz:

a) wszystkie liczby całkowite, należące do przedziału (-2; 7>

b) wszystkie liczby naturalne, należące do przedziału (-3; 3)

c) najmniejszą liczbę naturalną, która należy do przedziału (10; 100)

d) największą liczbę naturalną, która należy do przedziału $<\frac{1}{2};789\frac{1}{3}>$

e) największą liczbę całkowitą, która nie należy do przedziału (-5; $+\infty$).

Zadanie 5. Dany jest przedział $(-2,5\rangle$. Podaj z tego przedziału wszystkie liczby:

a) naturalne   b) całkowite   c) pierwsze   d) złożone.

Zadanie 6. Dany jest przedział (12;40). Podaj z tego przedziału liczby, które

a) przy dzieleniu przez 6 dają reszty 4   b) przy dzieleniu przez 9 dają reszty 7.

Temat: DZIAŁANIA NA PRZEDZIAŁACH LICZBOWYCH

Zadanie 1. Zaznacz na osi liczbowej przedziały A i B, a następnie wykonaj działania: $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B\ i\ B \setminus A$:

a) $A = (-3,4), B = (-\infty,0)$

b) $A = \langle 1,5\rangle, B = \langle -1,3)$

c) $A = (-4;2), \quad B = (0;3>$

d) $A = (-\infty,4\rangle, B = \langle -4,\infty)$

e) $A = \left\langle -1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}\right\rangle, B = (3;\infty)$

f) $A =< -3;3 >, \quad B =< 1;3 >$

g) $A = (-\infty;4), \quad B =< -3;5)$

h) $A = (0;4), \quad B =< -2;+\infty)$

i) $A =< -6,3 >, B = (-2,7)$

j) $A = (-\sqrt{2},\sqrt{2}), B = \langle -4,\pi)$.

Zadanie 2. Wyznacz zbiory $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B\ i\ B \setminus A$:

a) $A = (-\infty;3), \quad B = (0;2) \cup < 3;+\infty)$

b) $A = (2;\infty), \quad B =< -5;0 > \cup (4;+\infty)$

Zadanie 3. Wyznacz dopełnienie zbioru A w zbiorze liczb rzeczywistych:

a) $A = (3;5>$ b) $A = (-3;+\infty)$ c) $A = (-3;8>$

d) $A = (2;+\infty)$ e) $A =< -1;3) \cup < 7;+\infty)$.

Zadanie 4. Wyznacz zbiory:

a) $(-\infty;5) \cup < -1;8>$ b) $< -3;2) \cap (0;5)$ c) $(-\infty;7> \backslash (-2;5)$

d) $< 1;8> \backslash (-\infty;3>$ e) $(-\infty;6) \cap < -2;9>$ f) $< -4;2) \cup (0;5)$

g) $(-\infty;3> \backslash (-2;7)$ h) $< -1;9> \backslash (-\infty;5>$.

Zadanie 5. Podaj najmniejszą liczbę naturalną należącą do przedziału A \ B, jeżeli $A = (2, 3\rangle$, B = (-4,1).

Zadanie 6. Podaj wszystkie liczby całkowite należące do zbioru $A \cap B$,

jeżeli $A = \langle -\pi, \pi \rangle, B = (-3, 3\rangle$.

Zadanie 7. Podaj najmniejszą liczbę naturalną, która <u>nie należy</u> do zbioru $A \cup B$, gdzie $A = (0, 2\rangle$, $B = \left(1{,}3\frac{1}{2}\right)$.

Zadanie 8. Wyznacz dopełnienie zbioru A w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 9. Wymień liczby pierwsze należące do zbioru $A \cup B$, jeżeli $A = \langle -3,4), B = (2,7)$.

Zadanie 10. Podaj najmniejszą liczbę naturalną należącą do zbioru $B \backslash A$, jeżeli $A = (-\infty, 4\rangle, B = (1, \infty)$.

Temat: INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

Zadanie1. Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające warunek:

a) $|x| = 5$ b) $|x| = 0$ c) $|x| = \sqrt{3}$

d) $|x| = \frac{3}{4}$ e) $|x| = 4$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej:

a) $|x - 1| = 4$ b) $|x - 3| = 3$ c) $|x - 10| = 1$

d) $|x - 5| = 0$ e) $|x + 7| = 3$ f) $|x + 4| = 2$

g) $|x - 2| = 3$ h) $|x - 13| = 0{,}5$.

Zadanie 3. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb rzeczywistych spełniających podaną nierówność. Zapisz go w postaci przedziału lub sumy przedziałów:

a) $|x| \geq 1$ b) $|x| < \sqrt{5}$ c) $|x| > \frac{3}{2}$

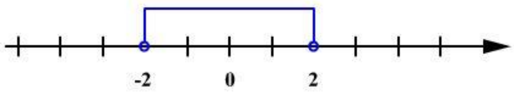
d) $|x| \leq \frac{5}{2}$ e) $|x| \leq 5$ f) $|x| > 1{,}5$.

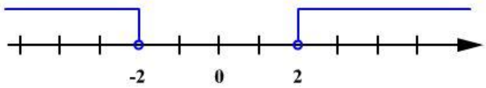
Zadanie 4. Rozwiąż nierówność, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

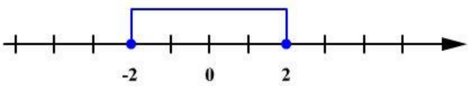
a) $|x-1| \leq 3$ b) $|x+3| \leq 1$ c) $|x+2| < 1$

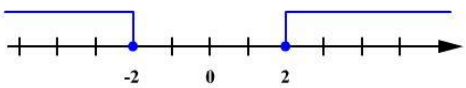
d) $|x-4| > 3$ e) $|x-2| > 1$ f) $|x+3| \geq 2$.

Zadanie 5. Podaj nierówność opisującą zaznaczony zbiór.

a) 

b) 

c) 

d) 

Zadanie 6. Zapisz przedział, używając symbolu wartości bezwzględnej:

a)) $(-\infty,-7) \cup (7,+\infty)$ b) <-2; 6>

c) (3; 5) d) $(-\infty;-1) \cup (7;+\infty)$

e) $(-\infty;2> \cup <4;+\infty)$ f) $\langle -7{,}5 \rangle$.

Zadanie 7. Zapisz warunek, używając symbolu wartości bezwzględnej:

a) x = 2 lub x = -2 b) x <-2 lub x > 6 c) $x \geq -3$ i $x \leq 9$.

Temat: BŁĄD BEZWZGLĘDNY I BŁĄD WZGLĘDNY PRZYBLIŻENIA

Przybliżyć liczbę (zaokrąglić) to znaczy zastąpić zerami pewną liczbę jej końcowych cyfr zgodnie z regułą:

0, 1, 2, 3, 4 – ostatnią z cyfr zachowanych pozostawiamy bez zmian

5, 6, 7, 8, 9 – ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o 1, przy czym jeżeli ostatnią cyfrą jest 9, to zastępujemy ją zerem i zwiększamy o 1 przedostatnią cyfrę.

Gdy przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to mówimy o **przybliżeniu z niedomiarem.** Gdy przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o **przybliżeniu z nadmiarem.**

Błąd bezwzględny przybliżenia jest równy wartości bezwzględnej różnicy liczby i jej przybliżenia $\Delta = |a - p|$

Jeżeli przybliżeniem liczby *a* jest liczba *p* oraz:

$a \geq p$, to $\Delta = |a - p| = a - p$

$a < p$ to $\Delta = |a - p| = p - a$.

Błąd względny przybliżenia to iloraz błędu bezwzględnego i wartości dokładnej. Błąd względny często wyrażany jest w procentach.

Zadanie 1. Uzupełnij tabelkę podając przybliżenia wskazanych liczb z odpowiednią dokładnością:

Liczba	Dokładność przybliżenia			
	d = 0,1	d = 0,01	d = 1	d = 10
15,3572				
42,1286				
11,7918				

Zadanie 2. Przybliż liczbę z podaną dokładnością i oblicz błąd bezwzględny przybliżenia:

a)1203 z dokładnością do 100

b)2,35 z dokładnością do 0,1

c) $\frac{7}{8}$ z dokładnością do 0,01

d) 23,8 z dokładnością do 1

e) 9 846 z dokładnością do 100

f) π z dokładnością do 0,001.

Zadanie 3. Przybliż swój wiek z dokładnością do pełnych dziesiątek. Podaj błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia

Zadanie 4. Oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny przybliżenia liczby x liczbą a. Błąd względny podaj z dokładnością do 0,1%

a) $x = 3; \quad a = 3$

b) $x = 5{,}7 \quad a = 6$

c) $x = 45{,}9; \quad a = 46$

d) $x = 23{,}8; \quad a = 24$

e) $x = 15{,}259; \quad a = 15{,}26$.

Zadanie 5. Zaokrąglij liczbę a z dokładnością do tysięcy. Oblicz błąd względny tego przybliżenia i wyraz go w procentach. Wynik zaokrąglij do części dziesiątych.
a) a = 4 352 b) a = 68 639 .

Zadanie 6. Magda kupiła pieczywo za 3,64 zł, mandarynki – za 6,40zł, banany za 4,85 zł oraz 4 batony po 1,99 każdy. Stojąc w kolejce oszacowała wartość zakupów na 25 zł.
a) Czy Magda przybliżyła koszt zakupów z nadmiarem czy z niedomiarem?
b) Oblicz błąd bezwzględny i błąd względny oszacowania Magdy.

Zadanie 7. Pani Nowak oszacowała wartość prezentów dla członków rodziny z okazji Świąt Bożego Narodzenia na kwotę 450zł. Mężowi kupiła krawat za 56zł, córce – bluzkę za 125zł, synowi – spodnie za 90 zł, zięciowi – koszulę za 75zł, zaś wnuczce – lalkę za 83zł. Oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny oszacowania wartości zakupów pani Nowak.

Zadanie 8. Oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny podanego przybliżenia:
a) Powierzchnia boiska o wymiarach 50,4m x 38,2m wynosi w przybliżeniu 2000m^2.
b) Oszacowano, że waga towaru wynosi 0,32t, a w rzeczywistości towar ten waży 298kg.

Zadanie 9. Łukasz kupił atramentową drukarkę ze skanerem za 369 zł, dwa wkłady z tuszem po 28 zł i ryzę papieru za 15,50 zł. Oszacował swoje wydatki na 450 zł. Jaki popełnił błąd względny i błąd bezwzględny? Podaj błąd względny z dokładnością do 0,001%.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – OŚ LICZBOWA I PRZEDZIAŁY LICZBOWE

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ obliczyć wartość bezwzględną dowolnej liczby
- ✓ rozwiązać równanie lub nierówność z wartością bezwzględną
- ✓ wykonać działania na przedziałach liczbowych
- ✓ podać z danego przedziału liczby np. naturalne, całkowite, najmniejszą, największą
- ✓ przybliżyć liczbę z zadaną dokładnością
- ✓ obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny

Zadanie 1. Wartość wyrażenia $|3| \cdot |-2| + |-1|$ jest równa:

A. -5 B. 5 C. 7 D.-7.

Zadanie 2. Liczba $\left|5-\sqrt{26}\right|$ jest równa:

A. $5-\sqrt{26}$ B. $-5-\sqrt{26}$ C. $5+\sqrt{26}$ D. $-5+\sqrt{26}$.

Zadanie 3. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do przedziału $\langle -3,2)$.

Zadanie 4. Które spośród liczb $-\frac{8}{3}, -2\frac{3}{4},\ 3\frac{2}{7},\ \pi$ należą do przedziału $\left(-2\frac{2}{3},\ 3\frac{2}{3}\right)$?

Zadanie 5. Wyznacz zbiory $A \cup B,\ \ A \cap B,\ \ A \backslash B,\ \ B \backslash A$ jeżeli $A = (-4,2), B = \langle 0,3 \rangle$.
Ile liczb całkowitych należy do zbioru $A \cup B$?

Zadanie 6. Wykorzystując interpretację geometryczną wartości bezwzględnej, rozwiąż równanie lub nierówność:

a) $|x| = 4$ b) $|x| = 6$ c) $|x + 2| = 5$

d) $|x - 1| \leq 7$ e) $|x + 4| > 1$ f) $|x + 0{,}5| < 4$.

Zadanie 7. Zapisz przedział, używając symbolu wartości bezwzględnej:

a) $(-4,4)$ b) $(-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$ c) <-7,1>.

Zadanie 8. Pani Monika kupiła buty za 189zł, kurtkę skórzaną za 459zł i torebkę za 78,50zł. Oszacowała swoje wydatki na 750zł. Jaki popełniła błąd względny i błąd bezwzględny? Podaj błąd względny z dokładnością do 0,001%.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Wskaż liczbę, której wartość bezwzględna jest najmniejsza.

A. 13,25 B. 3 C. -8 D. $-\frac{2}{5}$

Zadanie 2. Liczba $|1,(41) - \sqrt{2}|$ jest równa:

A. $1,(41) - \sqrt{2}$ B. $1,(41) + \sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} - 1,(41)$ D. $-\sqrt{2} - 1,(41)$

Zadanie 3. Wartość wyrażenia $|2\pi - 7|$ jest równa:

A. $2\pi - 7$ B. $2\pi + 7$ C. $-2\pi + 7$ D. $-2\pi - 7$

Zadanie 4. Wartość wyrażenia $|2\sqrt{5} - 4|$ jest równa:

A. $2\sqrt{5} - 4$ B. $4 - 2\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5} + 4$ D. $-2\sqrt{5} - 4$

Zadanie 5. Wartość wyrażenia $W = |x - 6| - 3x + 5$ dla liczby $x \in (0,6)$ jest równa:

A. $-2x - 11$ B. $-2x + 11$ C. $4x + 11$ D. $-4x + 11$

Zadanie 6. Uproszczona postać wyrażenia -|-4x|- 2|x| dla x > 0 jest równa:

A. 2x B. 6x C. -2x D. -6x

Zadanie 7. Wartość wyrażenia $|-2 - 4| - |-3| \cdot |-2|$ jest równa:

A. 0 B. 12 C.-12 D. -4

Zadanie 8. Wartość wyrażenia $\sqrt{(-2)^2} - |4 - 5| \cdot |2| + (-|-2|)$ jest równa:

A. 0 B. 2 C. -2 D. 4

Zadanie 9. Która liczba leży na osi liczbowej w równej odległości od liczb -8 i 4?

A. -6 B. 6 C. 2 D. -2

Zadanie 10. Odległość między liczbami $2\sqrt{2} - 3$ i $\sqrt{2} - 3$ jest równa:

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. -2

Zadanie 11. Wskaż przedział, do którego należy dokładnie siedem liczb całkowitych.

A. (-4; 3) B. (17;25 > C. < 9;15) D. < -1;5 >

Zadanie 12. Zbiór A = [<-4; 5)\<-5; 2>] $\cap N$ jest równy:

A. A = {2, 3, 4, 5} B. A = {3, 4} C. A = {3, 4, 5} D. A = (2; 5)

Zadanie 13. Zbiór X = [(-2; 6)\<-7; 2>] $\cap N$ jest równy:

A. X = {2} B. X = {2, 3, 4, 5, 6} C. X = (2;6) D. X = {3, 4, 5}

Zadanie 14. Wskaż błąd względny zaokrąglenia liczby 1,25 do części dziesiątych.

A. 12,5% B. 4% C. 1,3% D. 0,4%

Zadanie 15. Które przybliżenie obarczone jest największym błędem względnym?

A. 99 ≈ 100 B. 999 ≈ 1000 C. 9 999 ≈ 10 000 D. 99 999 ≈ 100 000

Zadanie 16. Szacując wynik iloczynu $5{,}1 \cdot 9{,}9$, obliczono 50. Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest:

A. mniejszy niż 0,5 B. równy 0,5 C. większy niż 0,5 D. większy niż 0,99

Zadanie 17. Przybliżeniem z niedomiarem jest przybliżenie:

A. $\sqrt{2} \approx 1{,}42$ B. $\sqrt{10} \approx 3{,}1$ C. $\sqrt{3}-1 \approx 0{,}8$ D. $\frac{3}{8} \approx 0{,}4$

Zadanie 18. Błąd bezwzględny przybliżenia liczby x liczbą a jest równy 3. Jeżeli $x \in (-3; 1\frac{1}{2})$, to liczba a może należeć do przedziału:

A. < -8; -6> B. <-7; $-4\sqrt{2}$ > C. < $4\frac{1}{2}$;6 > D. <3 + $\sqrt{3}$; 5>

Zadanie 19. Błąd względny przybliżenia liczby 0,08 liczbą 0,1 jest równy:

A. 25% B. 2,5% C. 1,25% D. 12,5%

Zadanie 20. Błąd względny przybliżenia liczby 4,25 liczbą a jest mniejszy od 0,4%. Liczba a nie może być równa:

A. 4,235 B. 4,265 C.4,229 D.4,266

4. OBLICZENIA PROCENTOWE

Jeden **procent (1%)** pewnej liczby a (lub innej wielkości), to setna część tej liczby (wielkości).

$$1\%\ liczby\ a\ jest\ równe\ \frac{1}{100} \cdot a$$

$$p\%\ liczby\ a\ jest\ równe\ \frac{p}{100} \cdot a$$

Promilem nazywamy tysięczną część pewnej wielkości lub liczby.

Jeden promil oznaczamy 1‰.

Z definicji wynika, *że* $1‰ = \frac{1}{10}\%$.

Temat: PROCENTY, PROMILE, PUNKTY PROCENTOWE

Zadanie 1. Oblicz:

a) 13% z grupy 300 osób b) 15% z 150 cm^3

c) 36% z 250 g d) 45% z 120 zł

e) 14% z 25 l f) 96% z 2 godzin i 5 minut

Zadanie 2. Oblicz wartość ***w***, wiedząc, że jej:

a) 6% wynosi 0, 12 kg

b) 26% wynosi 83,2 t

c) 25% wynosi 1,25 h

d) 22% wynosi 3 km i 80 m

e) 15% wynosi 75 zł

f) 125% wynosi 75 .

Zadanie 3. Oblicz, ile procent liczby:

a)liczby 180 stanowi liczba 45

b) liczby 250 stanowi liczba 1,1

c) liczby 80 stanowi liczba 112

d) liczby 32 stanowi liczba 160

e) liczby $1\frac{1}{4}$ stanowi liczba $\frac{1}{2}$

f) liczby $\frac{1}{3}$ stanowi liczba 60.

Zadanie 4. Podaj, jakim procentem dodatniej liczby **x** jest liczba:

$a)$ $\frac{1}{2}x$ b) $\frac{1}{4}x$ c) 1,5 x d) 3x e) 0,2x.

Zadanie 5. Wyznacz liczbę:

a) o 2% większą od 1600

b) o 75% mniejszą od 3

c) o 15% mniejszą od 320

d) o 60% większą od 5,5

e) o 30% większą od 180

f) o 220% większą od 70.

Zadanie 6. Po modernizacji zakład produkuje 1,7 razy więcej wyrobów niż przed modernizacją. O ile procent wzrosła produkcja zakładu?

Zadanie 7. Liczba 120 jest o 20% mniejsza od liczby x.

a)oblicz x b)o ile procent liczba x jest większa od liczby 120?

Zadanie 8. Pewną liczbę zwiększono o 40% i otrzymano 56. Jaka to liczba?

Zadanie 9. Po 30-procentowej podwyżce towar kosztuje 5 720 zł. Oblicz cenę poprzednią tego towaru i kwotę podwyżki.

Zadanie 10. Jurek ma 182 cm wzrostu, a jego młodszy brat Bartek 168 cm wzrostu. O ile procent Bartek jest niższy od Jurka? Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 11. Woda morska zawiera 5% soli. Z ilu kilogramów tej wody otrzymamy 20 kg soli?

Zadanie 12. Oblicz o ile procent zwiększy się pole kwadratu, gdy jego bok powiększymy o:

a)5% b)5% c) 20% d) 50%.

Zadanie 13. W prostokącie o obwodzie 280 cm długości jego boków spełniają warunek: 20% długości dłuższego boku jest równe 80% długości krótszego boku. Oblicz długości boków prostokąta.

Zadanie 14. Komputer kosztował 2400 zł, a oprogramowanie 600 zł. Po roku komputer staniał o 10%, a oprogramowanie zdrożało o 5%. O ile procent był tańszy ten zestaw po roku?

Zadanie 15. Na wystawie psów rasowych najliczniejszą grupę tworzyło 21 jamników. Ich zbiór stanowił aż $11\frac{2}{3}$% liczby kandydatów do medali zgłoszonych na wystawę. Jak liczna reprezentacja psów była oceniana na tej wystawie?

Zadanie 16. Długość granicy naszego państwa wynosi 3 582 km, w tym granica morska jest równa 528 km, a granica wzdłuż rzek 1 285 km. Oblicz, o ile procent granica lądowa jest dłuższa od granicy wzdłuż rzek. Podaj wynik z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 17. Załóżmy, że 30 milionów Polaków jest uprawnionych do głosowania w wyborach do Sejmu. Pewną partię poparło w wyborach 40% głosujących. Frekwencja wynosiła 60%. Ile procent Polaków głosowało na kandydatów tej partii, jeżeli przyjmiemy, że Polska liczy 38 mln obywateli?. Wynik podaj z dokładnością do 0,1.

Zadanie 18. W tabeli przedstawiono liczbę chłopców w 300 rodzinach mających po troje dzieci.
Ile procent badanych rodzin ma:

Liczba chłopców	0	1	2	3
Liczba rodzin	45	125	100	30

a) wszystkie dzieci tej samej płci, b)co najmniej jednego chłopca?

Zadanie 19. Salon samochodowym oferuje kupno samochodu za 84 000 zł. Przedstawiono dwie oferty.

I oferta	**II oferta**
I rata – 20% ceny samochodu i 36 rat miesięcznych po 2000 zł	12,5 % rabatu od ceny oferowanej

a)O ile więcej należy zapłacić za ten samochód kupując go w systemie ratalnym niż za gotówkę?
b)O ile procent droższy jest samochód kupiony w systemie ratalnym niż za gotówkę?

Zadanie 20. Podczas procesu palenia kawa traci 12% swojej masy. Ile trzeba wziąć świeżej kawy, aby otrzymać 24 kg kawy palonej? Podaj wynik z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Zadanie 21. Na początku sezonu kilogram truskawek kosztował 10 zł. Po pierwszym tygodniu obniżono cenę truskawek o 20%, po drugim tygodniu o 50%, a po trzecim o 30%. Czy po trzech tygodniach truskawki rozdawano za darmo? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 22. Wycieczka do Londynu kosztuje 1 200 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki, gdyby:

a) najpierw podniesiono ją o 10 %, a następnie obniżono o 10%,
b) najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,
c) najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?

Zadanie 23. Cenę towaru podwyższono dwukrotnie o 10%. O ile procent zwiększyła się początkowa cena towaru?

Zadanie 24. Cenę kurtki obniżono o 20%,a później podniesiono o 25% i wtedy kosztowała 200zł.Oblicz cenę początkową kurtki

Zadanie 25. Po dwukrotnej obniżce ceny: o 30% i o 10% monitor kosztuje 630 zł. Oblicz cenę początkową monitora.

Zadanie 26. Cenę kosiarki (500 zł) podnoszono kolejno o 20%, a następnie o 10%. Ile kosztowała kosiarka? O ile procent podniesiono cenę kosiarki poprzez te podwyżki?

Zadanie 27. Po dwukrotnej obniżce ceny, najpierw o 25%, a później o 5%, płaszcz kosztował 285 zł. Oblicz cenę płaszcza przed obniżkami.

Zadanie 28. Cenę odkurzacza podniesiono o 20%, a później obniżono o 10% i wówczas kosztował 432 zł. Oblicz cenę początkową odkurzacza.

Zadanie 29. Oblicz 4 promile liczby 250.

Zadanie 30.Wykonaj działania i wynik podaj w promilach.

a) $1\% \cdot 13\%$ b) $12\% \cdot 0{,}5\%$ c) $(2\%)^2$ d) $14{,}3\% - 14{,}3‰$.

Zadanie 31. W wodach Oceanu Spokojnego jest średnio 3,5% soli. Ile to promili?

Zadanie 32. Oblicz, ile czystego złota znajduje się w naszyjniku o wadze 14g i próbie 925

Zadanie 33. Oblicz masę łańcuszka, jeśli jest w nim 32 g czystego złota próby 960.

Zadanie 34. Jubiler stopił 492 g złota drugiej próby (750‰) i 732 g złota szóstej próby (333‰). Ile promili stanowi złoto w tym stopie?

Zadanie 35. Złoty puchar waży 3 kg. Jaka jest masa czystego kruszcu w tym pucharze, jeśli zrobiony jest ze złota najlepszej próby, a jaka jeśli zrobiony jest ze złota próby najuboższej? Próba najlepsza wynosi 960, a najuboższa 333.

Zadanie 36. Poparcie pewnej partii wzrosło

a) z 10% do 20% b) z 30% do 40%

1) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie tej partii?

2) Ile razy wzrosło poparcie tej partii?

3) O ile procent wzrosło poparcie tej partii?

Zadanie 37. W tabeli poniżej przedstawiono wyniki sondażu, w którym pytano o poparcie dla partii *Y* i *Z*.

	Luty	**Marzec**
Y	16%	20%
Z	10%	8%

a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii *Y*? O ile procent wzrosła liczba osób popierających partię *Y*?

b) O ile punktów procentowych zmalało poparcie dla partii *Z*?

c) O ile procent zmalała liczba osób popierających partię *Z*?

Zadanie 38. Tosia i Tomek zdawali egzamin testowy z matematyki. Tomek rozwiązał poprawnie 74% zadań, wynik Tosi był lepszy o 14 punktów procentowych.
a)O ile procent więcej zadań rozwiązała Tosia od Tomka? Podaj wynik z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.
b)Ile zadań rozwiązła poprawnie Tosia, a ile Tomek, jeżeli przyjąć, że test składał się z 50 zadań?

Zadanie 39. Poparcie społeczne kandydata w wyborach prezydenckich z 42% zmalało w ciągu miesiąca maja o 2,1 punktu procentowego. Oblicz:
a) ile procent poparcia miał kandydat 1 czerwca

b) o ile procent zmalało poparcie kandydata w miesiącu maju.

Temat: *OBLICZANIE PODATKÓW*

Cena netto – bez podatku podatku od towarów i usług (VAT)
Cena brutto - cena zawierająca podatek VAT

Zadanie 1. Rower kosztuje w hurtowni 840 zł. Sklep do tej ceny dolicza 23% podatku VAT. Ile wynosi podatek VAT? Jaka jest cena roweru w sklepie?

Zadanie 2. Towar waży netto 390,60 kg. Oblicz wagę opakowania, jeśli stanowi ona 7% wagi brutto.

Zadanie 3. Cena brutto komputera jest równa cenie netto plus 23% podatku VAT.
a) Cena netto komputera jest równa 2200 zł. Oblicz jego cenę brutto. Ile procent ceny brutto stanowi podatek VAT?

b) Cena brutto komputera jest równa 3 198 zł. Oblicz jego cenę netto. Ile procent ceny brutto stanowi cena netto?

c) Podatek VAT doliczony do ceny netto komputera wyniósł 575 zł. Jaka jest cena brutto tego komputera? Ile byłaby równa cena brutto tego komputera, gdyby jego cena netto została podniesiona o 100 zł?

Zadanie 4. Cena papy izolacyjnej stosowanej w budownictwie, w którą wliczono 7% podatku VAT, jest równa 17,12 zł za metr kwadratowy. Oblicz cenę tego towaru, jeżeli podatek VAT zostanie zwiększony do 23%.

Zadanie 5. Od stycznia 2011 stawka VAT na książki i czasopisma wzrosła z 3% do 5%. Przed zmianą stawki trylogia Tolkiena kosztowała 86,52zł.
Jak zmieniła się cena trylogii?

Zadanie 6. W tabeli poniżej przedstawiono skale podatku dochodowego obowiązujące w latach 2010 - 2014

Podstawa obliczenia podatku w złotych		**Podatek w latach 2010 - 2014**
Ponad	**Do**	**Podatek wynosi**
	85 528 zł	18% minus kwota zmniejszająca podatek 556 zł 02 gr.
85 528 zł		14839 zł 02 gr. plus 32% nadwyżki ponad 85528 zł
Kwota zmniejszająca podatek:	**miesięczna:**	46 zł 33 gr.
	roczna:	556 zł 02 gr.
Roczny dochód niepowodujący obowiązku zapłaty podatku		Od 0 zł do 3.091 zł

Korzystając ze skali podatkowej podanej w tabeli na lata 2010 – 2014, ustal podatek dochodowy od osób fizycznych dla podstawy podatkowej:
a) 2 500 zł b)70 000 zł c)105 000 zł d) 200000

Temat: LOKATA NA PROCENT PROSTY I SKŁADANY

Procent prosty to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K, polegający na tym, że dochód w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu i nie procentuje wraz z nim w następnym okresie oszczędzania.

$$K_n = K(1 + n\frac{p}{100})$$, gdzie

K_n- kapitał po n okresach oszczędzania, K – kapitał początkowy,
n – liczba okresów oszczędzania,
p – stopa procentowa w jednym okresie oszczędzania.

Procent składany

Kapitalizacja odsetek to dopisanie odsetek do kapitału po upływie określonego czasu, które wraz z kapitałem procentują w następnym okresie.

Procent składany to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K, polegający na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do wkładu i procentuje wraz z nim w następnym okresie oszczędzania.

$K_n = K(1+\frac{p}{100})^n$, gdzie

K_n - kapitał po n okresach oszczędzania,

K – kapitał początkowy,

n – liczba okresów oszczędzania,

p – stopa procentowa w jednym okresie oszczędzania.

$1 + \frac{p}{100} = q$ - czynnik procentowy

Zadanie 1. Kapitał w wysokości 5 000 zł został złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym *r*. Podaj wielkość kapitału po roku, gdy:
a)r =2% b) *r* = 3,5% c) *r* = 4%.

Uwaga: W Polsce zyski z lokat (odsetki) objęte są 19%-owym podatkiem, np. jeśli oprocentowanie lokaty o wartości 1000 zł wynosi 5%, to z zarobionych 50 zł bank odlicza automatycznie 9,5 zł (płacimy 19% od odsetek, a nie od całej kwoty).

Jeżeli w treści zadania nie wspomina się o podatku od odsetek, to w rozwiązaniach podaje się wartość kapitału (lub zysk) przed potrąceniem tego podatku.

Zadanie 2. Tomek złożył do banku 7 000 zł na lokatę roczną oprocentowaną 4% w stosunku rocznym. Jaką kwotę odbierze po roku (uwzględnij podatek od odsetek).

Zadanie 3. Oprocentowanie lokaty kwartalnej w stosunku rocznym wynosi 4,4%. Magda wpłaciła do banku 8000 zł na jeden kwartał. Jaki będzie stan oszczędności po upływie lokaty (uwzględnij podatek od odsetek)

Zadanie 4. Prowizja od kredytu wynosiła 6%, ale klientowi udało się wynegocjować obniżenie jej do 4,2%. O ile procent udało się obniżyć prowizję?

Zadanie 5. Oprocentowanie lokaty kwartalnej w banku wynosi 8% w skali roku. Klient wpłacił do banku 12 000 zł na pół roku. Jaką kwotę może wypłacić z banku po tym okresie?

Zadanie 6. Do banku A wpłaciliśmy 8 000 zł na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. O ile więcej zarobilibyśmy, gdybyśmy wpłacili tę samą kwotę do banku B, w którym oprocentowanie lokaty rocznej jest o 1,5 punktu procentowego wyższe niż w banku A?

Zadanie 7. Uzupełnij tabelę, wiedząc, że właściciel lokaty złożył kapitał na procent prosty.

Właściciel lokaty	**Kapitał początkowy [zł]**	**Roczna stopa procentowa [%]**	**Liczba *n* lat lokaty**	**Odsetki po upływie *n* lat [zł]**	**Stan konta po upływie *n* lat [zł]**
Maja	1 000	4	18		
Wojtek		3,5	2	700	
Kuba			5	1250	6150

Zadanie 8. Oblicz wartość kapitału uzyskaną po 4 latach od złożenia 10 000 zł na lokatę oprocentowaną na 6% w skali roku, jeśli odsetki były naliczane według:

a) procentu prostego

b) procentu składanego o rocznej kapitalizacji.

Zadanie 9. Kwotę 1 000 zł wpłacono na konto do banku przy oprocentowaniu 10% w skali roku z półroczną kapitalizacją odsetek. Ile pieniędzy możemy spodziewać się na tym koncie po półtora roku, gdy we wskazanym okresie nie będziemy dokonywać żadnych operacji?

Zadanie 10. Korzystając ze wzoru na procent składany, uzupełnij tabelkę:
Uzupełnij:
n- liczba okresów oszczędzania (liczba kapitalizacji)
p – stopa procentowa w jednym okresie oszczędzania
K_n - kapitał końcowy

Kapitał początkowy K [zł]	**Liczba lat**	**Rodzaj kapitalizacji**	**Oprocentowanie roczne w %**	**n**	**p**	K_n **[zł]**
200	4	roczna	8			
100	2	półroczna	4			
10000	2	roczna	10			
1 000	5	roczna	15			
1 000	10	miesięczna	12			
1 000	3	kwartalna	12			
1 000	5	półroczna	12			

Zadanie 11. Pan Kowalski wpłacił 20 000 zł na lokatę trzyletnią oprocentowaną w wysokości 4,5% w skali roku (odsetki są kapitalizowane co kwartał). Jaką kwotę będzie miał pan Kowalski po upływie trzech lat?

Zadanie 12. Jaki dochód przyniesie Ci po trzech latach lokata 2 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym w wysokości 8%, a odsetki są kapitalizowane co kwartał?

Zadanie 13. Zosia ulokowała 100 euro w banku, który stosuje kapitalizację roczną. Oblicz:

a) kapitał końcowy, jaki Zosia uzyska, jeżeli odłoży pieniądze na 5 lat, a bank zastosuje roczna stopę procentową 8%,
b) roczne oprocentowanie, jakie powinien zastosować bank, aby po 8 latach na koncie było 159,39 euro,
c) kapitał początkowy, jaki powinna złożyć Zosia w banku przy rocznej stopie procentowej 16%, aby po upływie 3 lat mieć na koncie 500 euro. Nie uwzględniaj podatku od odsetek.

Zadanie 14. Jaki dochód przyniesie Ci po trzech latach lokata 2 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym w wysokości 8%, a odsetki są kapitalizowane co kwartał?

Zadanie 15. Oblicz, na ile procent w skali roku złożona została kwota 1 000 000 zł, jeżeli po trzech latach z kapitalizacją kwartalną przy dopisywaniu odsetek na koniec kwartału, uzyskał odsetki wynoszą 126 825 zł.

Zadanie 16. Bogaty dziadek w dniu Twoich narodzin wpłacił Ci na konto kwotę 500 000 złotych oprocentowaną w stosunku rocznym 3% z kapitalizacją odsetek po roku. Czy w swoje 18 urodziny będziesz już milionerką/ milionerem?

Temat:POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – OBLICZENIA PROCENTOWE

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ obliczyć procent danej liczby
- ✓ obliczyć liczbę, gdy dany jest jej procent
- ✓ obliczyć, jakim procentem danej liczby jest inna liczba
- ✓ stosować obliczenia procentowe do rozwiązywania zadań tekstowych, z życia codziennego
- ✓ posługiwać się pojęciem promil, punkt procentowy
- ✓ obliczyć zysk z lokaty złożonej na procent prosty lub składany.

Zadanie 1. 45% liczby 10 to:

A. 45 B. 0,45 C. 4,5 D. 0,045

Zadanie 2. Liczba, której 7,5% jest równe 3 to:

A. 40 B. 400 C. 250 D. 0,225

Zadanie 3. Ile procent liczby 45 stanowi liczba 180?

A. 25% B. 81% C. 400% D. 45%

Zadanie 4. Liczbę 30 zwiększono o 20%. Otrzymano wówczas liczbę:

A. 24 B. 6 C. 36 D. 60

Zadanie 5. Jajko waży 56 gramów. 55% wagi jajka stanowi białko, a 40% żółtko. Resztę stanowi skorupka. Ile waży skorupka?

A. 5,6g B. 5g C. 2,8g D. 53,2g

Zadanie 6. Lodówkę kosztującą 1215zł sprzedano podczas wyprzedaży za 972zł. Zatem obniżka ceny lodówki wyniosła:

A. 20% B. 25% C. 40% D. 80%

Zadanie 7. W głosowaniu za ustawą wzięło udział 352 posłów. Za przyjęciem ustawy było 62,5% biorących udział w głosowaniu parlamentarzystów. Zatem za przyjęciem ustawy głosowało:

A. 180 posłów B. 220 posłów C. 240 posłów D. 270 posłów

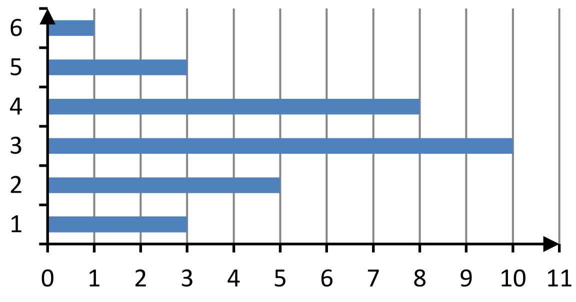
Zadanie 8. Książka kosztowała 28zł. W poniedziałek podwyższono jej cenę o 10%, a we wtorek obniżono jej cenę o 10%. Ile obecnie kosztuje ta książka?

Zadanie 9. Telewizor kosztował 5000zł, jego cenę obniżono o 20%, a później podniesiono 15%. Podaj ostateczną cenę telewizora. O ile procent cena końcowa jest niższa od pierwszej?

Zadanie 10. Poparcie partii A i B wynosiło po 20%. Poparcie partii A wzrosło o 5 punktów procentowych, a poparcie partii B wzrosło o 20%. Która partia cieszy się większym poparciem? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 11. Cena pewnego artykułu z podatkiem VAT wynoszącym 7% to 64,20zł. Ile będzie kosztował ten artykuł, jeżeli stawka VAT zostanie podwyższona do 22%, a cena netto nie zmieni się? O ile procent wzrośnie cena?

Zadanie 12. Na wykresie słupkowym przedstawiono wyniki ze sprawdzianu z matematyki przeprowadzonego w klasie IIIA.



a)ilu uczniów pisało sprawdzian?

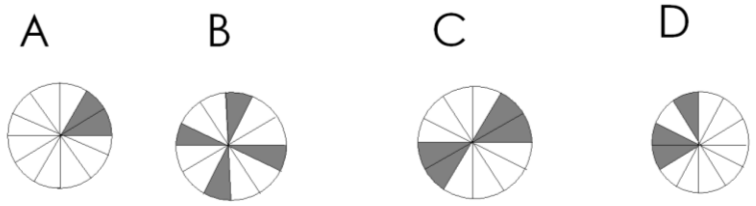
b)jaki procent uczniów uzyskało ze sprawdzianu ocenę co najmniej dostateczną?

c)oblicz, ilu uczniów liczy klasa, jeżeli wiadomo, że na sprawdzianie obecnych było 93,75% uczniów.

Zadanie 13. Pani Małgorzata założyła trzyletnia lokatę oprocentowaną w wysokości 4,5% w skali roku i z roczną kapitalizacją. Po trzech latach stan jej konta był równy 14 264,58 zł. Jaką kwotę wpłaciła do banku, zakładając lokatę?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Na którym z rysunków zacieniowano 25% powierzchni koła?



Zadanie 2. Liczba *p* stanowi 40% liczby *k*. Zatem:
A. p = 0,6k B. p = 1,4k C. p = 0,4k D. p = 1,6k

Zadanie 3. Jaki procent godziny stanowią72 sekundy?
A. 0,2% , B. 1%, C. 2% , D. 3%.

Zadanie 4. 8% pewnej liczby równa się 2, więc 10% tej liczby, to:
A. 25 B. 16 C. 0,16 D. 2,5

Zadanie 5. Liczba *y* stanowi 80% liczby x. Zatem:
A. x = 0,8y, B. x = 1,2y, C. x = 1, D. x = 2.

Zadanie 6. Marynarka kosztuje 180 zł, co stanowi 60% ceny garnituru. Garnitur kosztuje:
A. 240 zł B. 300 zł C. 360 zł D. 450 zł.

Zadanie 7. Marek kupił namiot za 154 zł, co stanowiło 7% jego wakacyjnych oszczędności. Marek zaoszczędził na wakacje
A. 1078 zł B. 2200 zł C. 1533 zł D. 2193 zł.

Zadanie 8. Pizza ma średnicę 30 cm, pieczarkami pokryta jest tylko jej środkowa część o promieniu 12cm. Jaki procent pizzy pokryty jest pieczarkami?
A. 80% B. 64% C. 16% D. 40%

Zadanie 9. W trójkącie równobocznym długość każdego z boków zmniejszamy o 50%. Wtedy pole tego trójkąta
A. wzrośnie o 50% C. zmniejszy się o 50%
B. zmniejszy się o 30% D. zmniejszy się o więcej niż 60%.

Zadanie 10. Bartek spłacił najpierw 50% swojego zadłużenia, a następnie 50% tego co pozostało. Ostatecznie, po tych dwóch wpłatach, Bartek spłacił
A. 100% zadłużenia C. 50% zadłużenia
B. 75% zadłużenia D. 25% zadłużenia.

Zadanie 11. Dwie kolejne podwyżki ceny towaru, najpierw o 10% i potem o 5%, są równe jednorazowej podwyżce ceny towaru o:
A.15%, B. 15,5%, C. 17,5%, D. 50%.

Zadanie 12. Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%. W wyniku obu obniżek cena nart zmniejszyła się o:
A. 44%, B. 50%, C. 56%, D. 60%.

Zadanie 13. Cena towaru bez podatku VAT jest równa 80 zł. Towar ten wraz z podatkiem VAT w wysokości 23% kosztuje
A. 61,60 zł B. 80,23 zł C. 98,40 zł D. 103 zł.

Zadanie 14. Poparcie dla partii X w marcu 2008 wynosiło 24%, zaś we wrześniu 2008 było równe 30%. Partia X odnotowała wzrost poparcia o:
A. 6% B. 20%
C. 6 punktów procentowych D. 25 punktów procentowych

Zadanie 15. Do południa turysta przebył 75% zaplanowanej na cały dzień trasy S, a po południu przebył $33\frac{1}{3}\%$ tego co przed południem. Czy turysta przebył tego dnia całą zaplanowaną trasę?

Wybierz odpowiedź T (tak) lub N (nie) i jej uzasadnienie A, B, lub C.

T	ponieważ	A	$75\%S + 33\frac{1}{3}\%S = 108\frac{1}{3}S$ i $108\frac{1}{3}S > 100\%S$,
N		B	$75\%S\ z\ 33\frac{1}{3}\%S\ to\ 25\%S$ i $75\%S + 25\%S = 100\%S$,
		C	$33\frac{1}{3}\%\ z\ 75\%S\ to\ 25\%S$ i $75\%S + 25\%S = 100\%S$.

Zadanie 16. Spośród hodowców zwierząt pewnej gminy 80% hoduje trzodę chlewną, 70% drób, a 56% hoduje trzodę chlewną i drób.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P (prawda), jeśli zdanie jest prawdziwe lub F (fałsz) – jeśli jest fałszywe.

24% hodowców hoduje tylko trzodę chlewną,	P	F
14% hodowców hoduje tylko drób,	P	F
94% hodowców tej gminy hoduje trzodę chlewną lub drób,	P	F
6% hodowców nie hoduje ani trzody chlewnej, ani drobiu.	P	F

Zadanie 17. Bank kapitalizuje odsetki po roku. Na jaki procent w skali rocznej wpłacono do banku 1 600 zł, jeżeli po roku otrzymano 240 zł odsetek?

A.20%, B.15%, C. 10%, D. 5%.

Zadanie 18. Oprocentowanie rocznej lokaty w pewnym banku jest równe 15%. Chcąc mieć po roku wraz z odsetkami na koncie 6 900 zł należy wpłacić na lokatę kwotę:

A.5 000 zł, B. 5 500 zł, C.5 750 zł, D.6 000 zł.

Zadanie 19. Ola wpłaciła 10 000 zł na dwuletnią lokatę z kapitalizacją roczną. Po dwóch latach stan jej konta był równy 10 712,25 zł. Jaka była roczna stopa procentowa?

A. 3,5% B. 4% C. 4,5% D. 5%

Zadanie 20. Pan Jerzy chce założyć w banku dwuletnią lokatę. Którą z podanych niżej ofert powinien wybrać, aby osiągnąć jak najwyższy zysk?

A. Kapitalizacja półroczna, roczna stopa procentowa 5,5 %.
B. Kapitalizacja roczna, roczna stopa procentowa 6 %.
C. Kapitalizacja co kwartał, roczna stopa procentowa 5%.
D. Kapitalizacja co miesiąc, roczna stopa procentowa 4,5%.

Zadanie 21. Na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku, wpłacono 1 000 zł. Które z poniższych wyrażeń pozwala obliczyć odsetki dopisane po upływie 18 lat?

A.$(1000+0,04)^{18}$ B.$1000\cdot(1+0,04)^{18}$ C.$1000\cdot(0,04)^{18}$ D.$1000\cdot[(1,04)^{18}-1]$.

Zadanie 22. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P (prawda), jeśli zdanie jest prawdziwe lub F (fałsz) – jeśli jest fałszywe.

Jeśli Kasia wpłaciła 1 000 zł na p% w stosunku rocznym i po trzech miesiącach otrzymała 50 zł odsetek, to $1000 \cdot p \cdot \frac{3}{12} = 50$.	P	F
Jeżeli cena benzyny wzrosła o 5%, a w następnym tygodniu zmalała o 5%, to cena końcowa benzyny nie zmieni się w porównaniu z ceną przed podwyżką.	P	F
Jeżeli dla partii X poparcie wzrosło z 20% do 25%, to poparcie to wzrosło o 25%.	P	F
Jeżeli w pewnym kraju bezrobocie w miesiącu kwietniu było równe 10%, a w maju spadło o 5%, to znaczy że w maju bezrobocie było równe 9,5%.	P	F

5. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Temat: WYRAŻANIE ALGEBRAICZNE I DZIAŁANIA NA NICH

Wyrażeniami algebraicznymi nazywamy liczby, litery lub liczby i litery połączone znakami działań lub znakami działań i nawiasami, np. 87, a, x+y, $x^2 + 3xy$ ...

Jednomianem jednej zmiennej x stopnia n nazywamy wyrażenie postaci $\mathbf{ax^n}$, w którym $a \in R\backslash\{0\}$ i $n \in N$. Wówczas liczbę a nazywamy współczynnikiem liczbowym jednomianu, a liczbę n –stopniem jednomianu.
Jednomiany, które różnią się co najwyżej współczynnikami liczbowymi nazywamy **jednomianami podobnymi.**

Zadanie 1. Zapisz symbolicznie wyrażenie algebraiczne:

a) suma liczb a i -3

b) różnica liczb n i -7

c) iloczyn liczb x i y

d) iloraz liczb -5 i m

e) suma kwadratów liczb x i y

f) podwojona suma liczby b oraz iloczynu liczb 2 i a

g) podwojony iloczyn liczb a,b

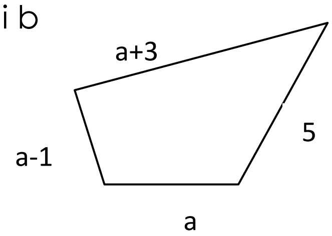
h) potrojona różnica sześcianu liczby oraz liczby b

i) kwadrat różnicy liczby 20 oraz ilorazu liczb x i y

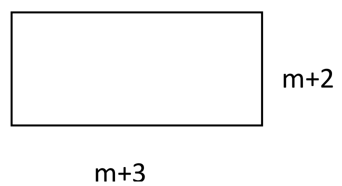
j) Iloczyn sumy kwadratów liczb a i b przez różnicę liczb a i b

k) liczba o 2 większa od sześcianu różnicy a,b.

Zadanie 2. Obwód czworokąta przedstawionego na rysunku przedstaw w postaci wyrażenia algebraicznego



Zadanie 3. Pola figury przedstawionej na rysunku przedstaw w postaci wyrażenia algebraicznego



Zadanie 4. Podaj cztery kolejne liczby całkowite, z których najmniejszą jest liczba *k*.

Zadanie 5. Oblicz wartość liczbową wyrażenia.

a) $3 - \frac{12a}{b}$ dla $a = 0{,}4, b = \frac{4}{3}$

b) $x^2 + xy - 3y^2$ dla $x = 1, y = -2$

c) $\sqrt{a^2b+b^2a}$ dla $a=2, b=3$

d) $-x^2+2$ dla $x=\sqrt{2}$

e) $\frac{x-y}{x+y}$ dla $x=3\sqrt{5}, y=-4\sqrt{5}$

f) $a^3-2b^3+\frac{a}{b}$ dla $a=\sqrt[3]{4}, b=\sqrt[3]{2}$.

Zadanie 6. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych:

a) $3a^2b-2ab+a^2b+ab$ b) $x^2-3xy+5-7x^2+12+xy$

c) $7p-4r^2-1-2r^2-2p$ d) $xy-2xy+x^2+4+3x^2-2$.

Zadanie 7. Wykonaj działania, zredukuj wyrazy podobne:

a) $(2x^2+4x-3)+(-x^2-2x+4)$ b) $(6a^2+5a+1)-(3a^2-7a-2)$

c) $4(2x-y)-3(4x+2y)-(7x-4y)$ d) $-4(3a+2b)+2(-5a+6b)-(-7a)$

e) $4[-(-2p+3t)+5t]-3(t+5t)$ f) $(2x-3y)\cdot(4x+y)$

g) $2x(x+2y)-3y(4x-y)$ h) $3(2x-5)-(x-4)(x+1)+3x^2$

i) $(2x-y)\cdot(x+y)-(x-y)\cdot(x+2y)$.

Zadanie 8. Wyznacz a ze wzoru:

a) $P=\frac{1}{2}a\cdot h$ b) $P=a\cdot b$ d) $S=\frac{a+b}{2}$

d) $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$ e) $S=a^2$ f) $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Zadanie 9. Wyznacz **x** ze wzoru: a) $y=\frac{a}{x}+b$ b) $y=\frac{ax}{b}$.

WZORY SRÓCONEGO MNOŻENIA

Wzory skróconego mnożenia są przydatne przy mnożeniu lub potęgowaniu wyrażeń algebraicznych. Często ułatwiają sprawne rachunki. Takich wzorów jest bardzo dużo.

Na najbliższych lekcjach poznasz kilka, z których korzysta się najczęściej.

Temat: KWADRAT SUMY I KWADRAT RÓŻNICY DWÓCH WYRAŻEŃ

Kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Zadanie 1. Zapisz za pomocą sumy algebraicznej:

a) $(x+10)^2$ b) $(3+y)^2$ c) $(k+9)^2$

d) $(m-5)^2$ e) $(y-\frac{1}{2})^2$ f) $(3x+1)^2$

g) $(2x-5)^2$ h) $(7x+1)^2$ i) $\left(\frac{1}{3}x-2\right)^2$

j) $(5x-3)^2$ k) $\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^2$ l) $(2x-11y)^2$

m) $\left(1\frac{1}{2}a+4b\right)^2$ n) $(0{,}1x+-10y)^2$ o) $(7a+5b)^2$

Zadanie 2. Oblicz:

a) $(\sqrt{2}+3)^2$ b) $(\sqrt{5}-1)^2$ c) $(4+2\sqrt{3})^2$

d) $(2\sqrt{2}+1)^2$ e) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ f) $(5-\sqrt{7})^2$

g) $(4-2\sqrt{3})^2$ h) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2$

Zadanie 3. Podane wyrażanie doprowadź do najprostszej postaci:

a) $(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{6})^2$ b) $4(\sqrt{2}-8)^2+12$

c) $(\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2-2(\sqrt{5}+4\sqrt{2})$ d) $(4\sqrt{3}-1)^2-3(\sqrt{3}+1)^2$

e) $(\sqrt{10}-3\sqrt{2})^2-14(\sqrt{2}-\sqrt{10})^2$ f) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+7(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

g) $2(1-\sqrt{6})^2+4(2\sqrt{6}+4)^2$

Zadanie 4. Przekształć, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

a) $x^2-8x+16$ b) $x^2+20x-100$

c) $36-12b+b^2$ d) $25x^2+10x+1$

e) $16a^2 - 8ab + b^2$

f) $a^2 - 6ab + 9b^2$

g) $36y^2 + 84yz + 49z^2$

h) $x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

i) $4a^2 - 20ab + 25b^2$

j) $9y^2 + 30ab + 25b^2$

k) $25x^2 - 60xy + 36y^2$

l) $49m^2 - 42mn + 9n^2$

Temat: RÓŻNICA KWADRATÓW DWÓCH WYRAŻEŃ

Różnica kwadratów $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Zadanie 1. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej:

a) $(x+4)(x-4)$

b) $(7-k)(7+k)$

c) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

d) $(2x+1)(2x-1)$

e) $(7y+2x)(7y-2x)$

f) $(5m-3n)(3n+5m)$

g) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{7}a\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{7}a\right)$

h) $\left(1\frac{1}{2}+6x\right)\left(1\frac{1}{2}x+6x\right)$.

Zadanie 2. Oblicz:

a) $(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)$

b) $(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3)$

c) $(2\sqrt{7}-\sqrt{3})(2\sqrt{7}+\sqrt{3})$

d) $(\sqrt{2}-3\sqrt{10})(\sqrt{2}+3\sqrt{10})$

e) $(5\sqrt{2}-3)(5\sqrt{2}+3)$

f) $(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6})$.

Zadanie 3. Przedstaw w postaci iloczynu:

a) $x^2 - 25$

b) $x^2 - 7$

c) $x^2 - 5$

d) $4x^2 - 9$

e) $x^2 - y^2$

f) $4a^2 - 25b^2$

g) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$

h) $a^2 - 4b^2$

i) $144x^2 - 9$

j) $0{,}36x^2 - 0{,}09y^2$

k) $\frac{1}{4}a^2 - 36$

l) $\frac{4}{9}d^2 - 169$

m) $0{,}04x^2 - 0{,}09y^2$

n) $a^2 - 8$.

Temat: SZEŚCIAN SUMY I SZEŚCIAN RÓŻNICY DWÓCH WYRAŻEŃ

Sześcian sumy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Zadanie 1. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej

a) $(x+1)^3$ b) $(x-3)^3$ c) $(3x+1)^3$

d) $(x-2)^3$ e) $\left(1-\frac{1}{3}x\right)^3$ f) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^3$

g) $(2x-3)^3$ h) $(5a+2b)^3$ i) $\left(4x+\frac{1}{2}y\right)^3$

j) $(3-2y)^3$ k) $\left(\frac{1}{3}x-2y\right)^3$ l) $(0{,}5c+2)^3$.

Zadanie 2. Zastosuj wzór skróconego mnożenia:

a) $(\sqrt{3}+1)^3$ b) $(1-\sqrt{5})^3$ c) $(3-2\sqrt{3})^3$

d) $(4+\sqrt{5})^3$ e) $(\frac{\sqrt{2}}{3}+1)^3$ f) $(2-\frac{\sqrt{5}}{2})^3$

Zadanie 3. Przedstaw w postaci sześcianu sumy lub sześcianu różnicy:

a) $1-6x+12x^2-8x^3$

b) $8x^3-36x^2+54x-27$

c) $1-3x+3x^2-1x^3$

Temat: SUMA I RÓŻNICA SZEŚCIANÓW DWÓCH WYRAŻEŃ

Suma sześcianów $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Różnica sześcianów $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Zadanie 1. Przedstaw podane wyrażenie w postaci iloczynowej

a) x^3-1 b) $27x^3-1$ c) x^3+8

d) $8x^3 - 27$

e) $64x^3 - 125y^3$

f) $\frac{1}{8}a^3 + b^3$

g) $\frac{27}{125}x^3 + 8$

i) $1000x^3 - 0{,}001$

j) $8x^3 - \frac{1}{125}y^3$

k) $64x^3 + \frac{1}{27}$

l) $\frac{8}{216}x^3 + \frac{27}{64}$.

Zadanie 2. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej:

a) $(x-3)(x^2+3x+9)$

b) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

c) $(x^2-5x+25)(x+5)$

d) $(4x^2+2x+1)(2x-1)$

e) $(x^2-6x+36)(x+6)$

e) $(3x-4y)(9x^2+12xy)+16y^2$

Temat: ZASTOSOWANIE WZORÓW SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Zadanie 1. Oblicz pole kwadratu o podanym boku:

a) $1+\sqrt{7}$

b) $4-\sqrt{2}$

c) $7+2\sqrt{3}$

d) $8-3\sqrt{2}$

e) $10+4\sqrt{5}$

f) $\sqrt{2}+\sqrt{11}$.

Zadanie 2. Oblicz objętość sześcianu o podanym boku:

a) $1+\sqrt{2}$

b) $4-\sqrt{5}$

c) $1+2\sqrt{3}$.

Zadanie 3. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

b) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

c) $\frac{7}{\sqrt{7}+2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

e) $\frac{3}{\sqrt{5}-1}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

g) $\frac{2}{4+\sqrt{3}}$

h) f) $\frac{5}{2\sqrt{3}+5}$

i) $\frac{4-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$.

Zadanie 4. Wykonaj działania, zapisz wynik w najprostszej postaci:

a) $(m+1)^2+3(m-1)^2-5(m+1)(m-1)$

b) $5x(x-y)-2(y-x)^2$

c) $(a-1)^2-3(a+1)^2-6(a+1)(a-1)$

d) $(2x-3y)(2x+3y)-(4x-2y)^2$.

Zadanie 5. Oblicz:

a) $(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2$

b) $(3\sqrt{2}+2)^2-(\sqrt{2}-2)^2$

c) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)^2$

d) $(\sqrt{5}-2\sqrt{20})^2-\sqrt{2}(3\sqrt{2}-1)$

e) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2-\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

f) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2-\sqrt{2}(2\sqrt{2}-5\sqrt{3})$.

Zadanie 6. Wyznacz iloczyn korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

a) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$

b) $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(x^2+2)$

c) $(4x^2+1)(2x+1)(1-2x)$

d) $(x^2-2x+1)(x+1)^2$.

Zadanie 7. Zapisz w postaci sumy algebraicznej:

a) $(x+4)^3+(x+4)^2$

b) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^3-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

c) $(2x+3)^3+(2x-3)^3$

d) $2(5x-1)^2-3(x-4)^3$.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ obliczyć wartość wyrażenia dla podanej liczby
- ✓ wykonywać działania na wyrażeniach algebraicznych
- ✓ zapisać wyrażenie z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia
- ✓ stosować wzory skróconego mnożenia do usuwania niewymierności, obliczania pól figur.

Zadanie 1. Wartość wyrażenia $-x^3-3x^2$ dla x = - 2 wynosi:

A.- 4 B. - 28 C. - 20 D. – 44.

Zadanie 2. Wyrażenie: $(a-3b)(2a+b)-4a(-a+2b)-8a^2$ jest równe:

A. $-2a^2-3b^2-13ab$

B. $-10a^2-3b^2-13ab$

C. $-2a^2-3b^2-3ab$

D. $-2a^2-3b^2+3ab$.

Zadanie 3. Wrażenie $(6a-5b)^2$ można przedstawić w postaci:

A. $36a^2-25b^2$

B. $6a^2-60ab+5b^2$

C. $36a^2-30ab+25b^2$

D. $36a^2-60ab+25b^2$.

Zadanie 4. Wyrażenie $9x^2-6xy+y^2$ można zapisać w postaci:

A. $(9x-y)^2$ B. $\left(4\frac{1}{2}x-y\right)^2$ C. $(3x-y)^2$ D. $(3x+y)^2$.

Zadanie 5. Wyrażenie $25-2x^2$ można przedstawić w postaci:

A. $(5-2x)^2$ B. $(5-2x)(5+2x)$ C. $\left(5-1\frac{1}{2}x\right)\left(5+1\frac{1}{2}x\right)$ D. $(5-\sqrt{2}x)(5+\sqrt{2}x)$.

Zadanie 6. Dla x = - 2 , y=3 wyznacz wartość wyrażeń:

a) $4y+x^3-3x^2$ b) $5xy+2x^3-6(-y)$.

Zadanie 7. Przedstaw wrażenia w postaci sum algebraicznych (zastosuj wzory skróconego mnożenia):

a) $(3a-2b)^2$ b) $\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2$ c) $(5t-\sqrt{2})^2$ d) $(5-2x)^3$ e) $(3x-2)^3$.

Zadanie 8. Przedstaw w postaci iloczynowej wyrażenia, zapisz w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy lub różnicy kwadratów:

a) $9x^2-6xy+y^2$ b) $16x^2+8x+1$ c) $81t^2-4p^2$.

Zadanie 9. Przedstaw podane wyrażenia w postaci iloczynu:

a) $8x^3-27$ *b)* $64x^3+125$.

Zadanie 10. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $x(-2x+3)-5(x+1)+3x^2$ b) $(2x-3)(x+1)-4x(x-2)$

c) $2(x-3)^2-(2x+3)(2x-3)$ d) $(a+2)^3-(a-2)^3$.

Zadanie 11. Oblicz:

a) $(2-3\sqrt{2})^2$ b) $(1-2\sqrt{3})^3$ c) $(3-\sqrt{2})^2+4(2-\sqrt{2})$.

Zadanie 12. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{6}{\sqrt{10}+3}$ b) $\frac{11}{5-\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$.

Zadanie 13. Uprość wyrażenie posługując się wzorami skróconego mnożenia:

a) $(1-\sqrt{2})^2+(2-3\sqrt{2})^2$ b) $(2-2\sqrt{7})^2+(1-\sqrt{7})^2$

c) $(1-\sqrt{5})^2+2(2-3\sqrt{5})^2$ d) $(1-\sqrt{3})^3+2(2-3\sqrt{3})^3$.

6. ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

Statystyka to dział matematyki zajmujący się zbieraniem, analizą, interpretacją oraz prezentacją danych. Prowadząc badania statystyczne pewnej zbiorowości (populacji), wybieramy reprezentatywną jej podgrupę, zwaną **próbą.**

Temat: *SPOSOBY PREZENTACJI PROBLEMÓW W STATYSTYCE*

Zadanie 1. W pewnej toruńskiej szkole uczy się 300 uczniów. Dziewczynki stanowią $\frac{2}{5}$ wszystkich uczniów. Przedstaw te informacje na diagramie

a) prostokątnym, b)słupkowym c)kolumnowym

Zadanie 2. W czasie ferii Rafał codziennie rano odczytywał temperaturę powietrza na termometrze za oknem swojego pokoju. Wyniki pomiarów umieścił w tabeli.

Dzień	Pn.	Wt.	Śr.	Cz.	Pt.	Sob.	Nd.	Pn.	Wt.	Śr.	Czw.	Pt.	Sob.	Nd.
Temperatura	2°	4°	1°	1°	0°	–2°	–4°	–8°	–6°	–2°	0°	3°	4°	6°

a) Sporządź wykres liniowy.

b) W którym dniu ferii temperatura była najwyższa, a w którym najniższa?

c) Czy były dni, w których były takie same temperatury?

Zadanie 3. Tabela przedstawia straty ciepła w domu jednorodzinnym. Wykonaj diagram słupkowy tak, aby przedstawiał te dane:

Nazwa części domu	**komin**	**dach**	**ściany**	**okna**	**piwnica**
Ilość uciekającego ciepła	**14%**	**18%**	**40%**	**18%**	**10%**

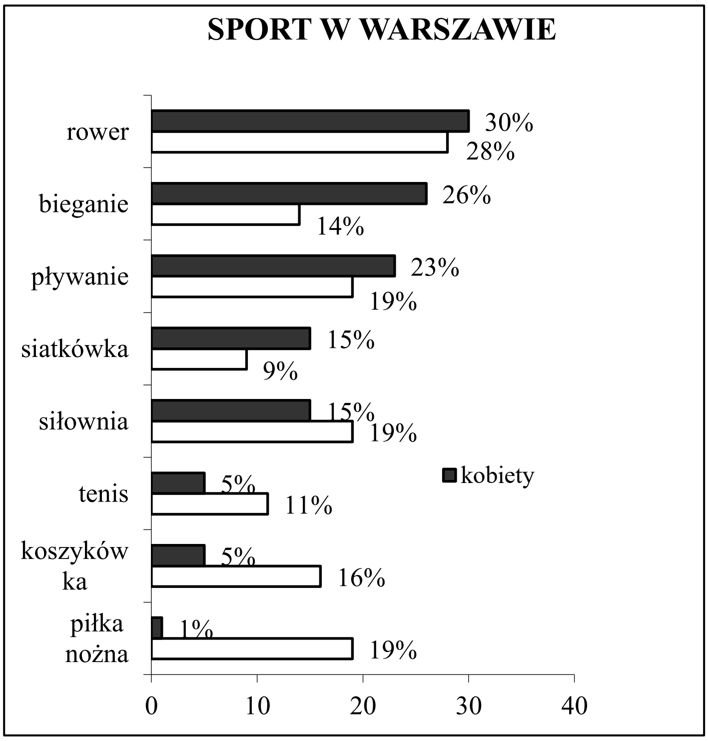
Zadanie 4. Pani Maria przeznaczyła: 30% swojego ogrodu pod uprawę ziemniaków, 15% pod buraki, 10% pod cebulę, 8% pod pomidory, 12% pod ogórki, a resztę pod kwiaty. Wykonaj diagram prostokątny podziału ogródka.

Zadanie 5. Przeprowadzono ankietę, w której pytano o ulubiony sposób prezentowania danych statystycznych. Spośród 120 respondentów 48 osób wybrało diagram kołowy, 37 osób – diagram kolumnowy, 13 osób – tabelę, a pozostali nie zajęli stanowiska. Przedstaw wynik tej ankiety:

a) w tabeli b)na diagramie kolumnowym.

Temat:ODCZYTYWANIE I INTERPRETACJA DANYCH STATYSTYCZNYCH

Zadanie 1. Dany jest wykres słupkowy obrazujący zainteresowanie sportem mieszkańców Warszawy.



Odpowiedz na pytania:

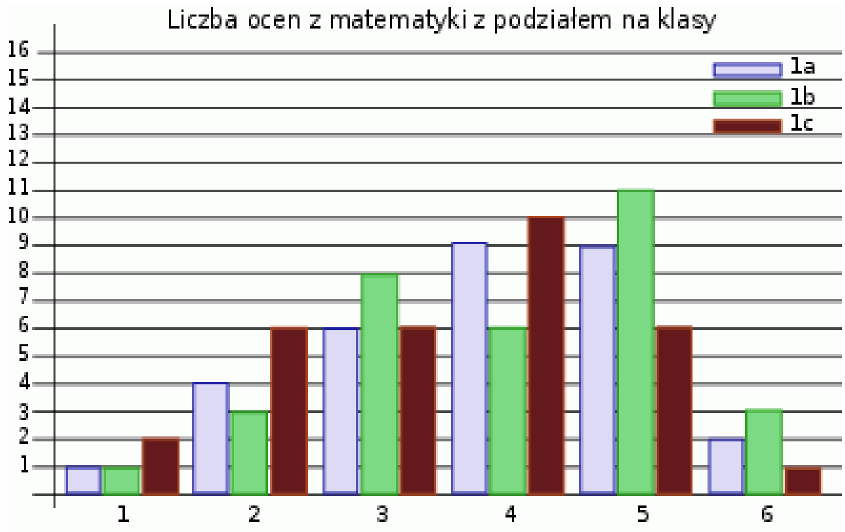
a) Jaki sport najbardziej lubią mężczyźni, a jaki kobiety?

b) Jaki sport cieszy się najmniejszą popularnością wśród kobiet, a jaki wśród mężczyzn?

c) Czy bieganie jest bardziej popularne wśród kobiet czy wśród mężczyzn?

d) Czy kobiety bardziej lubią pływanie czy jazdę rowerem?

Zadanie 2. W pewnej szkole przeprowadzono ten sam sprawdzian z matematyki w trzech klasach 1a, 1b i 1c. Na poniższym diagramie przedstawiono wyniki tego sprawdzianu z wyszczególnieniem liczby osób, które uzyskały poszczególne oceny.

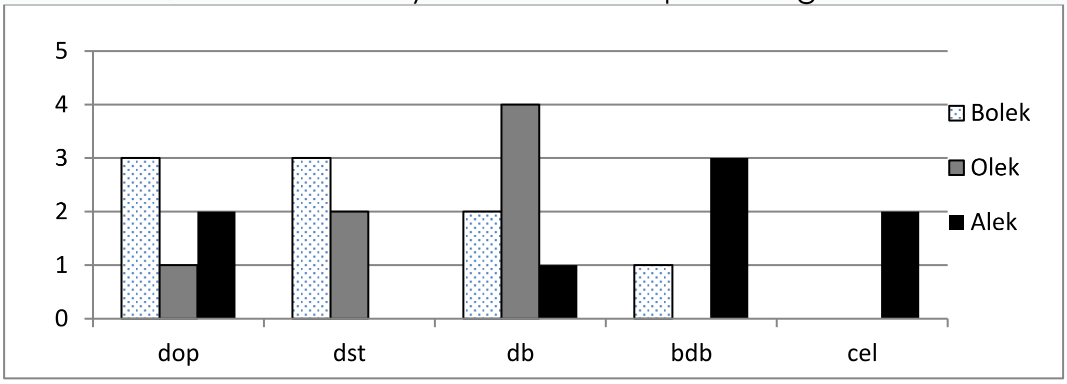


a) Ilu uczniów pisało sprawdzian w poszczególnych klasach?

b) Która z ocen była wystawiana najczęściej?

c) W której klasie średnia ocen ze sprawdzianu była najwyższa?

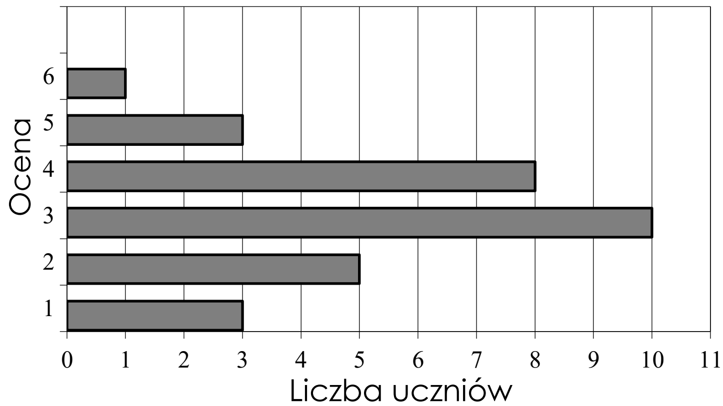
Zadanie 3. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.



a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?

b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?

Zadanie 4. Na diagramie słupkowym przedstawiono wyniki ze sprawdzianu w klasie III. Korzystając z diagramu odpowiedź na pytania:



a)Ilu uczniów pisało sprawdzian?

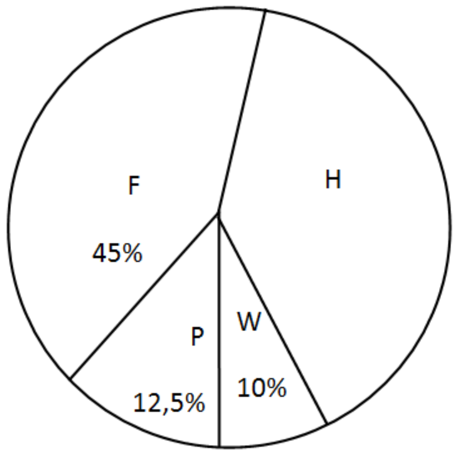
b)Jaki procent uczniów uzyskało ze sprawdzianu ocenę co najmniej dobrą?

c) Ilu uczniów liczy ta klasa, jeśli wiadomo, że sprawdzianu nie pisało 6,25% uczniów?

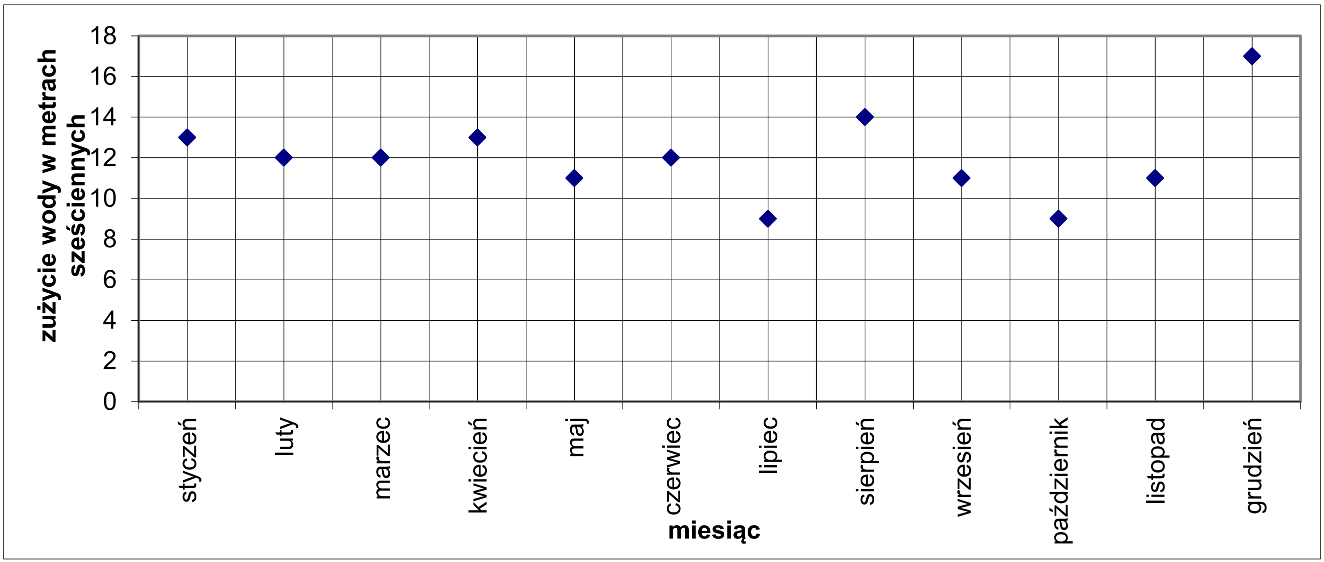
Zadanie 5. Zamieszczony diagram kołowy przedstawia udział uczestników letniego studium językowego w Londynie wg narodowości.

F – Francuzi H – Holendrzy
P – Polacy W – Włosi

Wiadomo, że Francuzów było o 84 więcej niż Włochów.
a)Ilu Polaków uczestniczyło w tym studium?
a)O ilu więcej było uczestników studium z Europy Zachodniej niż z Europy Południowej?

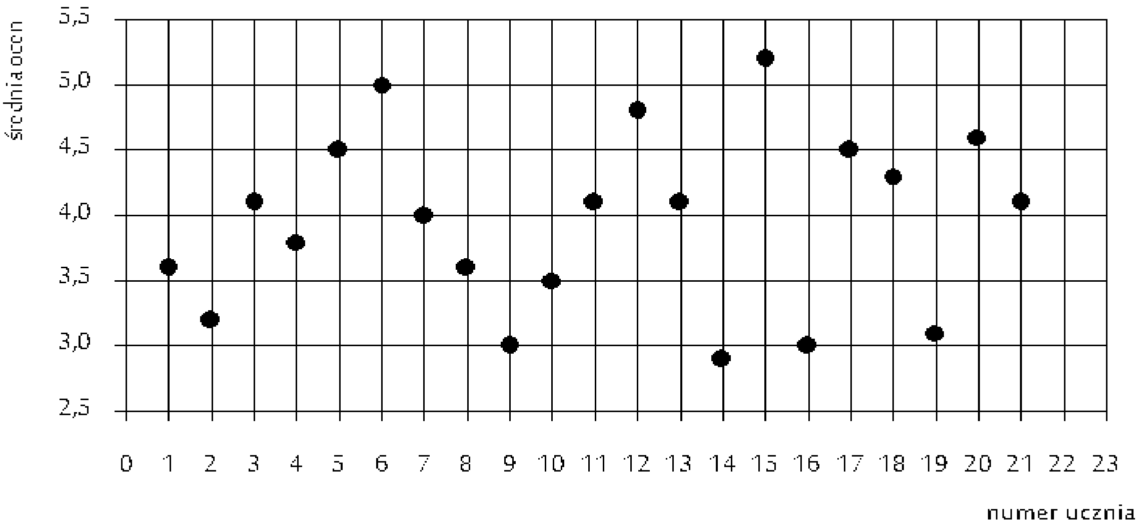


Zadanie 6. Pan Kowalski zaznaczał na wykresie liczbę metrów sześciennych wody zużytej przez jego rodzinę w kolejnych miesiącach jednego roku.



a) Odczytaj, ile wody zużyła ta rodzina w czerwcu?
b) W którym miesiącu rodzina Kowalskich zużyła najwięcej wody?
c) Oblicz, ile litrów wody zużyła ta rodzina w ciągu roku?
d) Ile zapłacono za wodę w maju, jeżeli 1m^3 wody kosztuje 5,12 zł?
e) W którym kwartale roku zużycie wody przez rodzinę Kowalskich było największe?

Zadanie 7. Poniższy wykres przedstawia średnie ocen uzyskane przez uczniów pewnej klasy na koniec pierwszego półrocza.



a) Ilu uczniów liczy ta klasa?
b) Jaką średnią ocen ma uczeń o numerze 7?
c) Którzy uczniowie mają średnią 4,5?
d) Jaka jest najwyższa, a jaka najniższa średnia ocen w tej klasie?
e) Jaka średnia powtarza się najczęściej?
f) Ilu uczniów uzyskało średnią wyższą niż 4,75?

Zadanie 8. Wykres punktowy przedstawia wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie. Odpowiedz na pytania i wykonaj polecenia:

a) Ile osób otrzymało ocenę dobrą?

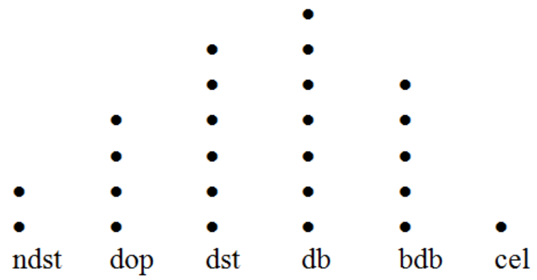
b) Jakich ocen było najmniej?

c) Jakich ocen było najwięcej?

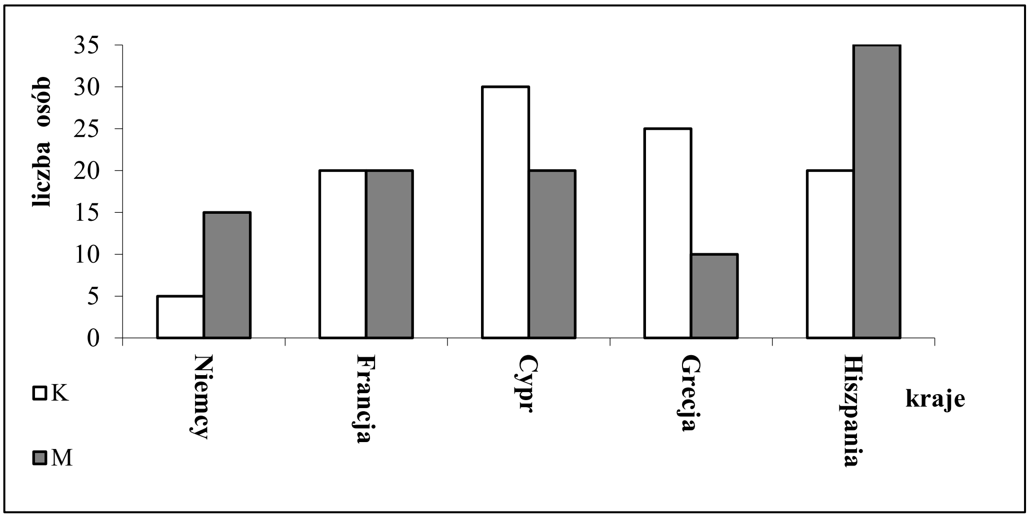
d) Czy więcej było ocen bardzo dobrych czy dostatecznych?

e) O ile więcej było ocen dobrych niż dopuszczających?

f) Ile osób pisało ten sprawdzian?



Zadanie 9. Przepytano 200 losowo wybranych przechodniów pytając, który z krajów europejskich odwiedziliby najchętniej w czasie wakacji. Uzyskane odpowiedzi ilustruje diagram. Odczytując informacje z wykresu, odpowiedz na pytania:



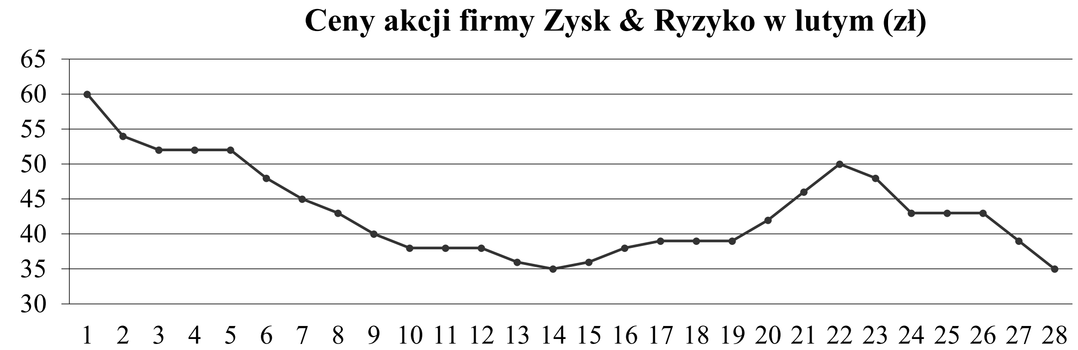
a) Który z krajów byłby najchętniej odwiedzany przez kobiety, a który przez mężczyzn?

b) Który z krajów cieszy się takim samym zainteresowaniem wśród kobiet i mężczyzn?

c) Który kraj cieszy się najmniejszą popularnością wśród kobiet? Jaki to % wszystkich kobiet?

d) Który kraj cieszy się najmniejszą popularnością wśród mężczyzn? Jaka to część tej grupy?

Zadanie 10. Wykres przedstawia cenę akcji (w zł) firmy Zysk & Ryzyko w kolejnych dniach lutego pewnego roku.

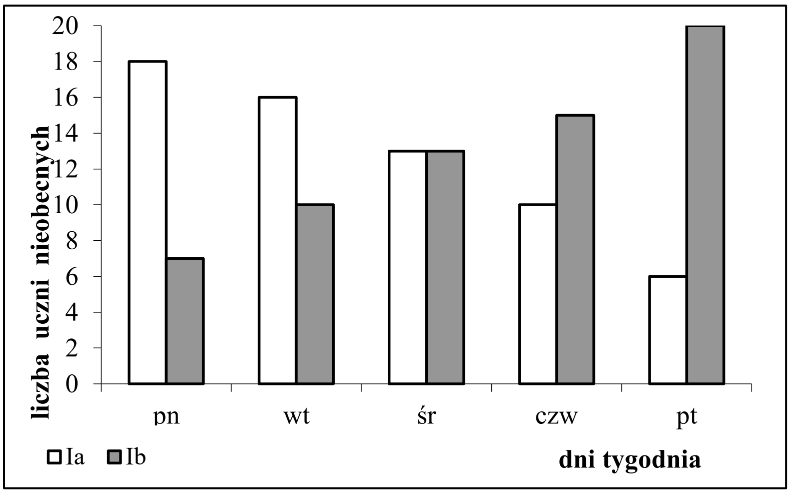


a) O ile złotych spadła w lutym wartość tych akcji?

b) Czy kupując i sprzedając te akcje w ciągu lutego, można było na nich zarobić? W jakich dniach należało je kupować, a w jakich sprzedawać, aby zysk w ciągu lutego był możliwie największy?

c) W soboty i niedziele giełda jest nieczynna. Czy domyślasz się, w których dniach lutego tamtego roku były poniedziałki?

Zadanie 11. Na poniższym histogramie przedstawiono absencję w dwóch równoległych klasach. Korzystając z wykresu, odpowiedz na poniższe pytania:



a) Która klasa została wcześniej zarażona grypą?
b) Którego dnia była jednakowa absencja w obu klasach, a kiedy najbardziej się różniła?
c) Ilu uczniów brakowało w dniu o najmniejszej absencji w klasie I a? Wiedząc, że klasa I a liczy 25 uczniów oblicz, jaki to procent całej klasy.
d) Ilu uczniów brakowało w dniu o największej absencji w klasie I b? Wiedząc, że klasa I b liczy 32 uczniów oblicz, jaki to procent całej klasy.
e) Przez ile dni w klasie I a brakowało więcej niż 10 uczniów? Jaka to część „szkolnego” tygodnia? Jaki to procent?

Temat: ŚREDNIA ARYTMETYCZNA I WAŻONA DANYCH STATYSTYCZNYCH

Średnią arytmetyczną liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę $\bar{x}$, którą określamy wzorem: $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

Średnią arytmetyczną ważoną liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ z odpowiadającymi im odpowiednio wagami $n_1, n_2, \dots, n_n$, określamy wzorem

$\overline{x_w} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_nx_n}{n_1+n_2+\cdots+n_n}$, gdzie $n_1 \in R^+,\ n_2 \in R^+, \dots, n_n \in R^+$.

Zadanie 1.Oblicz średnią arytmetyczną liczb:

a)15, 22, 17, 19, 11, 14

b)3, 5, 4, -7, 3,1, 6

c)47, 53, 22, 15, 38, 65

d) 5, 4, 6, 2, 8, 1, 4, 6, 7, 9, 2, 3, 6, 2, 7.

Zadanie 2. Wypłaty pracowników firmy „LEGA” wyniosły w grudniu 2003 roku: 1600 zł, 1600 zł, 4200 zł, 1280 zł,1280 zł, 4200 zł, 1400 zł, 1523 zł, 1523 zł, 1523 zł, 1400 zł, 6150 zł. Oblicz średnią grudniową płacę pracownika tej firmy.

Zadanie 3. (matura 2010)
Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x,3,1,4,1,5,1,4,1,5 jest równa 3. Oblicz x

Zadanie 4. Średnia arytmetyczna liczb 8, x, 6, 18, 2, 24, 14, 6 wynosi 11,25. Oblicz x.

Zadanie 5. Wyznacz wartość x tak, aby:

a) średnia arytmetyczna zestawu danych 2,3,5,5,7,10, x wynosiła 12

b) średnia arytmetyczna zestawu danych -4,1,5,10,3x+1 wynosiła 7.

Zadanie 6 (CKE)
W tabeli przedstawiono wyniki części teoretycznej egzaminu na prawo jazdy. Zdający uzyskał wynik pozytywny, jeżeli popełnił co najwyżej da błędy.

Liczba błędów	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Liczba zdających	8	5	8	5	2	1	0	0	1

Oblicz średnią arytmetyczną liczby błędów popełnionych przez zdających ten egzamin. Wynik podaj w zaokrągleniu do całości.

Zadanie 7. Ada chciałaby otrzymać świadectwo z wyróżnieniem, do czego potrzebna jest jej średnia ocen większa niż 4,75. Nauczyciele wystawili jej dwie oceny celujące, cztery bardzo dobre, cztery dobre i jedną dostateczną. Każdą z ocen (oprócz celujących) można poprawić o jeden stopień. Ile ocen powinna poprawić, aby otrzymać świadectwo z wyróżnieniem?

Zadanie 8. Średnia temperatura pierwszych dziewięciu dni marca wynosiła 5C, a średnia temperatura pierwszych dziesięciu dni marca wynosiła 6,5cC. Oblicz, jaką średnią temperaturę odnotowano 10 marca.

Zadanie 9. Średnia płaca w zakładzie A zatrudniającym 15 pracowników wynosi 2500 zł, w przedsiębiorstwie B zatrudniającym 20 pracowników wynosi 3000 zł. Oblicz średnią płacę pracowników obydwu przedsiębiorstw.

Zadanie 10. W pewnym zakładzie zatrudniającym 10 pracowników średnia płaca wynosi 3000 zł. Jeden z pracowników zarabia 2500 zł. O ile złotych powinien mieć podniesioną pensję ten pracownik aby jego płaca była równa średniej płacy w tym zakładzie?

Zadanie 11. (matura 2012)
Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300zł. Oblicz cenę szóstej akcji.

Zadanie 12. Oblicz średnią ważoną liczb:

a) 2, 4, 3, 6, 3, 5 z wagami odpowiednio: 2, 3, 1, 2, 5, 1.

b) 5, 3, 8, 7, 9 z wagami odpowiednio: 0,1; 0,3; 0,1; 0,2; 0,3.

Zadanie 13. W ciągu semestru uczeń otrzymał oceny: 4, 4, 5 z wagą 5;
3 i 2 z wagą 7 oraz 3, 4, 5, 5 z wagą 3. Oblicz średnią ważoną ocen tego ucznia.

Zadanie 14. W tabeli podano liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną tych liczb:

a)

Liczba	18	6
Waga	3	4

b)

Liczba	12	13	14
Waga	6	5	1

c)

Liczba	3	41	15	6
waga	3	6	2	7

d)

Liczba	2	5	3	4
waga	0,3	0,1	0,5	0,1

Zadanie 15. Pewien profesor wystawia oceny z egzaminu korzystając ze średniej ważonej oraz uwzględniając wyniki z egzaminu pisemnego, ustnego i oceny z ćwiczeń. Ocena z ćwiczeń ma wagę 0,2; ocena z egzaminu pisemnego ma wagę 0,5; a z ustnego 0,3. Jakie oceny otrzymali studenci, których wyniki przedstawiono w tabeli:

Nazwisko	Ocena z ćwiczeń	Ocena z egzaminu pisemnego	Ocena z egzaminu ustnego
Jaroński	4	3	4
Witkowska	2	3	4
Nowicka	4	5	4

Zadanie 16. Pan Koszycki wystawiając oceny semestralne oblicza średnie ważone ocen: średniej ocen z kartkówek z wagą 0,3; średniej ocen z prac klasowych z wagą 0,4; średniej ocen z prac domowych z wagą 0,1; średniej ocen z odpowiedzi z wagą 0,2. Oblicz, jakie oceny otrzymają uczniowie, których oceny przedstawiono:

Nazwisko i imię	Kartkówki	Prace klasowe	Prace domowe	Odpowiedzi
Bułkowski Adam	3, 4, 5, 2, 1	4, 3	3, 4, 2	5, 3, 1
Kot Anna	2, 3, 5, 4, 3	3, 4,	5, 3, 4, 2	2, 4, 4

Zadanie 17. Uczestnicy kursu języka angielskiego mieli wystawioną ocenę końcową jako średnią ważoną za pięć umiejętności: rozumienie ze słuchu, wypowiedzi ustne, rozumienie tekstu pisanego, wypowiedzi pisemne, znajomość gramatyki odpowiednio z wagami: 4, 5, 1, 3, 2. Określ oceny końcowe uczestników kursu, których wyniki zestawione są w tabeli poniżej:

Uczestnik	Rozumienie ze słuchu	Wypowiedzi ustne	Rozumienie tekstu pisanego	Prace pisemne	Gramatyka	Ocena końcowa
	Waga: 4	Waga: 5	Waga: 1	Waga: 3	Waga: 2	
Krzysztof	3	4	2	3	4	
Anna	4	2	3	3	4	
Jan	4	5	4	2	2	

Zadanie 18. W tabeli zestawione są cechy trzech biur podróży uwzględniające: cenę, opinię znajomych, atrakcyjność oferty. Każdej z tych cech przydzielono odpowiednie punkty w skali od 1 do 10 oraz wagi.

Cechy	Liczba punktów		
	Cena (waga 4)	Opinia (waga 3)	Atrakcyjność (waga 6)
Biuro A	2	3	9
Biuro B	5	6	4
Biuro C	6	5	3

Oblicz średnie ważone dla poszczególnych biur podróży.

Temat: MEDIANA I DOMINANTA ZESTAWU DANYCH STATYSTYCZNYCH

Medianą (wartością środkową) zestawu uporządkowanych niemalejąco danych statystycznych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę dzielącą ten zestaw danych na dwie części o równej liczebności.

Jeżeli liczba danych statystycznych jest nieparzysta, to medianą jest wyraz środkowy. Jeżeli liczba danych jest parzysta, to mediana jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów.

Dominantę (modą, wartością modalną) nazywamy wartość występującą najczęściej w zestawie danych statystycznych.

Jeżeli wszystkie dane występują z taką samą liczebnością, to dominanty w zestawie danych nie ma. Jeżeli kilka danych występuje z taka samą, największą częstotliwością, to dominantą jest każda z tych liczb.

Zadanie 1. Wyznacz medianę i dominantę danych:

a) 2,3,2,5,2,3,2

b)1,2,1,3,1,2,1,4

c)1,6,2,8,100

d) 2,4,5,2,4,6

e)2,5,5,7,1,2,3,5,3

f)5,5,5,7,7,7.

Zadanie 2. Monika otrzymała w I semestrze następujące oceny z matematyki:
2, 5, 4, 4, 3, 6, 5, 3. Ile wynosi mediana jej ocen?

Zadanie 3. (matura 2012)
Pewna firma zatrudnia 6 osób. Dyrektor zarabia 8000 zł, a pensje pozostałych pracowników są równe: 2000 zł, 2800 zł, 3400 zł, 3600 zł, 4200 zł. Ile wynosi mediana zarobków 6 osób?

Zadanie 4. Uczniowie otrzymali następujące oceny z kartkówki:
2, 3, 4, 5, 2, 4, 1, 5, 3, 2, 4, 2, 5, 5, 4, 3, 1, 2, 2, 5, 4, 3.

a) wyznacz medianę.

b) wyznacz dominantę.

Zadanie 5. Do zestawu liczb 10, 11, 13, 14, 14 dopisz jeszcze pięć liczb tak, by mediana całego zestawu była równa 12.

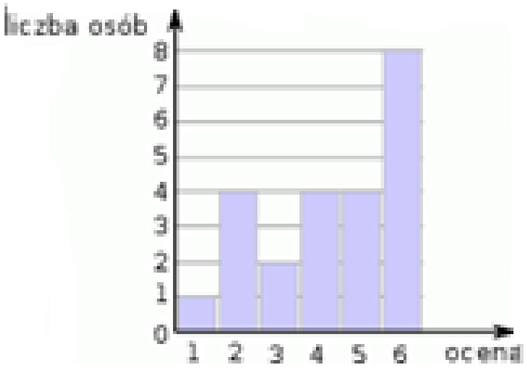
Zadanie 6. (matura 2013)

Mediana uporządkowanego niemalejąco zestawu sześciu liczb 1,2,3,x,5,8 jest równa 4. Wyznacz x.

Zadanie 7. Na grupie uczniów przeprowadzono badanie na temat ulubionego szkolnego przedmiotu (wyniki zebrano w tabeli). Oblicz medianę i dominantę dla tej grupy.

Przedmiot	Liczba wskazań
Matematyka	15
Geografia	17
Język angielski	10
Historia	17
w-f	9

Zadanie 8. Wyniki sprawdzianu z matematyki są przedstawione na diagramie.



Podaj medianę i dominantę ocen.

Zadanie 9. Średnia arytmetyczna poniższego zestawu danych wynosi 2,5. Uzupełnij tabelkę. Podaj medianę i dominantę.

Wartość	1	2		5
Liczba wskazań	5	5	1	4

Zadanie 10. Średnia arytmetyczna poniższego zestawu danych wynosi 5,2. Uzupełnij tabelkę. Podaj medianę i dominantę

Wartość	1	2		12
Liczba wskazań	5	8	5	7

Zadanie 11. Mediana kolejnych pięciu liczb naturalnych jest równa 7. Oblicz najmniejszą z tych liczb.

Zadanie 12. Oblicz medianę i modę danych przedstawionych w tabeli

Wartość x_i	0	1	2	3	4	5
Liczebność n_i	4	4	2	1	1	3

Zadanie 13. Dopisz 7 takich liczb, aby otrzymać zestaw liczb, których:

a) mediana jest równa 72: 72 72 73 77 77

b) mediana jest równa 13: 12 12 14 14 15.

Zadanie 14. Poniższe liczby przedstawiają wiek (w latach) uczestników wycieczki zorganizowanej przez uczniów klasy I gimnazjum i ich opiekunów:

11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 32, 48

a) Oblicz średni wiek uczestników tej wycieczki. Jak sądzisz, czy otrzymana liczba dobrze charakteryzuje tę grupę osób?

b) Oblicz medianę i dominantę wieku tych osób.

Czy te liczby lepiej niż średnia charakteryzują przeciętny wiek uczestników wycieczki?

Zadanie 15. Badania lekarskie w szkole, gdzie między innymi badano u uczniów tętno serca, przyniosły następujące wyniki:

dziewczynki: 80, 60, 80, 60, 70, 88, 72, 96, 80, 80, 80, 68, 72

chłopcy: 72, 80, 67, 68, 80, 69, 80, 56, 76, 68, 79, 82

a) Wyniki przedstaw w postaci diagramu słupkowego dla dziewcząt oraz dla chłopców.

b) Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę dla każdej z grup.

Temat: WARIANCJA I ODCHYLENIE STANDARDOWE

Przykład Trzech uczniów otrzymało z języka niemieckiego następujące oceny:

Arek: 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2

Krzysiek: 5, 4, 3, 3, 3, 2, 1

Wojtek: 6, 4, 3, 3, 3, 1, 1.

Okazuje się, że dla każdego zestawu różnych ocen średnia arytmetyczna, mediana i dominanta są takie same. Oceny Arka są bardziej skupione wokół średniej, oceny Krzyśka i Wojtka są bardziej rozproszone.

Miarą odchylenia danych statystycznych są wariancja i odchylenie standardowe.

Wariancja $\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$

Odchyleniem standardowym zestawu danych statystycznych $x_1, x_2, \dots, x_n$ od średniej arytmetycznej $\bar{x}$ nazywamy liczbę σ, równą pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji σ^2:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}.$$

(Odchylenie standardowe iInformuje czy rozrzut wyników wokół średniej jest mały czy duży).

Zadanie 1. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe ocen otrzymanych przez Arka, Krzyśka i Wojtka.

Zadanie 2. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe zestawu liczb:

a)33, 23, 34, 45, 30 b)12, 10, 5, 87 11,9

Zadanie 3. W pewnej miejscowości mierzono temperaturę powietrza (w °C) otrzymano następujące wyniki: 28,20,27,26,25,25,24,24,25,26. Oblicz średnią i odchylenie standardowe tych temperatur.

Zadanie 4. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe zarobków pracowników firmy „Kowal i syn”, które wynoszą: 1320 zł, 1400 zł, 1400 zł, 1380 zł, 2500 zł, 3100 zł, 1520 zł, 3500 zł.

Zadanie 5. Podczas zawodów kilkoro widzów mierzyło na stoperach czas, w jakim sprinter pokonał pewną odległość. Otrzymali następujące wyniki: 32,2s; 31,9 s; 32,1 s; 32,2 s; 32 s; 32,3 s. Obliczając odchylenie standardowe.

Zadanie 6. Czterech uczniów otrzymało następujące oceny:

• Uczeń 1: bdb, db, dst, cel, dop

• Uczeń 2: db, db, db, db, db

• Uczeń 3: bdb, bdb, db, dst, dst

• Uczeń 4: cel, cel, db, dop, dop

Oblicz średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe dla poszczególnych uczniów.

Zadanie 7. Zmierzono wysokości dwunastu zawodników w drużynie siatkarskiej i uzyskano następujące wyniki: 1,86 m, 2,05 m, 1,9 m, 1,78 m, 2,11m, 1,76 m, 1,93 m, 1,86m 1,78 m, 2,05 m, 1,86 m, 1,94 m.

a) Wyznacz średnią wysokość zawodnika.

b) Wskaż medianę i modę zestawu danych.

c) Oblicz odchylenie standardowe wysokości.

Zadanie 8. Tabela przedstawia wyniki sprawdzianu w klasie III. Oblicz:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	3	5	7	6	2	2

a) średnią arytmetyczną

b) wariancję i odchylenie standardowe ocen

Zadanie 9. Tabela przedstawia wyniki kartkówki w dwóch grupach uczniów:

Ocena	Liczba ocen w I grupie	Liczba ocen w II grupie
1	5	3
2	2	5
3	4	2
4	6	5
5	1	3
6	0	1

Oblicz:

a) średnią arytmetyczną ocen dla każdej z grup

b) wariancję i odchylenie standardowe ocen dla każdej z grup, a następnie oceń, w której z grup wyniki kartkówki były bardziej wyrównane.

Zadanie 10. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe długości dwóch rodzajów rybek trzymanych w tym samym akwarium:

Długość (w cm)	10,5	11	11,2	10,8	11,4	11,5
Liczba bystrzyków amerykańskich	2	3	4	6	1	2
Liczba bystrzyków Poptellaorbicularis	5	2	4	3	1	4

Zadanie 11. W poniższej tabeli przedstawiono wyniki sondażu przeprowadzonego w grupie uczniów, dotyczącego czasu przeznaczonego dziennie na przygotowanie zadań domowych

Czas (w godzinach)	1	2	3	4
Liczba uczniów	5	10	15	10

a) Naszkicuj diagram słupkowy ilustrujący wyniki tego sondażu.

b) Oblicz średnią liczbę godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na przygotowanie zadań domowych.

c) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczonego na przygotowanie zadań domowych. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Zadanie 12. Tabela przedstawia pewne dane statystyczne:

Wartość x_i	0	1	2	3	4	5
Liczebność n_i	4	4	2	1	1	3

a) Wyznacz wariancję tych danych.

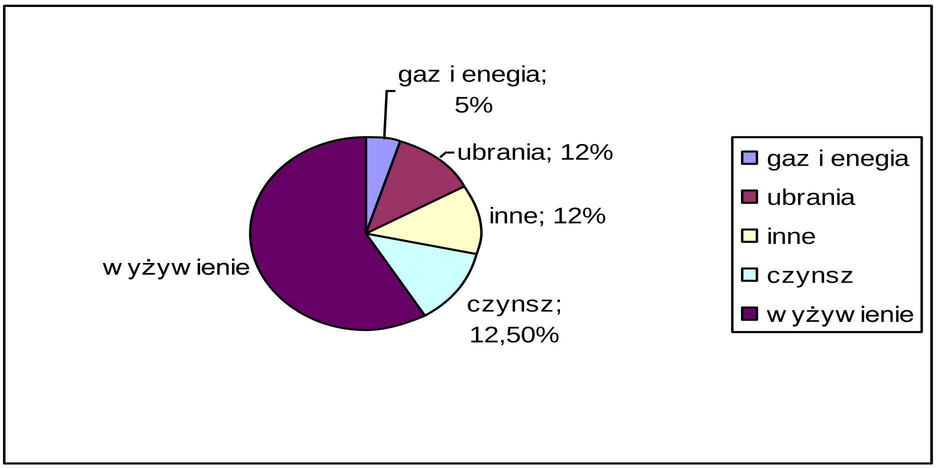
b) Wyznacz odchylenie standardowe tych danych z dokładnością do 0,01.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ wyznaczyć medianę, dominantę, średnią arytmetyczną i średnią arytmetyczną ważoną danych statystycznych
- ✓ przedstawić dane statystyczne na diagramie
- ✓ odczytać dane z wykresów statystycznych
- ✓ obliczyć wariancję i odchylenie standardowe danych

Zadanie 1. Państwo Kowalscy wspólnie zarabiają miesięcznie 4000 zł. Diagram kołowy przedstawia, w jaki sposób wydają zarobione pieniądze:



Korzystając z danych oblicz:

a) Jaką kwotę miesięcznie wydają Kowalscy na czynsz?

b) Jaką kwotę miesięcznie wydają Kowalscy na wyżywienie?

c) o ile więcej wydają na ubrania niż na czynsz?

Zadanie 2. Średnia arytmetyczna liczb 47, 53, x, 15, 38, 65 wynosi 40. Oblicz x.

Zadanie 3. Wyznacz medianę liczb: 47, 53, 22, 15, 38, 65.

Zadanie 4. W tabeli pokazano liczbę punktów uzyskanych przez uczniów na konkursach przedmiotowych organizowanych w minionym roku szkolnym:

Liczba konkursów	3	2	5	1	1
Liczba uzyskanych punktów	23	14	25	12	18

a) W ilu konkursach brali udział uczniowie?

b) Wyznacz średnią ilość punktów uzyskanych w konkursach.

c) Wyznacz dominantę uzyskanych punktów.

d) Wyznacz medianę uzyskanych punktów.

Zadanie 5. Przez tydzień Michał zapisywał wysokość temperatury powietrza. Oto jego wyniki: 13°C, 15°C, 17°C, 16°C, 15°C, 19°C, 20°C.

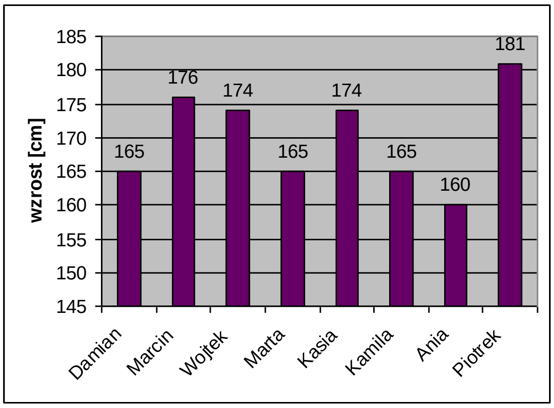
a) przedstaw te wyniki na diagramie słupkowym

b) wyznacz średnią temperaturę

c) podaj dominantę wyników

d) oblicz medianę wyników.

Zadanie 6. Diagram przedstawia wzrost w cm wybranej grupy uczniów:



a) Ułóż tabelę porządkując pomiary wzrostu uczniów od najniższego.

b) Oblicz średni wzrost ucznia tej grupy.

c) Podaj dominantę wyników.

d) Podaj medianę wyników.

Zadanie 7. Średnia wieku w pewnej grupie studentów równa jest 22 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna równa jest 25 lat. Opiekun ma 49 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

Zadanie 8. Tabela przedstawia wyniki sprawdzianu w klasie III. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie)odchylenie standardowe ocen.

Ocena	ndst	dop.	dst	db	bdb	cel.
Liczba ocen	3	5	7	6	2	6

Zadanie 9. Oblicz średnią ważoną poniższych danych, jeżeli:

x oznacza wyniki, w - wagi.

x	4	5	6	7
w	0,3	0,4	0,2	0,1

Zadanie 10. Dane są następujące liczby: 5, 8, 10, 12, 15. Oblicz odchylenie standardowe tych liczb.

Zadanie 11. W loterii przygotowano 1200 losów. Wśród nich są 3 losy z nagrodami po 1000 zł, 10 losów z nagrodami po 500 zł, 50 losów z nagrodami po 250 zł, 100 losów z nagrodami po 125 zł oraz 500 losów z nagrodami po 50 zł.

a) Wyznacz średnią wartość wygranych.

b) Wskaż medianę i dominantę.

c) Oblicz odchylenie standardowe wygranych.

Zadanie 12. Przeprowadzono sondaż wśród 20 kobiet na Temat rozmiaru ich ubrań: 38, 40, 42, 36, 42, 40, 40, 38, 42, 44, 46, 40, 40, 42, 50, 36, 42, 42, 40, 44. Oblicz średnią, wariancję i odchylenie standardowe powyższych danych surowych.

7. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI PIERWSZEGO STOPNIA Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Temat: RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Równaniem stopnia pierwszego z jedną niewiadomą x (równaniem liniowym) nazywamy równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie $a \in R$ i $b \in R$.

Pierwiastkiem (rozwiązaniem) równania $\mathbf{ax + b = 0}$ nazywamy liczbę, która spełnia to równanie, tzn. podstawiona za x zmienia równanie w zdanie prawdziwe.

Równanie $ax + b = 0$ nazywamy **oznaczonym**, jeżeli posiada dokładnie jedno rozwiązanie ($a \neq 0$)

Równanie $ax + b = 0$ nazywamy **nieoznaczonym**, jeżeli posiada nieskończenie wiele rozwiązań ($a = 0$ i $b = 0$).

Równanie $ax + b = 0$ nazywamy **sprzecznym**, jeżeli nie posiada rozwiązań ($a = 0$ i $b \neq 0$).

Równania nazywamy **równoważnymi,** gdy mają równe dziedziny i ten sam zbiór rozwiązań.

Uwaga: Jeżeli w trakcie rozwiązywania równania niewiadoma redukuje się do zera to równanie:

- nie ma rozwiązań(sprzeczne), gdy otrzymasz fałsz (np. 0≠ -2, 1≠ =5)

-ma nieskończenie wiele rozwiązań (nieoznaczone,)gdy otrzymasz prawdę(np. 0=0, 4=4).

Zadanie 1. Sprawdź, czy liczba -1 spełnia równania

a) $x+1=0$ b) $x^2+1=0$ c) $-\frac{1}{2}x^2+2\frac{1}{2}=2$

d) $|-x-1|=0$ e) $|x+1|+|x-1|=2$ f) $\sqrt{3-x}=\sqrt{2}$.

Zadanie 2. Określ, czy równanie jest oznaczone, nieoznaczone czy sprzeczne:
a) $5x-9=2x+(3x-2)$ b) $2x+3(3x-5)-10=3x-5$ c) $2(x-1)+4=2x+2$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie:
a) $3(x-2)-x=2(2x+1)$ b) $4(y-1)-2y=2(y+3)$

c) $0,3(2r-3)=0,2r+0,9$ d) $(x-2)(x+2)=x(x-3)$

e) $3(x-4)-2(2x-5)=-4$

f) $3-2x-(x-4)-(2x-5)=3x-4$

g) $x(x-1)-4=(x-2)(x+2)-x$

h) $2x-(4-x)=2\left(\frac{3}{2}x-2\right)$

i) $2x-5(x-2)=3(5-x)$

j) $2(x-7)-3(x+2)=4(x+3)+2(x-9)$

Zadanie 4. Rozwiąż równania zapisane w postaci proporcji:

a) $\frac{x}{4}=\frac{3}{5}$

b) $\frac{2x}{5}=\frac{x+2}{6}$

c) $\frac{x}{2x-3}=\frac{4}{7}$

d) $\frac{5}{x+3}=\frac{3}{x+1}$

e) $\frac{6x-2(x-4)}{3}=8$

f) $\frac{2-x}{x-3}=-\frac{4}{3}$

Zadanie 5. Rozwiąż równanie z ułamkami zwykłymi:

a) $3+\frac{8+x}{2}=2x+13$

b) $3x+\frac{4-x}{5}=x-1$

c) $2x-\frac{3x-7}{4}=x+1$

d) $\frac{x-1}{3}+5(x+3)=2-x$

e) $2(2x+7)-\frac{x-2}{5}=9+2x$

f) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=1$

g) $\frac{x+5}{10}+\frac{2x+5}{2}=\frac{2-x}{5}$

h) $\frac{x+3}{3}-\frac{2+x}{4}=\frac{3-2x}{12}$

i) $\frac{2x-3}{6}-\frac{8-x}{9}=\frac{x+3}{18}$

j) $\frac{2x-11}{4}+\frac{x+1}{12}=\frac{x-1}{6}$

k) $\frac{x+6}{2}-\frac{5+x}{3}=\frac{2-x}{6}$

l) $\frac{x+3}{3}-\frac{2+x}{4}=\frac{3-2x}{12}$

Zadanie 6. Rozwiąż równania:

a) $x^2-3+4x=(x+2)^2-1$

b) $x^2-3+4x=(x+2)^2-1$

c) $3x^2=(2x-1)^2+7-(x-1)^2$

d) $5-y^2=1-(y-2)(y+2)$

e) $(x-3)(x+3)-(x+2)^2-5=x+4$

f) $4x^2-(1-2x)^2+2x=11$

g) $(x+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=5$

h) $(3+\sqrt{6})(x-2\sqrt{6})=12-\sqrt{6}$

Zadanie 7. Do sporządzenia sałatki warzywnej potrzebna jest świeża kapusta, papryka, pomidory i cebula w stosunku wagowym 4 : 2 : 3: 1. Ile dekagramów każdego z tych warzyw trzeba zużyć do przygotowania 3 kilogramów tej sałatki?

Zadanie 8. Odcinkowi autostrady długości 3 km odpowiada na mapie odcinek długości 6 cm. Oblicz, jaką długość na mapie ma odcinek, któremu odpowiada w terenie odcinek autostrady o długości 10 km.

Zadanie 9. Stosunek długości boków trójkąta o obwodzie 38 cm, jest równy 4 : 6 : 9. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zadanie 10. Boki równoległoboku są w stosunku 2 : 3. Obliczyć długości boków, gdy obwód równoległoboku wynosi 65 cm.

Zadanie 11. Z doświadczalnego pola zebrano razem 1800 kg warzyw: ziemniaków, buraków i kapusty. Ziemniaków było 5 razy więcej niż buraków, a kapusty o 120 kg więcej niż buraków. Ile kilogramów każdego z warzyw zebrano?

Zadanie 12. W trójkącie ABC kąt A jest o 40° większy od kąta B, a kąt C jest mniejszy o 20° od kąta A. Znajdź kąty tego trójkąta.

Zadanie 13. Przed dwoma laty matka była 4 razy starsza od syna. Za 10 lat będą mieli razem 74 lata. Ile lat ma obecnie każde z nich?

Zadanie 14. Na lekcji matematyki 15% uczniów nie rozwiązało zadania, 30% rozwiązało z błędami, a pozostałych 11 uczniów rozwiązało zadanie poprawnie. Ilu uczniów liczyła klasa?

Temat: UKŁADY RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Układ równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi nazywamy:

- **oznaczonym,** gdy ma jedno rozwiązanie np. $\begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$

- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań (niewiadome zerują się i otrzymujemy prawdę, np. 2=2)

-**sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań (niewiadome zerują się i otrzymujemy fałsz, np. $2 \neq -1$)

Metody rozwiązywania układów równań:

- metoda podstawiania

- metoda przeciwnych współczynników

Zadanie 1. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10x + 3y = -11 \\ -6x + 5y = 27 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -3x + 4y = 2 \\ 6x + 8y = -4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y - 4 = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ -1\frac{1}{2}x + 2y = 10 \end{cases}$ i) $\begin{cases} y - x = -13 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 5 \end{cases}$.

Zadanie 2. Podaj, jakie liczby można podstawić w miejsce a i b układu równań

$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ ax + by = 6 \end{cases}$, aby stał się:

a)oznaczony b)nieoznaczony c)sprzeczny.

Zadanie 3. Podaj jakie liczby należy wstawić za literkę „a" i „b", aby układ

$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ ax - 4y = b \end{cases}$ był:

a)oznaczony b)nieoznaczony c)sprzeczny.

Temat:NIERÓWNOŚCI STOPNIA PIERWSZEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Zadanie 1. Sprawdź, czy liczba *a* spełnia nierówność, gdy:

a) $4x \leq 0$ i a = 0 b) $-2(x+1) > 0$ i a =1,

c) $\frac{8}{x} < 2$ i a = 4 d) $x^2 < 9$ i a = -9.

Zadanie 2. Rozwiąż nierówność i zbiór jej rozwiązań przedstaw na osi liczbowej i zapisz za pomocą przedziału:

a) $-3 + 2x - 6 < 3 - 4x$ b) $5 - 3(4 - x) \geq 2(x - 3)$

c) $y - (7 + 2y) > 2(y - 1) - 3y$ d) $3 + \frac{u - 1}{2} > u,$

e) $-3(x+6) - 6(2x+8) \leq -2(4-x) + 9(x+8)$ f) $2(3a - 1) + \frac{1}{2} > a$

g) $5x(x-2) + 4 \geq -x(3 - 5x) - 7x$ h) $2x + \frac{x}{3} - 1 > 11,$

i) $4x(x+1) < (2x-2)(2x+2)$ j) $\frac{x+3}{3} - 2 \leq \frac{2(x-3)}{5}$

k) $\frac{x}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{12} - \frac{x}{2}$ l) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-1}{2} > \frac{1}{6}x$

m) $\frac{y+2}{3} - \frac{y-2}{2} \geq 1 - y$ n) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geq 2(x+2) - 5$

o) $x - \frac{x-10}{5} > 2 + \frac{4+2x}{2}$ p) $(1-x)^2 + 2x \leq 1 + x^2$

r) $(3-x)^2 < -x(4-x)$

s) $(2y-1)^2 + 7 \le (1+y)^2 + 3y^2$

t) $(x-1)^2 - 2(x-3) > (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

u) $2\sqrt{3} - x \ge 1 - 3\sqrt{3}$

v) $(\sqrt{3}-5)x > 1$

w) $1-\sqrt{3}x > x+5$

x) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)x \ge 4\sqrt{3}x - 10,$

y) $x - \pi \ge x\pi.$

Temat: RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI LINIOWE Z PARAMETREM

Zadane 1. Oblicz, dla jakich wartości parametru m nie ma rozwiązania równanie:

a) $2-4mx=6$

b) $2m(y-1)=m+y$

b) $\frac{1-3m}{2}x = 2x-3$

d) $\frac{m}{3}y = \frac{1}{5}y.$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie z niewiadomą x:

a) $mx = m-4$

b) $mx-4=m^2-2x$

b) $m^2x - m + 1 = x$

d) $8m^2x = 2m - 2x - 1.$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie z niewiadomą 1) x 2) m, gdy:

a) $3(x-m)+2m = 2(m-x)-13$

b) $\frac{1}{2}(m-2x) - \frac{1}{3}(x-3m) = 2x.$

Zadanie 4. Rozwiąż nierówność, w której niewiadomą jest x:

a) $mx > 0$

b) $mx \le 0$

c) $mx + m > 0$

d) $(m-1)x > m-1.$

Zadanie 5. *Rozwiąż nierówność* z niewiadomą 1) x 2) m, gdy:

a) $x+m > 2$

b) $2x - m < 4$

c) $5x + m < 4(m+2) - 3x$

Temat: WŁASNOŚCI WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ

Przypomnienie:

Wartość bezwzględną liczby a można zapisać wzorem:

$$|a| = \begin{cases} a, & gdy\ a \ge 0 \\ -a, & gdy\ a < 0 \end{cases}$$

Własności wartości bezwzględnej:

$|a| \geq 0$

$|a| = |-a|$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Zadanie 1. Oblicz

a) $|\sqrt{5} - 3|$

b) $|-4 + \sqrt{15}|$

c) $|-\sqrt{3} + \sqrt{7}|$

d) $|2\pi - 8|$

e) $|\sqrt{2} - 1|$

f) $|1 - 5\sqrt{5}|$.

Zadanie 2. Uprość podane wyrażenia, jeżeli wiadomo, że wyrażenie pod wartością bezwględną jest dodatnie:

a) $2 + |x-2|$

b) $x + 4 - |x-2|$

c)) $x + 3\,|x-2|$

d)) $4x - 6\,|x-2|$.

Zadanie 3. Uprość podane wyrażenia, jeżeli wiadomo,, że wyrażenie pod wartością bezwględną jest ujemne:

a) $2 + |x-2|$

b) $x + 4 - |x-2|$

c)) $x + 3\,|x-2|$

d)) $4x - 6\,|x-2|$.

Zadanie 4. Określ znak (+ lub -) wyrażeń z wartością bezwezględną w podanym przedziale, następnie opuść wartość bezwzględną:

a) $|x+3| \quad x \in (-3, \infty)$

b) $|x+3| \quad x \in (-\infty, -3)$

c) $|x| \quad x \in \langle 2{,}5 \rangle$

d) $|x-7| \quad x \in \langle 10, \infty)$

e) $|x-1| \quad x \in (-\infty, -5)$

f) $|x+2| \quad x \in (-8, -3)$

g) $|x+6| \ dla \ x > -4$

h) $|x+6| \ dla \ x \leq -7$

i) $|2x+8| \ dla \ x > -3$

j) $|4-3x| \ dla \ x > 2$.

Zadanie 5. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $|x| - |x-2|, \quad gdy \quad x \in (2; +\infty)$

b) $|1+x| - |x|, \quad gdy \quad x \in (-\infty; -1)$

c) $3|x-1| - 2|x+2| \quad gdy \quad x \in (-2; 1)$

d) $|x-2| + |x+2| - |2-x|, \quad gdy \quad x \in (0; 2)$

e) $\frac{x^2 - 25}{|x+5|} - \frac{9 - x^2}{|x-3|}, \quad gdy \quad x \in (-5; 3)$.

Zadanie 6. Oblicz wartość wyrażenia: $2|p|+|p-3|+|3-p|$ dla $p \in (0;3)$.

Przypomnienie wzorów skróconego mnożenia:

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $\qquad\qquad$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Zadanie 7. Zapisz wyrażenie używając symbolu wartości bezwzględnej :

a) $\sqrt{(5y)^2}$ b) $\sqrt{16x^2}$ c) $\sqrt{(y-z)^2}$

d) $\sqrt{(3a+5b)^2}$ e) $\sqrt{1-2x+x^2}$ f) $\sqrt{x^2-10x+25}$

g) $\sqrt{9x^2+30x+25}$ h) $\sqrt{1+98a+49a^2}$ i) $\sqrt{25x^2-20xy+4y^2}$.

Zadanie 8. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-2x+1}, \quad gdy \quad x>0,$

b) $\sqrt{9x^2-6x+1}+3\sqrt{x^2}, \quad gdy \quad x>\frac{1}{3},$

c) $\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{x^2-6x+9}, \quad gdy \quad x\in(-5;3).$

Temat: RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

$$|x|=a \Leftrightarrow x=-a \quad \vee \quad x=a$$
$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$$
$$|x|>a \Leftrightarrow x<-a \quad \vee \quad x>a$$

Zadanie 1. Korzystając z własności wartości bezwzględnej, określ czy równanie lub nierówność ma rozwiązanie:

a) $|x|=-2$ b) $|x|>3$ c) $|x+5|=3$

b) $|x-1|=0$ e) $|x+1|-1<0$ f) $\sqrt{x^2}\le 0$.

Zadanie 2. Rozwiąż równania:

a) $|x-4|=6$ b) $|3+x|=10$ c) $|2x+1|=3$

d) $|5x-4|=1$ e) $|4-x|=0{,}5$ f) $|3-2x|=9$

g) $\sqrt{(x+5)^2}=3$ h) $\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=2\frac{1}{2}$ i) $\sqrt{x^2+2x+1}=1$

j) $\sqrt{x^2-4x+4}=10$ k) $\sqrt{16+8x+x^2}=5$ l) $\sqrt{2-2\sqrt{2}x+x^2}=\sqrt{2}$.

Zadanie 3. Rozwiąż nierówności:

a) $|x| \le 4$ b) $|x| < 7$ c) $|x| > 6$

d) $|x| \ge 2$ e) $|x-3| < 1$ f) $|2-x| \le 5$

g) $|5+2x| \ge 7$ h) $|1-3x| > 2$ i) $\sqrt{(3x+1)^2} \le 2$

j) $\sqrt{(2-x)^2} > 3$ k) $\sqrt{x^2-10x+25} \le 1$ l) $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} \ge 2$.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI STOPNIA PIERWSZEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ sprawdzić, czy liczba jest rozwiązaniem równania (nierówności)
- ✓ rozwiązać równanie liniowe, układ równań liniowych
- ✓ rozwiązać zadanie tekstowe dotyczące równania liniowego
- ✓ rozwiązać nierówność liniową, rozwiązanie przedstawić na osi i zapisać za pomocą przedziału
- ✓ rozpoznać oznaczone, nieoznaczone lub sprzeczne równania lub układy równań
- ✓ stosować własności wartości bezwzględnej
- ✓ rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną

Zadanie 1. Równanie $2(x-1)+3x=5x+2$

A. ma jedno rozwiązanie B. ma dwa rozwiązania

C. nie ma rozwiązania D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

Zadanie 2. Zbiorem rozwiązań nierówności $2(x-4)<4x$ jest:

A. $x \in (-4;+\infty)$ B. $x \in (-\infty;-4)$ C. $x \in (-2;+\infty)$ D. $x \in (4;+\infty)$

Zadanie 3. Wskaż liczbę, która nie należy do zbioru rozwiązań nierówności

$5(3-x)+1>2(x-6)+4$: A. – 4 B. – 2 C. 2 D.4

Zadanie 4. Rozwiąż nierówność 8(1 – x) ≥ -12. Wskaż liczby naturalne spełniające tę nierówność.

Zadanie 5. Rozwiąż nierówność 4(4 – 3x) ≥ 20(x + 4). Wskaż największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

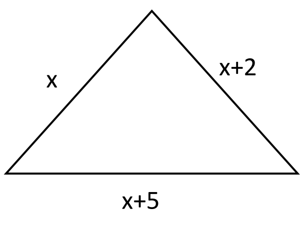
Zadanie 6. Rozwiąż:

a) -2(x + 4) – 5(x + 3) = 2 b) $5-\frac{x+5}{3}=2-x$ c) $\frac{2x-1}{3}=\frac{5-2x}{4}$

d) $\frac{x}{2}-\frac{3}{4}<\frac{7}{8}+\frac{x}{4}$ e) $(y-2)^2 \le (y-1)(y+1)$ f) $\frac{x-1}{3}-\frac{x-2}{2}>\frac{2x-5}{6}$.

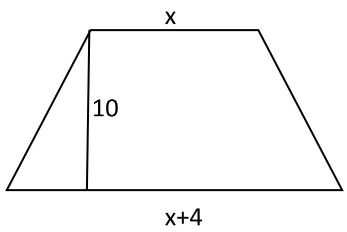
Zadanie 7. Zapisz równanie opisujące sytuację podaną na rysunku:

a)



Obwód = 100

b)



Pole trapezu = 50

Zadanie 8. Suma dwóch liczb wynosi 327. Znajdź te liczby, wiedząc, że jedna z nich jest o 5 większa od drugiej.

Zadanie 9. Średnia arytmetyczna trzech liczb wynosi 38. Znajdź te liczby, jeśli druga z nich jest o 6 większa od pierwszej, a trzecia jest dwa razy większa od drugiej.

Zadanie 10. Za 3 jednakowe zeszyty i długopis Jacek zapłacił 18 złotych. Długopis jest dwa razy droższy od zeszytu. Ile kosztował długopis?

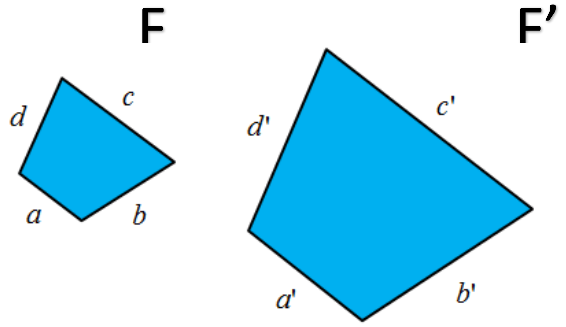
Zadanie 11. Rozwiąż: a) $|x+2|=5$ b) $|x+2|\geq 7$.

Zadanie 12. Dane jest wyrażenie: $|2-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-1|+2|1-\sqrt{3}|$. Oblicz wartość tego wyrażenia po opuszczeniu symbolu wartości bezwzględnej.

8. FIGURY PODOBNE I TWIERDZENIE TALESA

Z figurami podobnymi spotykamy się w życiu codziennym.
Są to przedmioty, które mają taki sam kształt, ale mogą się różnić wielkością (np.jacht morski i jego model, sfotografowany obiekt na zdjęciach różnej wielkości)).

Jeżeli figura F jest podobna do figury F', to piszemy **F≈F'**



O tym, ile razy jedna figura została zmniejszona lub zwiększona względem drugiej figury informuje nas **skala podobieństwa** k.

Skalę podobieństwa figury F do figury F' można obliczyć następująco:

$k=\frac{a}{a'}$ lub $k=\frac{b}{b'}$ lub $k=\frac{c}{c'}$ lub $k=\frac{d}{d'}$.

Obliczając skalę podobieństwa figury F' do F, należy podzielić dowolny bok figury F' przez odpowiedni bok figury F'.

<u>Uwaga</u>: skala zawsze liczba dodatnią $(k>0)$

Jeżeli: $k<1$– to figura podobna jest mniejsza od wyjściowej;

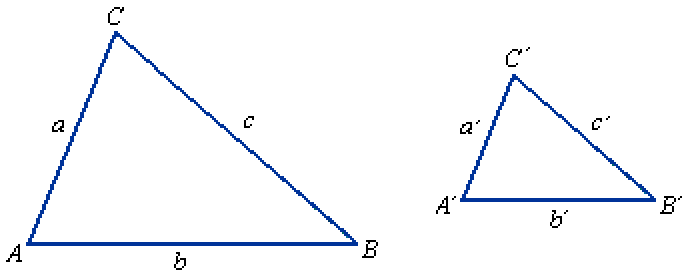
k > 1 – to figura podobna jest większa od wyjściowej.

Jeżeli figury F i F' są podobne w skali $k=1$ (takie same wymiary), to mówimy, że są to figury przystające i piszemy $F\equiv F'$.

Temat: PODOBIEŃSTWO TRÓJKĄTÓW

I cecha podobieństwa trójkątów (BBB)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



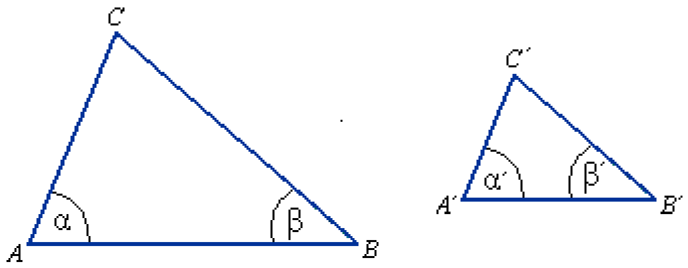
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k - skala podobieństwa

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

II cecha podobieństwa trójkątów (KKK)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



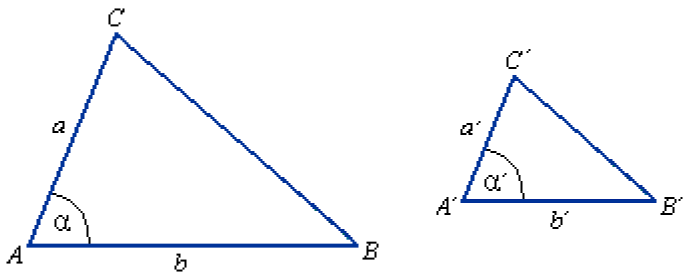
$\alpha = \alpha'$

$\beta = \beta'$

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

III cecha podobieństwa trójkątów

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.



$\alpha = \alpha'$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Cechy przystawania trójkątów:

-Jeżeli długości boków jednego trójkąta, są równe długościom boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające **(BBB)**

- Jeżeli długości dwóch boków jednego trójkąta są równe długościom dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między bokami obu trójkątów mają taką samą miarę, to trójkąty są przystające **(BKB)**

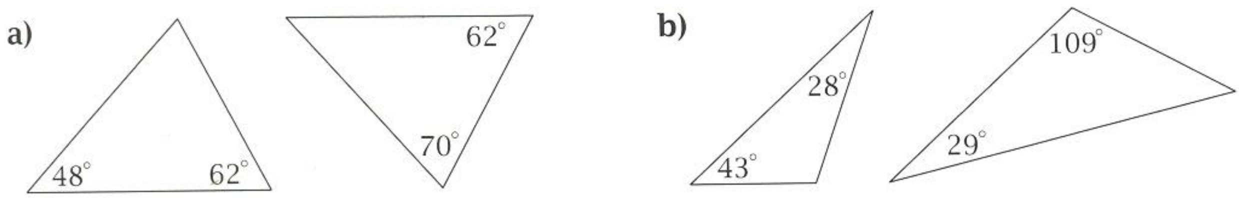
- Jeżeli długość boku i miary dwóch kątów, do niego przyległych jednego trójkąta, są odpowiednio równe długości bokui i miarom dwóch kątów do niego przyległych drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające **(KBK).**

Zadanie 1. Czy podobne są trójkąty o bokach długości:

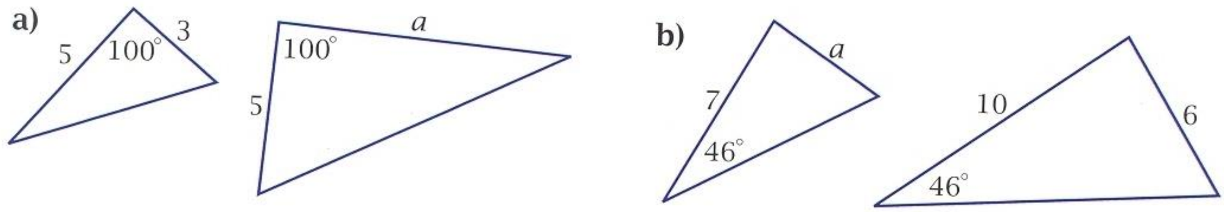
a) 20 cm, 16 cm, 12 cm oraz 32 cm, 40 cm, 24 cm,

b) 40 cm, 30 cm, 20 cm, oraz 16 cm, 10 cm, 12 cm?

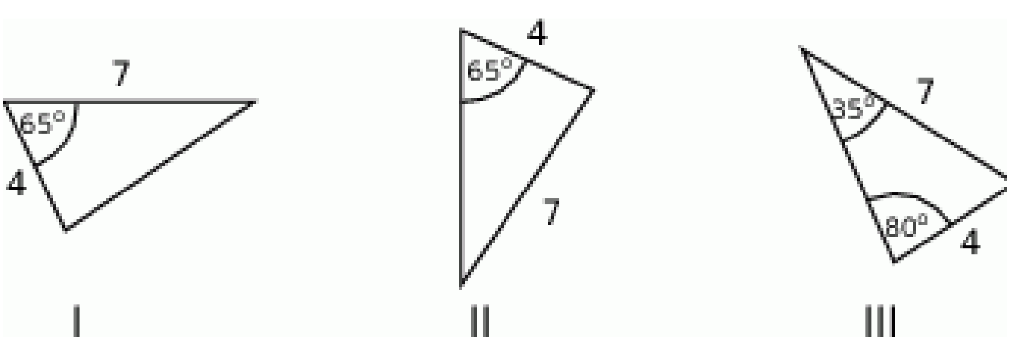
Zadanie 2. Oceń czy trójkąty o podanych kątach są podobne:



Zadanie 3. Oceń czy trójkąty podane na rysunku są podobne:



Zadanie 4. Wskaż, które trójkąty są przystające:



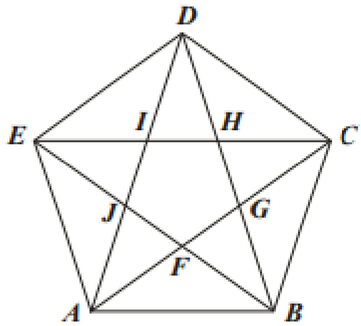
Zadanie 5. Pięciokąt ABCDE jest foremny. Wskaż trójkąt przystający do trójkąta ECD:

A. ΔABF

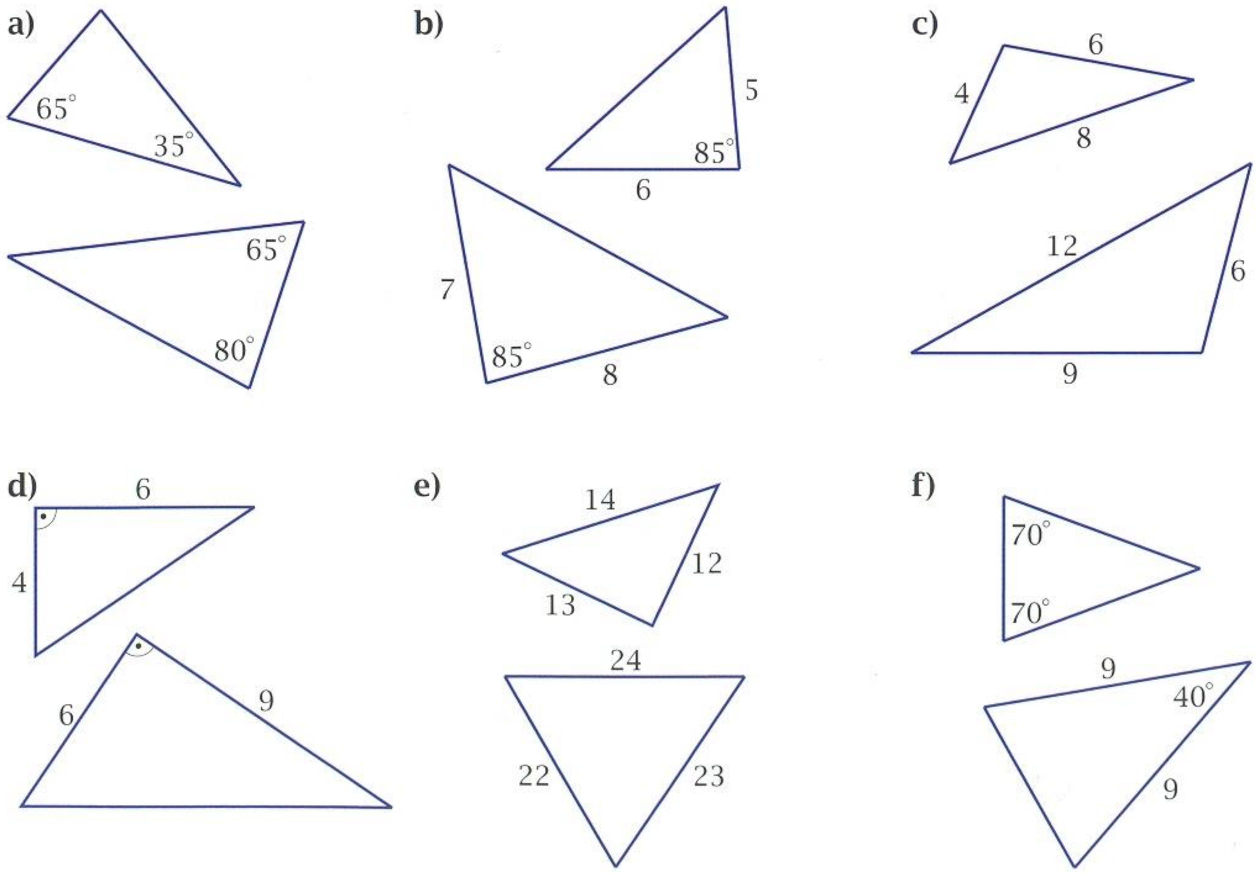
B. ΔCAB

C. ΔIHD

D. ΔABD

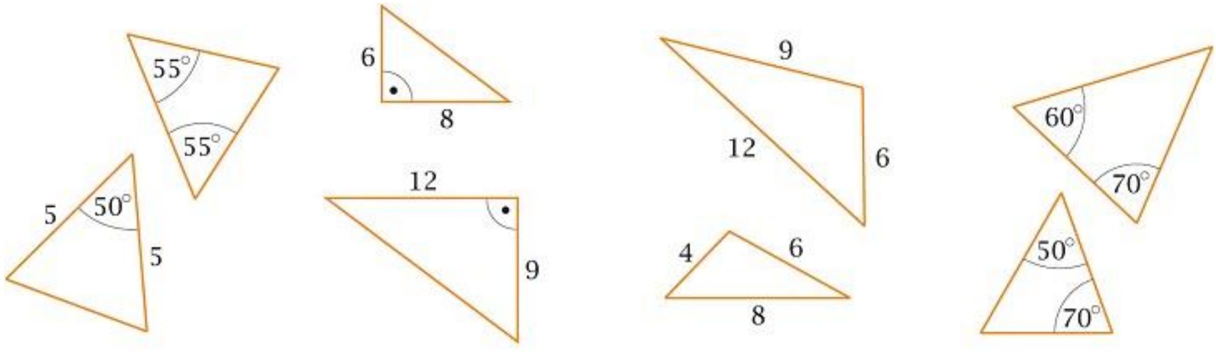


Zadanie 6. Sprawdź, czy podane trójkąty są podobne (wskaż cechę podobieństwa):

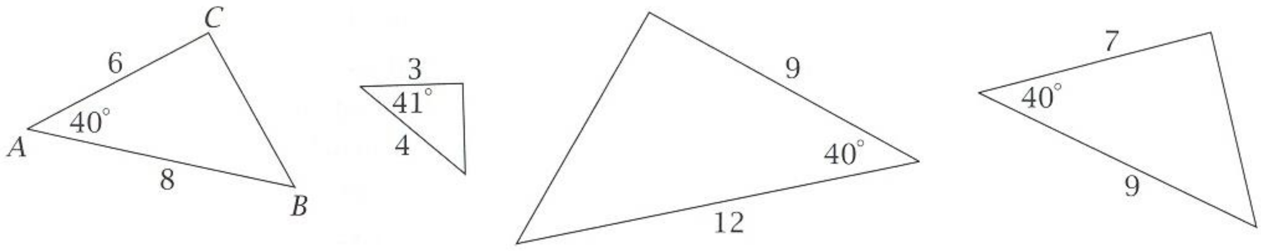


Zadanie 7. Sprawdź, czy podane pary przedstawiają trójkąty podobne:

a) **b)** **c)** **d)**



Zadanie 8. Który z podanych trójkątów jest podobny do trójkąta ABC ?



Zadanie 9. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne. Mając dane: $|AC| = 6$ cm, $|A'B'| = 4$ cm, $|B'C'| = 5$ cm, $|A'C'| = 2$ cm, oblicz długości pozostałych boków trójkąta ABC.

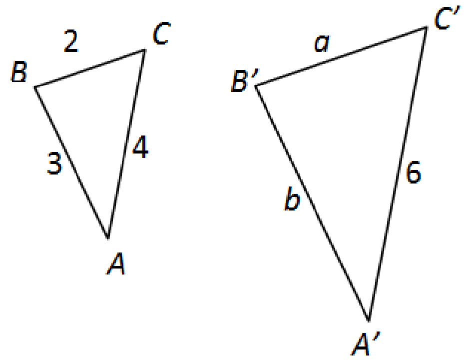
Zadanie 10. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne w skali $k = 2$, przy czym $|AB| = 14$ cm, $|BC| = 2$ dm, $|AC| = 17$ cm. Oblicz długości boków trójkąta $A'B'C'$.

Zadanie 11. Boki trójkąta ABC są równe 12cm, 8cm, 6cm. Średni bok podobnego trójkąta KLM jest równy 24cm. Jakiej długości są pozostałe boki trójkąta KLM?

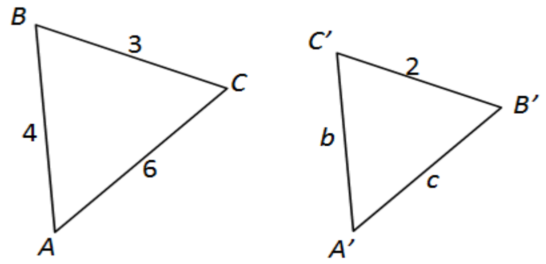
Zadanie 12. W pewnym trójkącie prostokątnym boki maja długości 5cm, 12cm i 13cm. W trójkącie podobnym do niego najkrótszy bok ma długość 2,5cm. Oblicz pole tego drugiego trójkąta.

Zadanie 13. Dwa trójkąty prostokątne są podobne. Przyprostokątne jednego z nich mają długości 5cm i 12 cm. Przeciwprostokątna drugiego ma długość 39cm. Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.

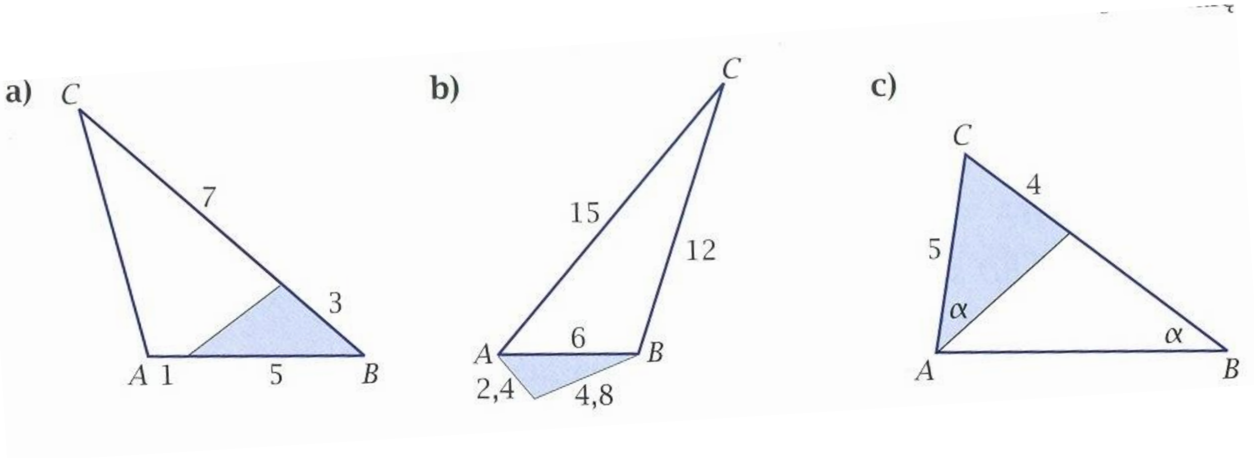
Zadanie 14. $\Delta\ ABC$ jest podobny do $\Delta\ A'B'C'$.
a)wyznacz skalę podobieństwa
b)oblicz długości boków a i b
Podaj skalę podobieństwa trójkąta $A'B'C'$ do trójkąta ABC.



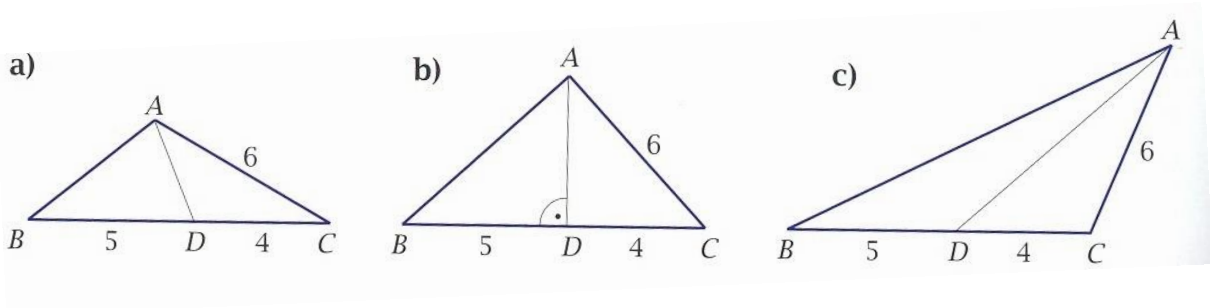
Zadanie 15. ΔABC jest podobny do $\Delta A'B'C'$. Wyznacz skalę podobieństwa oraz długość boków a i b.



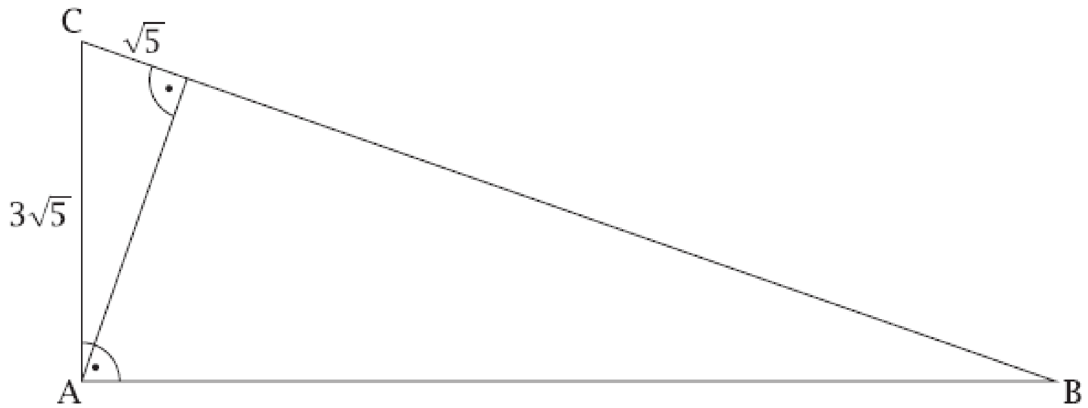
Zadanie 16. Uzasadnij, że zacieniowany trójkąt jest podobny do trójkąta ABC.



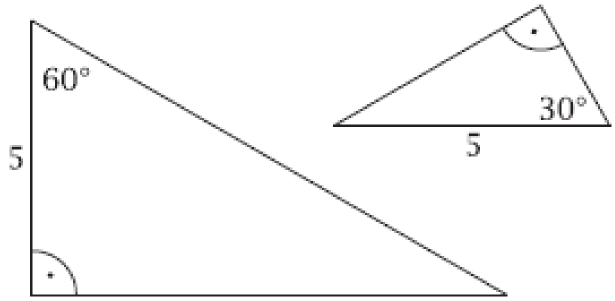
Zadanie 17. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DAC. Podaj skalę podobieństwa:



Zadanie18. Oblicz pole trójkąta ABC.



Zadanie 19. Czy z danych przedstawionych na rysunku obok wynika, że trójkąty są podobne? Jeśli tak, podaj skalę podobieństwa trójkąta większego do mniejszego.



Zadanie 20. Drabina o długości 2,5m po oparciu o ścianę domu sięga na wysokość 2m. Jak wysoko sięga drabina o długości 3,5m, jeśli jest ustawiona pod tym samym kątem?

Zadanie 21. Drzewo rzuca cień długości $36m$. Oblicz wysokość drzewa, wiedząc, w tym samym czasie i w tej samej okolicy masz o wysokości 15 m rzuca cień 12m.

Zadanie 22. Drzewo rzuca cień długości $48m$. Oblicz wysokość drzewa wiedząc, że pień drzewa, długości $4m$, rzuca cień długości $2{,}5m$.

Zadanie 23. Pionowo ustawiony drążek o wysokości 80cm rzuca cień o długości 1,2m. Oblicz długość cienia rzucanego w tym samym czasie przez dom o wysokości 24m.

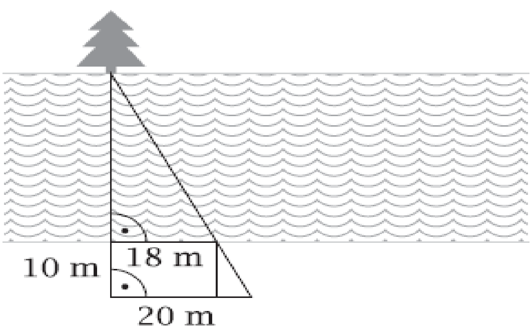
Zadanie 24. Chłopiec stojący 3 metry od latarni rzuca cień długości 1 m. Oblicz wysokość latarni, jeżeli chłopiec ma 170 cm wzrostu.

Zadanie 25.Drabina długości 3,6m oparta o budynek sięga na wysokość 2,7m.

a) Jak wysoko sięga drabina o długości 2,4m ustawiona pod tym samym kątem?
b) Jaką długość ma drabina, jeśli ustawiona pod tym samym kątem sięga na wysokość 3,3m?

Zadanie 26. W trapezie ABCD AB||CD |AB| = 8 cm oraz |CD| = 6 cm. Ramiona AD i BC mają długości odpowiednio 3 cm i 4 cm. Przedłużenia ramion przecinają się w punkcie E. Oblicz obwód trójkąta CED.

Zadanie 27. Korzystając z informacji na rysunku, oblicz szerokość rzeki.



Temat: WIELOKĄTY PODOBNE I ICH WŁASNOŚCI

Jeżeli dwa **wielokąty są podobne**, to miary ich odpowiednich kątów są równe, a długości odpowiednich boków są proporcjonalne

Własności figur podobnych:

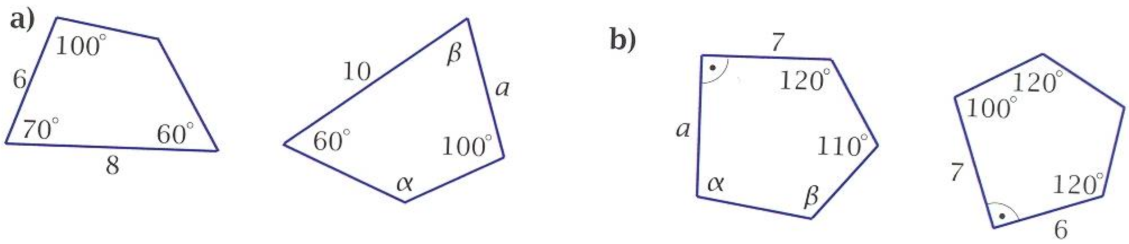
- **stosunek obwodów figur podobnych** jest równy skali podobieństwa $\left(\frac{L_1}{L_2} = k\right)$

- **stosunek pól figur podobnych** jest równy kwadratowi skali podobieństwa $\left(\frac{P_1}{P_2} = k^2\right)$

Zadanie 1. Czy prostokąty o wymiarach 5cm$\times$4,5cm oraz 3cm$\times$2,75cm są podobne? Jeśli tak, to podaj skalę podobieństwa.

Zadanie 2. W kwadracie skrócono długości boków o 20%. Podaj skalę podobieństwa większego kwadratu do mniejszego.

Zadanie 3. Przedstawione na rysunku wielokąty są podobne. Oblicz długość boku a oraz miary kątów α i β.



Zadanie 4. Dwa prostokąty są podobne w skali 3. Długości boków większego prostokąta to 15cm i 21cm. Oblicz długości boków i obwód drugiego prostokąta.

Zadanie 5. Dwa prostokąty są podobne w skali 5. Długości boków mniejszego prostokąta to 5cm i 7cm. Oblicz długości boków i obwód drugiego prostokąta.

Zadanie 6. Boki czworokąta ABCD mają długości: 7 cm, 15 cm, 13 cm, 18 cm. Czworokąt A'B'C'D' jest podobny do czworokąta ABCD, a suma długości jego dwóch krótszych boków jest równa 30 cm. Oblicz długości boków czworokąta A'B'C'D'.

Zadanie 7. Uzupełnij tabelę:

skala k	stosunek obwodów $\frac{L_1}{L_2}$	stosunek pól $\frac{P_1}{P_2}$
$\frac{1}{5}$		
	$\frac{3}{7}$	
		4
3		
	$2\frac{2}{3}$	
		0,25
1		
		2

Zadanie 8. Dwa wielokąty są podobne w skali k = $\frac{1}{2}$. Pole większego z nich jest równe 20 cm2. Oblicz pole drugiego wielokąta.

Zadanie 9. Dwa wielokąty są podobne w skali k = $\frac{1}{5}$. Pole mniejszego z nich jest równe $12cm^2$. Oblicz pole drugiego wielokąta.

Zadanie 10. Prostokąt ABCD, którego obwód wynosi 20 cm, jest podobny do prostokąta o bokach długości 2 cm i 5 cm. Oblicz pole prostokąta ABCD.

Zadanie 11. Prostokąt ABCD, którego obwód wynosi 10 cm, jest podobny do prostokąta o bokach długości 6 cm i 8 cm. Oblicz pole prostokąta ABCD.

Zadanie 12. Długości boków prostokąta ABCD są równe odpowiednio 6 cm i 8 cm. Pole prostokąta KMNO podobnego do prostokąta ABCD wynosi wynosi 108 cm2. Oblicz obwód prostokąta KMNO.

Zadanie 13. Dwa prostokąty są podobne w skali 5. Długości boków mniejszego prostokąta to 5cm i 7cm. Oblicz długości boków i obwód drugiego prostokąta.

Zadanie 14. Dwa wielokąty są podobne w skali k = $\frac{1}{2}$. Pole większego z nich jest równe 20 cm2. Oblicz pole drugiego wielokąta.

Zadanie 15. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEF w skali $\frac{3}{5}$.

a) oblicz obwód trójkąta DEF jeżeli obwód ABC wynosi 75 cm

b) oblicz pole trójkąta ABC jeżeli pole DEF wynosi 200 cm^2.

Zadanie 16. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 12 i 16 jest podobny do trójkąta o obwodzie równym 6. Oblicz długości przeciwprostokątnych obu trójkątów.

Zadanie 17. Trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych 5 cm i 12 cm jest podobny do trójkąta A'B'C", którego obwód wynosi 60 cm. Oblicz długości boków trójkąta A'B'C'.

Zadanie 18. Prostokąt P_1 ma boki długości 12 cm i 16 cm. Prostokąt P_2 ma przekątną długości 25 cm i jeden bok długości 20 cm. Uzasadnij, że te prostokąty są podobne i podaj skalę ich podobieństwa.

Zadanie 19. Trójkąt A'B'C' jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{3}{10}$. Dwa z boków trójkąta ABC mają długości 16 i 24. Oblicz długości boków trójkąta A'B'C', wiedząc, że jego obwód jest równy 15.

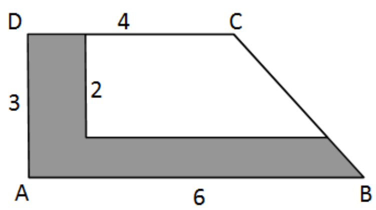
Zadanie 20. Skala podobieństwa trójkątów podobnych $k = 0{,}6$, a suma ich obwodów jest równa 240cm. Oblicz obwody trójkątów.

Zadanie 21. Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 260 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{5}{8}$. Oblicz obwód każdej z tych figur.

Zadanie 22. Długości odpowiednich boków dwóch wielokątów podobnych wynoszą 4 cm i 5 cm. Różnica ich obwodów wynosi 15cm. Oblicz obwody tych trójkątów.

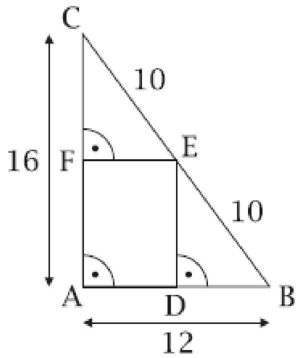
Zadanie 23. Suma pól dwóch figur podobnych jest równa 340 dm^2, a ich skala podobieństwa $k = 4$. Oblicz pole każdej z tych figur.

Zadanie 24. Wewnątrz trapezu prostokątnego ABCD zbudowano trapez do niego podobny (zob. rysunek). Oblicz pole zacieniowanej figury.



Zadanie 25. Boisko w kształcie prostokąta ma powierzchnię 1,5 ha. Oblicz pole planu tego boiska wykonanego w skali 1:100.

Zadanie 26. Korzystając z informacji podanych na rysunku, uzasadnij, że czworokąt ADEF nie jest kwadratem.

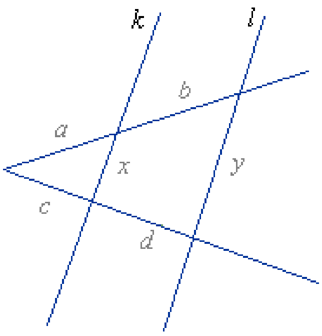


Temat: TWIERDZENIE TALESA

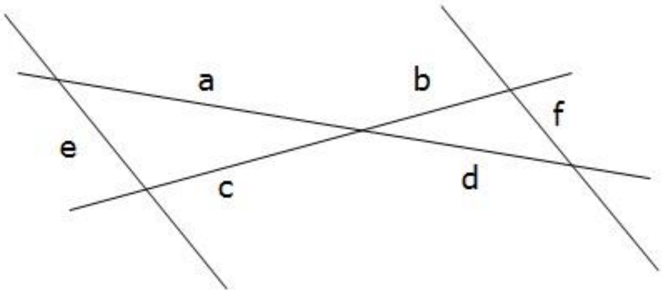
TWIERDZENIE TALESA: Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) przecięte są dwiema prostymi równoległymi, to stosunek długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym z ramion (lub jego przedłużeniu) jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta (lub jego przedłużeniu).

Zadanie 1. Korzystając z Twierdzenia Talesa zapisz 4 proporcje do rysunku:

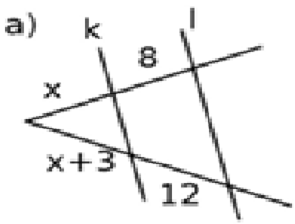
a)

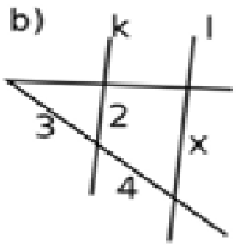


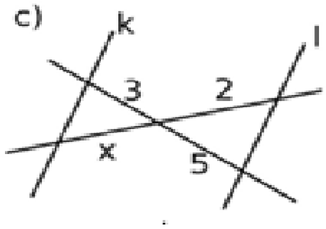
b)

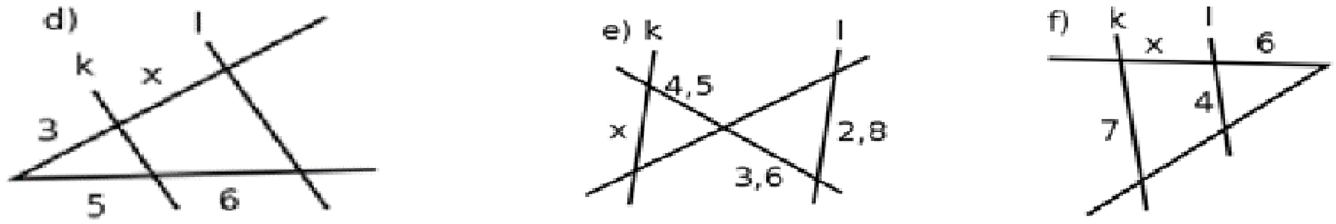


Zadanie 2 .Proste k i l są równoległe. Oblicz długość odcinka x:

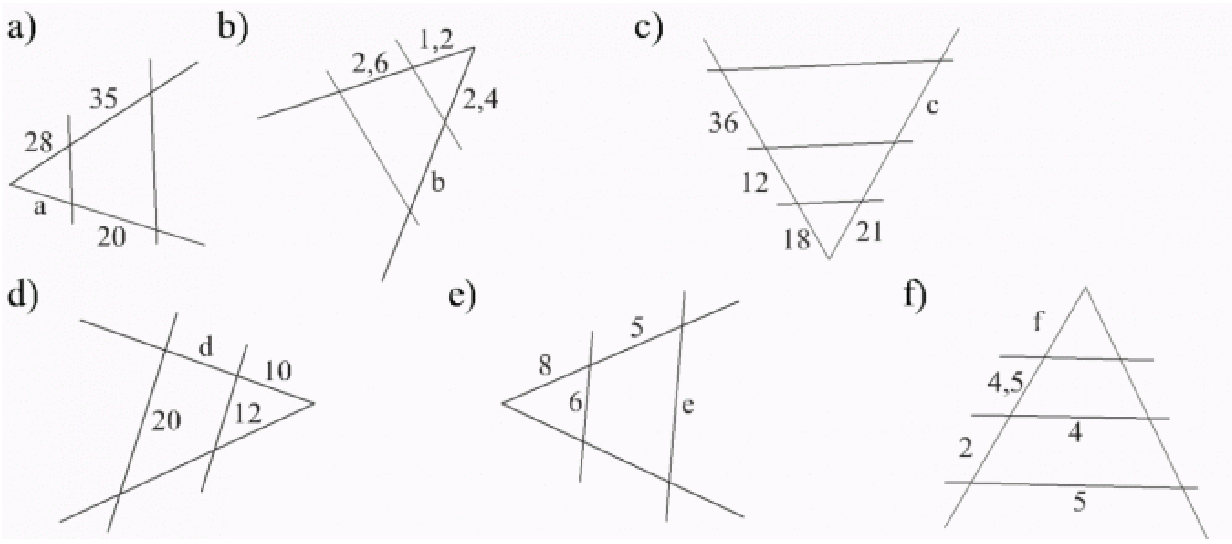




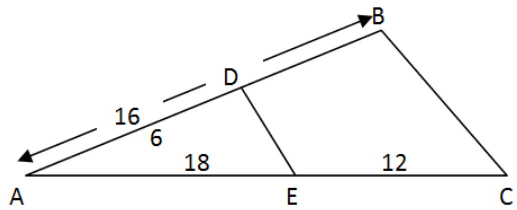




Zadanie 3. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami:



Zadanie 4. Stosując twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Talesa sprawdź, czy odcinki DE i BC są równoległe.



Zadanie 5. Dłuższe ramię szlabanu kolejowego ma długość 4m, a krótsze 0,8m. O ile metrów wzniesie się dłuższe ramię, gdy krótsze obniży się o 0,5m?

Zadanie 6. Oblicz, o ile należy przedłużyć ramię AD trapezu równoramiennego ABCD, w którym |AB|=12, |AD|=8, |CD|=7, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC.

Zadanie 7. W trójkącie ABC bok BC ma długość 16cm, a wysokość CD dzieli bok AB na odcinki AD i DB takie, że |AD|=4cm, |DB|=10cm. Oblicz długości odcinków, na które symetralna boku AB dzieli bok BC.

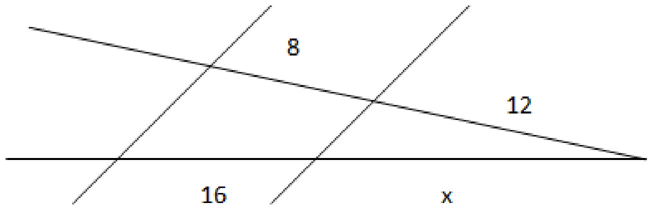
Zadanie 8. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| = 12, |BC| = 8, |AC| = 10$. Poprowadzono prostą k równoległą do boku AC, która podzieliła trójkąt na dwie figury – trójkąt i trapez. Obwody tych figur są równe. Oblicz długości odcinków, na które prosta k podzieliła boki AB i BC.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – PODOBIEŃSTWO FIGUR I TWIERDZENIE TALESA

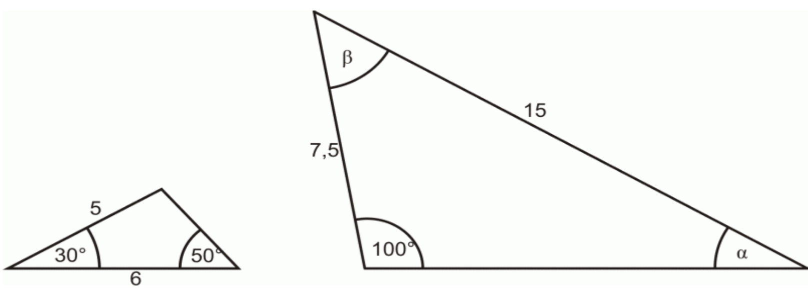
Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ rozpoznać trójkąty podobne i przystające (na podstawie trzech cech)
- ✓ rozpoznać wielokąty podobne
- ✓ obliczyć skalę podobieństwa dwóch figur podobnych
- ✓ na podstawie skali podobieństwa dwóch figur i wymiarów jednej z nich obliczyć wymiary drugiej figury
- ✓ zastosować wzory dotyczące stosunku obwodów i pól figur podobnych
- ✓ zapisać odpowiednią proporcję z zastosowaniem Twierdzenie Talesa i obliczyć niewiadomą
- ✓ rozwiązywać zadania tekstowe z zastosowaniem własności figur podobnych,

Zadanie 1. Na rysunku proste równoległe przecinają ramiona kąta. Wyznacz x.



Zadanie 2. Sprawdź, czy podane trójkąty są podobne

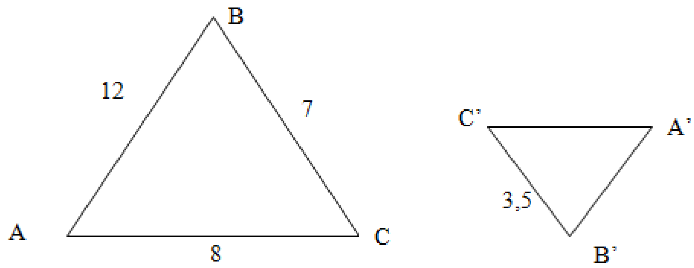


Zadanie 3. Trójkąty ABC i A'B'C' są podobne.

a) podaj skalę podobieństwa.

b) wyznacz długości pozostałych boków.

Zadanie 4. Prostokąt ABCD o bokach 4,8 cm i 3,6 cm jest podobny do prostokąta A\`B\`C\`D\`, którego obwód wynosi 50,4 cm. Oblicz długości boków prostokąta A\`B\`C\`D\`.



Zadanie 5. Pole pewnego trójkąta wynosi 12 cm^2. Oblicz pole trójkąta podobnego do niego w skali k = 3.

Zadanie 6. Długości boków prostokąta są równe 3 cm i 5 cm. Oblicz pole prostokąta podobnego do niego o obwodzie 80 cm.

Zadanie 7. Oblicz wysokość drzewa, jeżeli jego cień wynosi 10,8 m, a cień jego korony wynosi 7,8 m. Najniższe gałęzie zaczynają się na wysokości 1,5 m od ziemi.

Zadanie 8. Trójkąty ABC i KLM są podobne oraz $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AC| = 15$ cm. Znajdź długości boków trójkąta KLM wiedząc, że najdłuższy bok tego trójkąta ma 12 cm. Wyznacz skalę podobieństwa trójkątów.

Zadanie 9. Wykaż, że trójkątem podobnym, do trójkąta równoramiennego, którego kąt przy podstawie ma miarę 55° jest trójkąt równoramienny, którego kąt między ramionami ma miarę 70°.

Zadanie10. Boki czworokąta ABCD mają długości: 8 cm, 9 cm, 14 cm, 12 cm. Czworokąt A'B'C'D' jest podobny do czworokąta ABCD, a suma długości jego najkrótszego i najdłuższego boku jest równa 33 cm. Oblicz długości boków czworokąta A'B'C'D'.

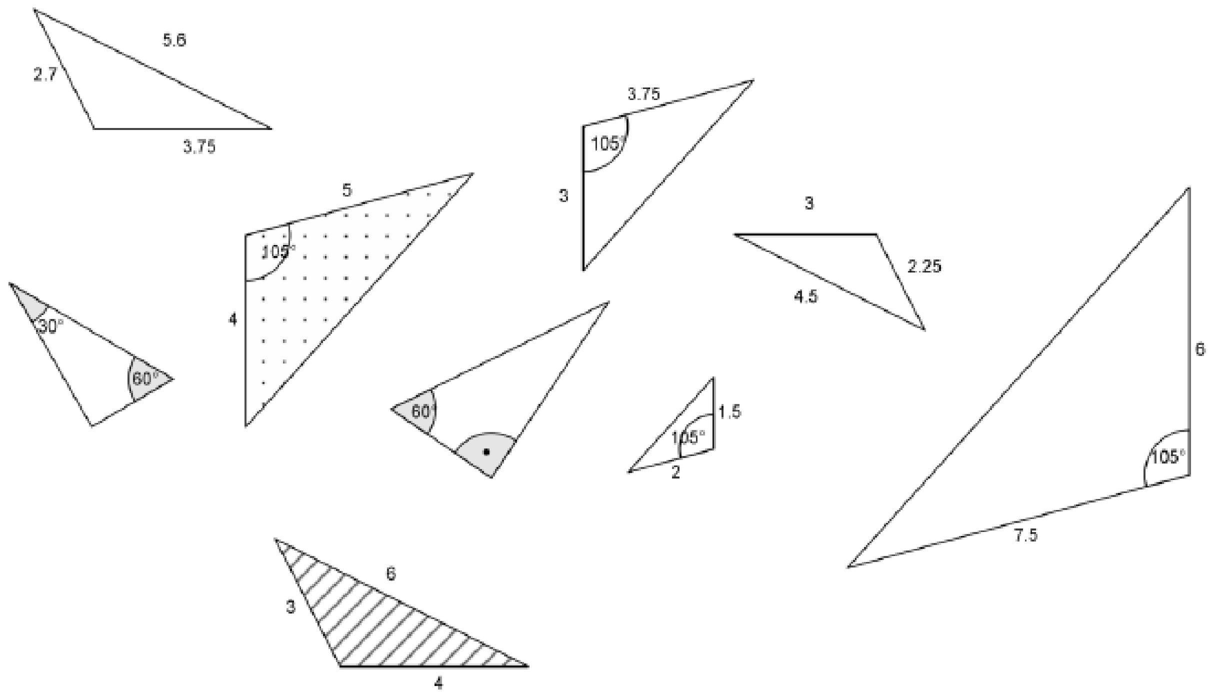
Zadanie 11. W trapezie ABCD $AB \| CD$ i $|AB| = 12$ cm oraz $|CD| = 9$ cm. Ramiona AD i BC mają długości odpowiednio 4 cm i 3 cm. Przedłużenia ramion przecinają się w punkcie E. Oblicz obwód trójkąta CED.

Zadanie 12. Jakie długości mają przekątne rombu o polu 21 cm^2, który jest podobny do rombu o przekątnych 12 cm i 14 cm?

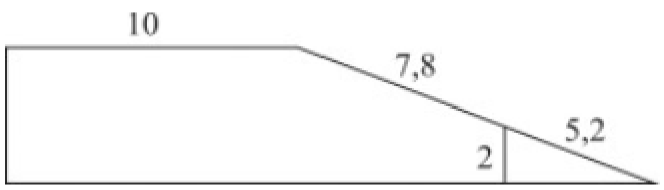
Zadanie 13. Trójkąt prostokątny ABC ma przyprostokątne o długościach 3 cm i 5 cm. Krótsza przyprostokątna trójkąta DEF wynosi 6 cm. Podaj długość jego drugiej przyprostokątnej, wiedząc, że trójkąty DEF i ABC są podobne.

Zadanie 14. Trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta A'B'C', o obwodzie 60 cm. Oblicz długości boków trójkąta A'B'C'.

Zadanie 15. Znajdź trójkąty podobne i zamaluj je w taki sam sposób.



Zadanie 16. Oblicz pole trapezu prostokątnego o wymiarach podanych na rysunku.



ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1.

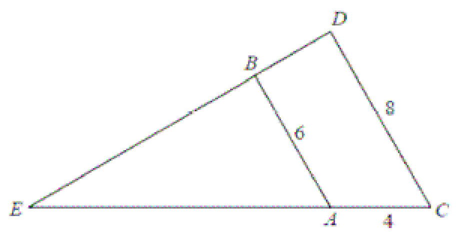
Oblicz długość odcinka AE wiedząc, że $AB \parallel CD$ i $|AB| = 6$, $|AC| = 4$, $|CD| = 8$.

A. $|AE| = 2$

B. $|AE| = 4$

C. $|AE| = 6$

D. $|AE| = 12$



Zadanie 2.

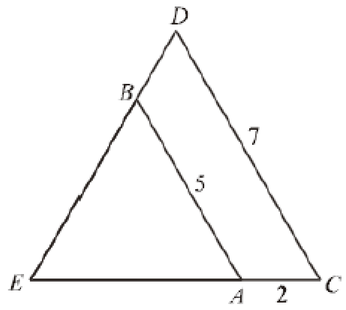
Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa:

A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5



Zadanie 3.

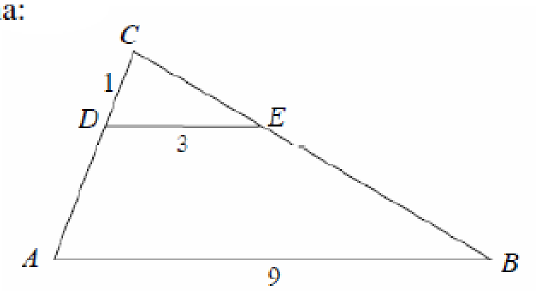
Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków CD, DE i AB są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka AD jest równa:

A. 2

B. 3

C. 5

D. 6



Zadanie 4.

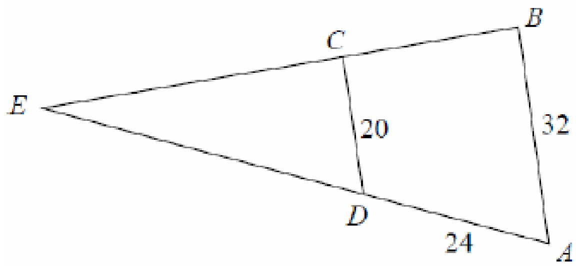
Odcinki AB i CD są równoległe. Długości odcinków AB, CD i AD są podane na rysunku. Długość odcinka DE jest równa:

A. 44

B. 40

C. 36

D. 15



Zadanie 5.

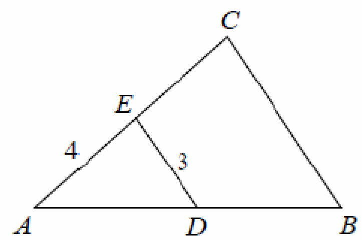
Odcinki BC i DE są równoległe i $|AE| = 4$, $|DE| = 3$ (zobacz rysunek). Punkt D jest środkiem odcinka AB. Długość odcinka BC jest równa:

A. 4

B. 6

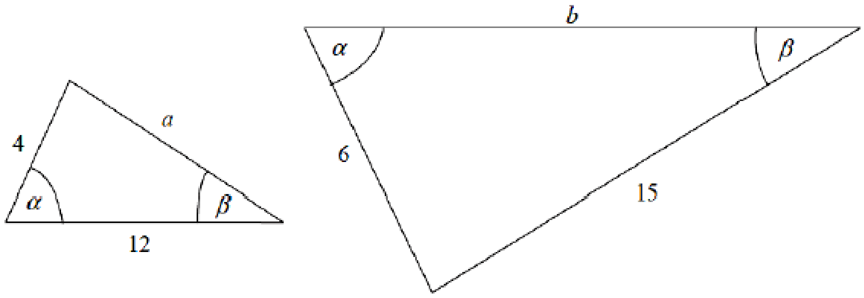
C. 8

D. 16



Zadanie 6.

Przedstawione na rysunku trójkąty są podobne.



Wówczas:

A. $a=13,\ b=17$ **B.** $a=10,\ b=18$ **C.** $a=9,\ b=19$ **D.** $a=11,\ b=13$

Zadanie 7.

Obwody dwóch trójkątów podobnych, których pola pozostają w stosunku 1 : 4, mogą być równe:

A. 9 i 36 **B.** 18 i 36 **C.** 9 i 144 **D.** 18 i 144

Zadanie 8.

Jeżeli trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, a ich pola są, odpowiednio, równe 25 cm^2 i 50 cm^2, to skala podobieństwa $\frac{A'B'}{AB}$ jest równa?

A. 2 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. PROSTA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Temat: RÓWNANIE PROSTEJ W POSTACI OGÓLNEJ I KIERUNKOWEJ

równanie ogólne prostej: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0 \quad i \quad A, B, C \in R$

równanie kierunkowe prostej $y = ax + b$, gdzie a– współczynnik kierunkowy prostej

Zadanie 1. Zapisz równanie prostej w postaci ogólnej:

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -\frac{2}{3}x - 1$ c) $y = \frac{1}{4}x + 5$

d) $y = 8$ e) $3x = 5 - 2y$ f) $6 = -x + 7y$.

Zadanie 2. Zapisz wzór prostej w postaci ogólnej o współczynnikach całkowitych:

a) $y = \frac{1}{5}x - 2$ b) $y = -0{,}5x + 4$.

Zadanie 3. Zapisz równanie prostej w postaci kierunkowej (o ile istnieje):

a) $4x + 2y - 6 = 0$ b) $-2x - 3y + 3 = 0$ c) $2y - 4 = 0$

d) $x - 4y + 2 = 0$ e) $-6x + 5 = 0$ f) $-3x + 4y + 7 = 0$.

Zadanie 4 Zapisz wzór prostej $10x + 5y = 0$ w postaci kierunkowej. Odczytaj współczynnik kierunkowy prostej.

Zadanie 5. Zapisz wzór prostej $-2x + 16y + 10 = 0$ w postaci kierunkowej. Odczytaj współczynnik kierunkowy prostej.

Zadanie 6. Dane są punkty A = (1, 2), B = (3, -2), C = (-2, 4), D = (-5, -3). Które z nich leżą na prostej $y = \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}$?

Wskazówka: *Punkt leży na prostej, jeżeli po wstawieniu za x i y w równaniu prostej współrzędnych punktu otrzymasz prawdę (np. 0=0, -3=-3)*

Zadanie 7. Narysuj prostą określoną równaniem:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = \frac{1}{2}x + 3$ c) $4x - 2y + 6 = 0$

d) $3x + 6y - 2 = 0$ e) $2y - 6 = 0$ f) $x - 2 = 0$

f) $8x = -2$ g) $-3x - 6y + 12 = 0$ h) $-x + 3y - 9 = 0$.

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie:

Proste k i l o równaniach kierunkowych $k: y = a_1 x + b_1 \quad i \quad l: y = a_2 x + b_2$ są:

- **równoległe** $(k \parallel l)$, jeżeli $a_1 = a_{2.}$

- **przecinające się** $(k \text{ X } l)$ jeżeli $a_1 = a_{2.}$

Szczególnym przypadkiem prostych przecinających się są proste:

- **prostopadłe**, jeżeli $a_1 \cdot a_2 = -1$

Zadanie 8. Określ wzajemne położenie prostych k i l.

a) $k: y = 2x - 1 \quad i \quad l: y = 3x + 2$

b) $k: y = x + 1 \quad i \quad l: y = x$

c) $k: y = 3x - 15 \quad i \quad l: y = -3x + 100$

d) $k: y = -0{,}5x - 0{,}7 \quad i \quad l: y = 2x + 9$

e) $k: y = 4x + 0{,}1 \ i \quad l: 8x - 2y - 6 = 0$

f) $k: 4x - y + 1 = 0 \quad i \quad l: -2x + 8y + 2 = 0$

g) $k: 3x - 5y + 1 = 0 \quad i \quad 5x + 3y - 6 = 0$

h) $k: x - 3y = 0 \quad i \quad l: y + 6x = 7$

i) $k: y = 4 \quad i \quad l: y = -8x - 1$

j) $k: y - 2 = 0 \quad i \quad l: 3y + 8 = 0$

k) $k: y = 3 \quad i \quad l: -2x - 3 = 0$

l) $k: x = -5 \quad i \quad l: x = \frac{1}{5}$.

Zadanie 9. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach podanych poniżej. Sprawdź, czy trójkąt jest prostokątny:

a) $y = -5x + 4, \ y = 8x - 1, \ y = -0{,}2x$

b) $y = \frac{1}{3}x, \ 3x + y - 7 = 0, \ x + y - 1 = 0$

c) $x + y - 2 = 0, \ 3x - 5y - 15 = 0, \ x - y + 2 = 0$

d) $x - 1 = 0, \ , x - 3y - 4 = 0, \ 5x - 3y + 4 = 0$.

Temat: WYZNACZANIE RÓWNANIA PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DWA PUNKTY

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(x_A,y_A),\ B=(x_B,y_B)$

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

Zadanie 1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B, jeśli:

a) A = (2, 1) i B = (5, 4)

b)A = (-1, -3) i B = (2, 3)

c) A = (-2, 2) i B = (4, -1)

d) A = (3, -2) i B = (-5, 0)

e) A = (4, -3) i B = (-2, -1)

f) A = (1, -2) i B = (1, 0)

Z**adanie 2**. Sprawdź, czy punkty A, B i C są współliniowe, gdy:

a) A = (-2, 1), B = (2,5), C = (4,8)

b) A = (-1, 7), B = (3, -1), C = (-2, 9)

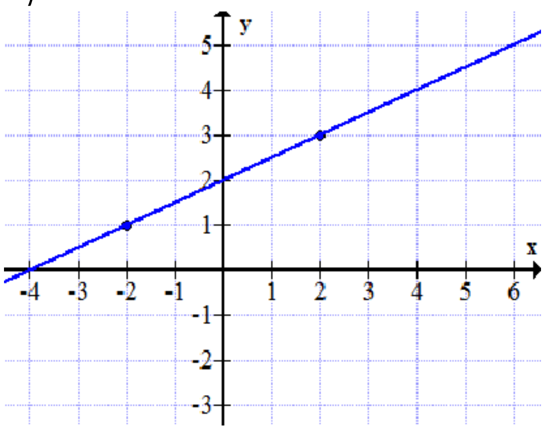
c) A(0,-1), B(-6,-2), C(-12,-3)

d) A(2,-6), B(-2,2), C(-5,7)

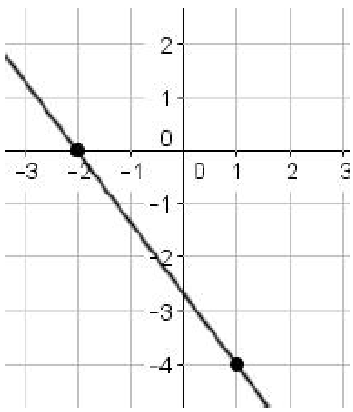
<u>Wskazówka:</u> Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty, a następnie sprawdź, czy trzeci punkt spełnia to równanie.

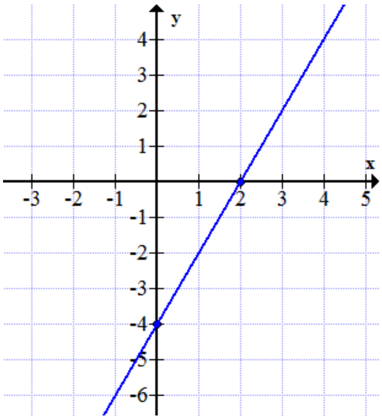
Zadanie 3. Napisz równania prostych przedstawionych na wykresach:

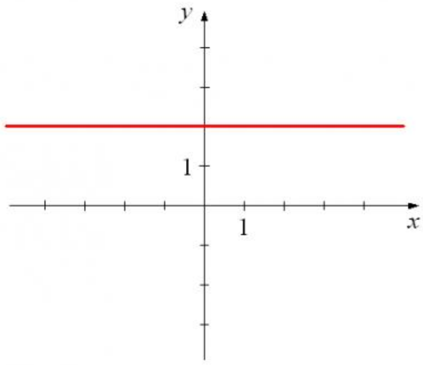
a)



b)



c) 

d) 

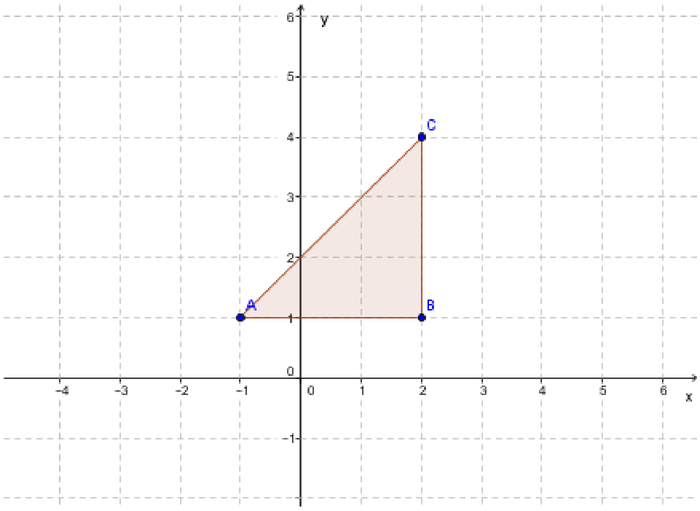
Zadanie 4. Napisz równania prostych zawierających boki trójkąta ABC, gdy:

a) A = (0,0), B = (5,0), C = (3,4)

b) A = (1,0), B = (4,4), C = (4, -4).

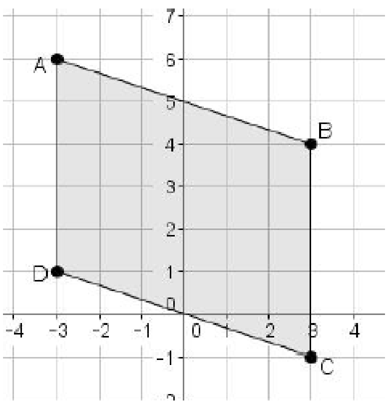
Zadanie 5. Sprawdź za pomocą odpowiednich rachunków, czy trójkąt ABC, jest prostokątny, jeżeli A=(1,5),B=(4,2),C=(7,5).

Zadanie 6. Zapisz równania prostych, w których zawierają się boki trójkąta ABC przedstawionego na wykresie.

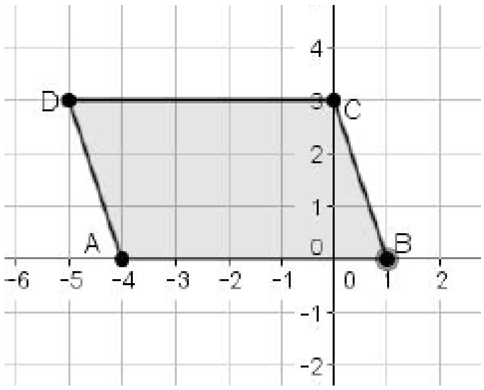


Zadanie 7. Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki równoległoboków przedstawionych na rysunkach.

a)



b)



Temat: INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADÓW RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Zadanie 1. Podaj interpretację geometryczną układu równań:

a) $\begin{cases} -3x + y = -5 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ -6x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x - y = 1 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 6y = 18 \\ y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2x + 2y = 2 \\ y - x = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ 6x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

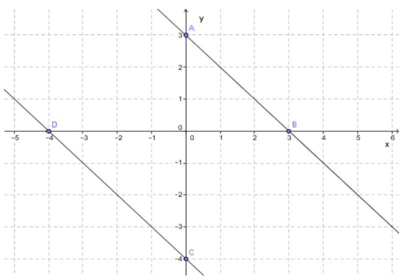
Zadanie 2. Każdemu z układów równań przyporządkuj odpowiadającą mu interpretację geometryczną przedstawioną na rysunku:

1) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

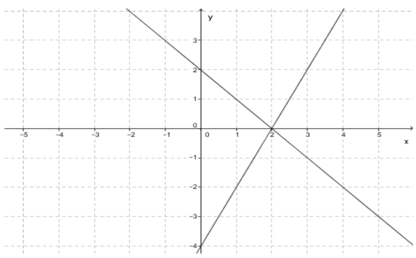
2) $\begin{cases} 6x - y = 3 \\ -12x + 2y = -6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = -8 \end{cases}$

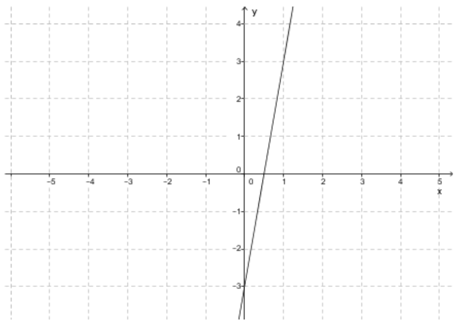
A.



B.



C.



Temat: NIERÓWNOŚCI STOPNIA PIERWSZEGO Z DWIEMA NIEWIADOMYMI I ICH UKŁADY

Zadanie 1. Sprawdź, czy para liczb (2, -3) spełnia nierówność 4x – y < 5.

Zadanie 2. Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających podany warunek:

a) $y > x - 1$

b) $y < -2x + 2$

c) $x + y - 4 \geq 0$

d) $2x - y \geq 3$

e) $y > 5$

f) $x \leq -1$

g) $y - 0{,}5 < 0$

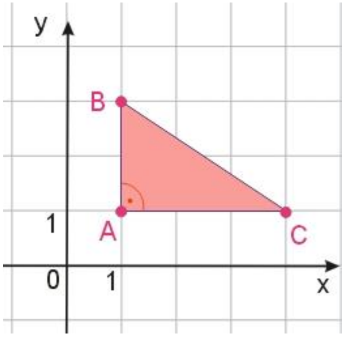
h) $-2x + 6 \leq 10.$

I) $-4x - 2y < -10$

Zadanie 2. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności:

a) $\begin{cases} y \le 2x - 1 \\ y \le 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \le \frac{1}{2}x + 2 \\ x \ge -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y < x \\ y \ge \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$.

Zadanie 3. Zapisz układ nierówności opisujący zbiór punktów zacieniowany na rysunku.



Zadanie 4. Zapisz układ nierówności opisujący zbiór punktów należących do wnętrza trójkąta PQR, gdy P = (0, 0), Q = (3, -3), R = (3, 6).

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – PROSTA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ przekształcić postać kierunkową prostej na postać ogólną i odwrotnie (jeżeli istnieje)
- ✓ sprawdzić, czy punkt należy do prostej
- ✓ narysować prostą w układzie współrzędnych
- ✓ określić wzajemne położenie prostych
- ✓ napisać równanie prostej mając podane dwa punkty przez które przechodzi lub jej wykres
- ✓ zilustrować w układzie współrzędnych układ równań liniowych

Zadanie 1. Dana jest prosta o równaniu y= -3x + 2 oraz punkty F(-1,5) i G(2,8). Do danej prostej należą punkty

A) F i G B) F C) G D) żaden z nich

Zadanie 2. Prostą równoległą do prostej o równaniu y=2x+1 jest prosta o równaniu:

A) y=-2x -1 B) y = -2x+1 C) y - 2 +4 = 0 D) $y + \frac{1}{2}x = 2$

Zadanie 3. Prosta o równaniu 2x + y – 3 =0 jest

A) równoległa do prostej y = 2x + 1 B) prostopadła do prostej y = 0,5x + 5

C) prostopadła do prostej 2x + 4y + 1 =0 D) równoległa do prostej y = 2x – 1

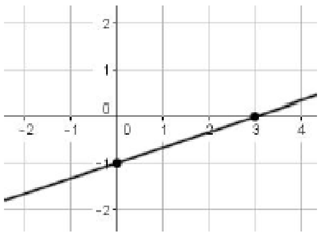
Zadanie 4. Zapisz wzór prostej y = 2x - 4. w postaci ogólnej.

Zadanie 5. Równanie prostej 12x + 4y - 8 = 0 zapisz w postaci kierunkowej.

Zadanie 6. Napisz w postaci ogólnej równanie prostej o współczynniku kierunkowym $a = -\frac{3}{2}$, przechodzącej przez punkt P(1; 3).

Zadanie 7. Zapisz w postaci ogólnej i kierunkowej wzór prostej przechodzącej przez punkty A(2,5) i B(-2,3).

Zadanie 8. Napisz równanie kierunkowe prostej przedstawionej na rysunku:

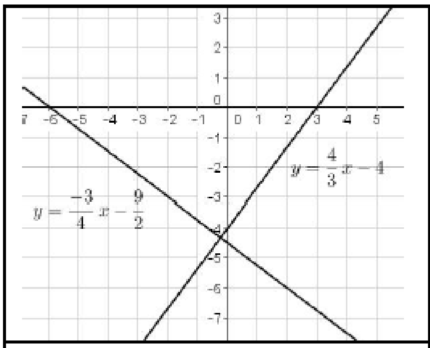


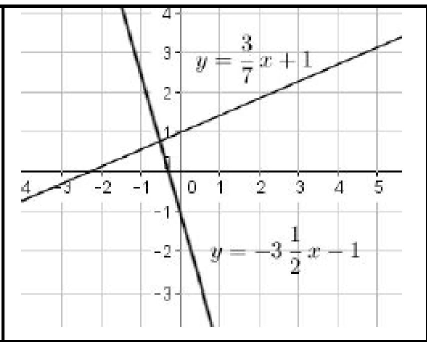
Zadanie 9. Dane są proste o równaniach:

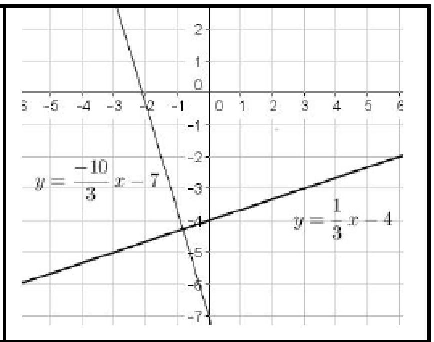
$k: y = -3x + 1,\ \ l: y = x + \frac{1}{2},\ \ m: -2y - 6x + 7 = 0,\ \ y + x = 3$

a) wskaż proste równoległe b) wskaż proste prostopadłe.

Zadanie 10. Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach są prostopadłe.







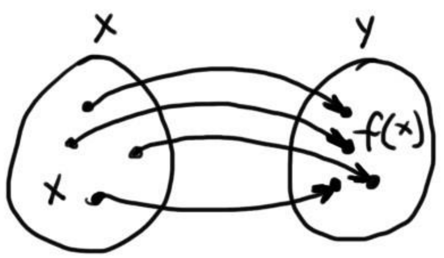
Tak/Nie ponieważ	Tak/Nie ponieważ	Tak/Nie ponieważ

Zadanie 11. Naszkicuj prostą o równaniu 2x − y+2=0 . Wyznacz współrzędne punktów, w których proste przecinają osie układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta ograniczonego prostą i osiami układu współrzędnych.

10. FUNKCJA I JEJ WŁASNOŚCI

Temat: POJĘCIE FUNKCJI

Funkcją f odwzorowująca zbiór X w zbiór Y ($f : X \to Y$) nazywamy przyporządkowanie, według którego każdemu elementowi x ze zbioru X odpowiada dokładnie jeden element y ze zbioru Y.



x – argument funkcji f ,

$y = f(x)$ – wartość funkcji f dla argumentu x x.

Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji f** i oznaczamy symbolem X lub D_f.

Zbiór nazywamy **zbiorem wartość funkcji f** i oznaczamy Y_f.

Sposoby określania funkcji:

- opis słowny - tabelka - wzór - graf - wykres.

Zadanie 1. Określ czy podane odwzorowanie jest funkcją.

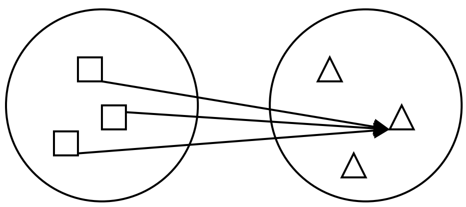
a)

x	1	2	3	4	5
y	3	-1	-1	2	-1

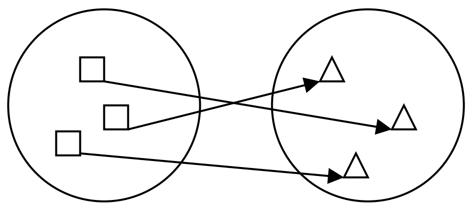
b)

x	-1	2	0	-1	-2
y	1	0	2	4	8

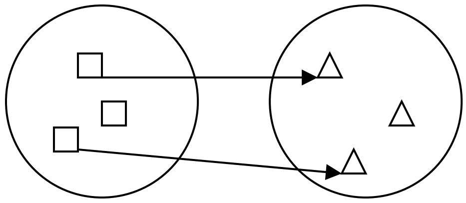
c)



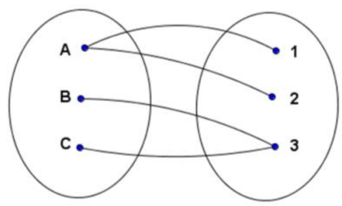
d)



e)

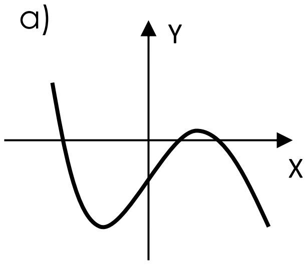


f)

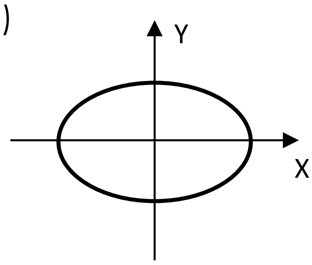


Zadanie 2. Określ czy w układzie współrzędnych przedstawiono wykres funkcji.

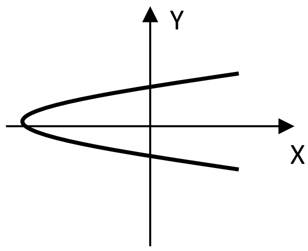
a)



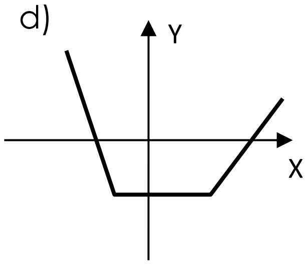
b)



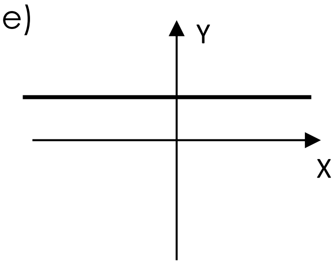
c)



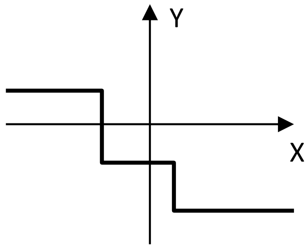
d)



e)

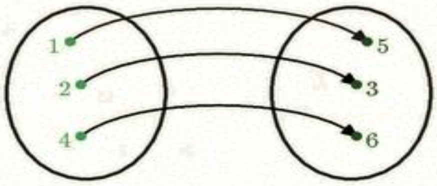


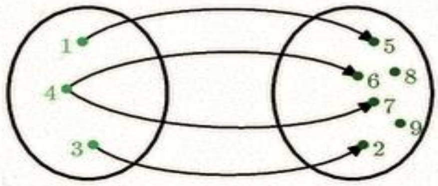
f)

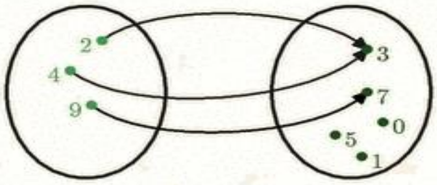


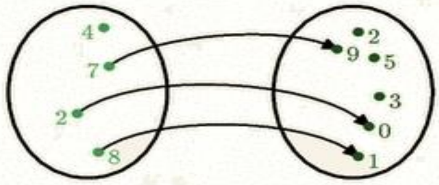
Zadanie 3

≫ Czy następujące określone grafem przyporządkowania są funkcjami?









≫ Czy następujące określone tabelką przyporządkowania są funkcjami?

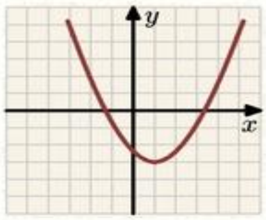
x	1	3	7	2	8
y	4	8	9	0	1

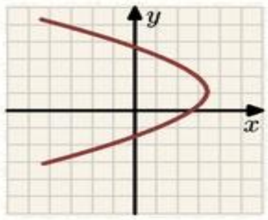
x	2	3	5	8	9
y	1	4	1	1	10

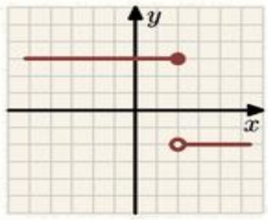
x	4	5	4	7	8
y	2	3	5	0	1

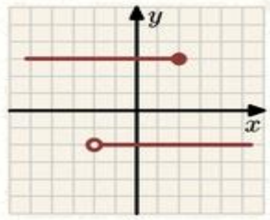
x	1	1	1	3	2
y	0	2	8	9	12

≫ Czy następujące wykresy są wykresami funkcji?









Zadanie 4. Które z przyporządkowań jest funkcją?

a) każdej rzece przyporządkowane jest państwo/-a przez które płynie

b) każdemu państwu przyporządkowana jest jego stolica

c) każdemu człowiekowi przyporządkowana jest jego babcia

e) każdej liczbie przyporządkowany jest jej kwadrat

f) każdej liczbie przyporządkowana jest wartość 5.

Zdanie 5. Dana jest funkcja $f:\{1,2,3,4\}\to R$, określona wzorem $f(x)=x+2$. Podaj określenie tej funkcji za pomocą:

a) opisu słownego b) tabeli

c) grafu d) wykresu.

Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

Zadanie 6. Funkcję f określono następująco: Każdej liczbie ze zbioru $X=\{-2,-1,0,1,2\}$ przyporządkowujemy liczbę będącą jej sześcianem. Funkcję przedstaw za pomocą:

b) tabeli c) wzoru d) wykresu .

Zadanie 7.Każdej liczbie całkowitej ze zbioru (-4, 4) przyporządkowujemy jej wartość bezwzględną. Sporządź graf tej funkcji, tabelę i zapisz ją za pomocą wzoru. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

Zadanie 8. Funkcję f określono następująco: Każdej liczbie całkowitej z przedziału $\langle -2,2\rangle$ przyporządkowujemy jej dwukrotność pomniejszoną o 1".

a) napisz wzór funkcji, b) wyznacz zbiór wartości, c) narysuj wykres.

Zadanie 9. Funkcja f każdej liczbie naturalnej nie większej niż 100 przyporządkowuje jej cyfrę jedności

a) podaj zbiór wartości funkcji

b) podaj dziedzinę funkcji

c) wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 7.

Zadanie 10. Oblicz wartość funkcji danej wzorem dla podanego argumentu

a) $f(x)=3x^2+2$ dla $x=-2$ b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}x-2\right)^3$ dla $x=27$.

Zadanie 11. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases} x-5 & dla \quad x<0 \\ 3x & dla \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Oblicz wartość funkcji dla argumentów: $-3,\ 5,\ 0,\ -2018$.

Zadanie 12. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & dla \;\; x\le 4 \\ 2x+7 & dla \;\; x>4 \end{cases}$.

Oblicz wartość funkcji dla argumentów: $4,\ 10,\ 3,\ ,2\sqrt{5}$.

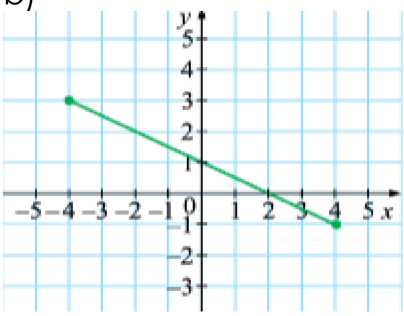
Temat: DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI

Zadanie 1. Podaj dziedzinę i zbiór wartości podanej funkcji:

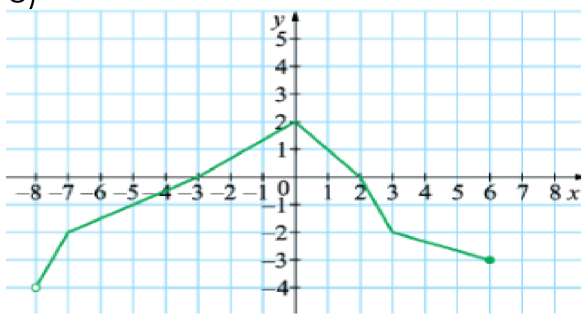
a)

x	-1	0	1	2	3
y	3	-1	-1	2	0

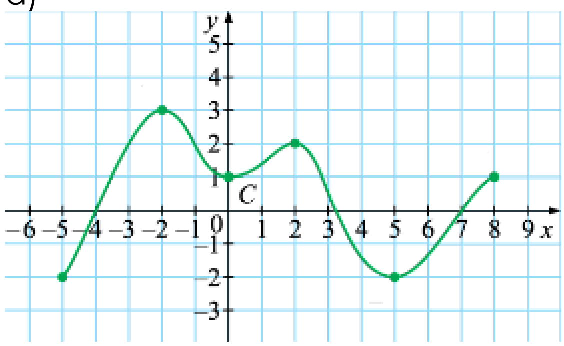
b)



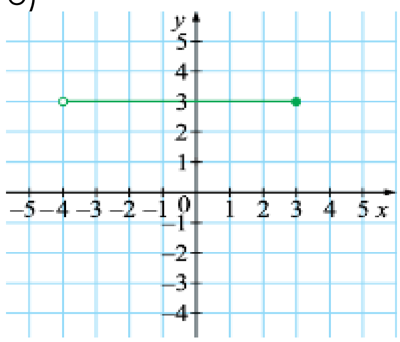
c)



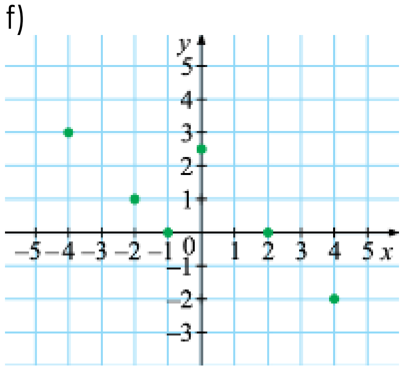
d)



e)

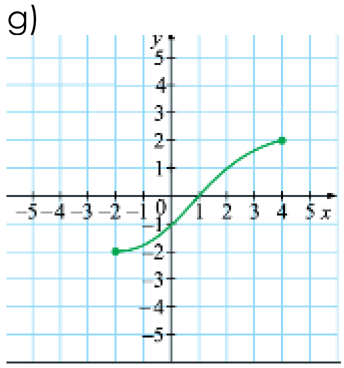


f)

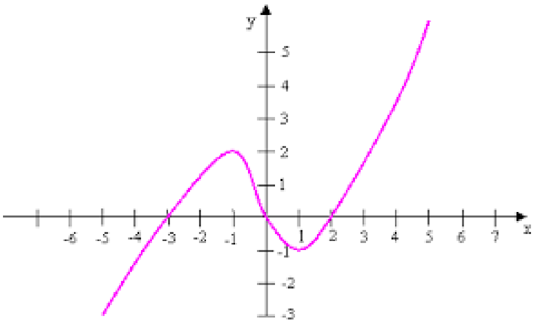


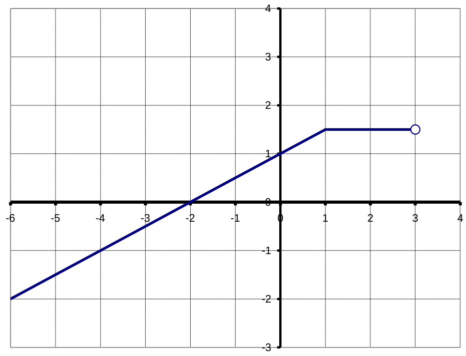
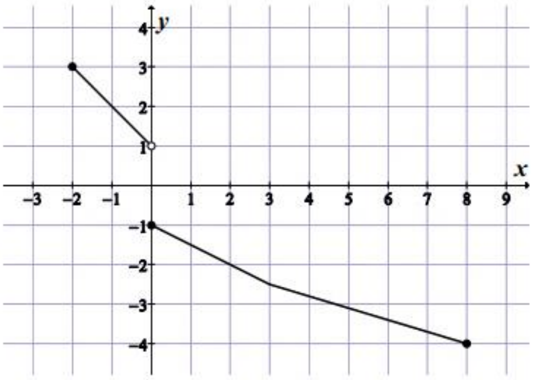
g)

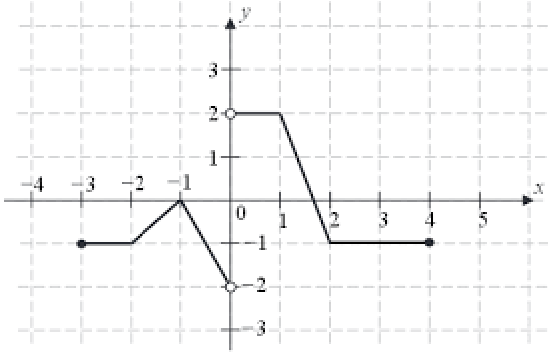
g)



h)





Zadanie 2. Określ dziedzinę funkcji (mianownik nie może być równy 0):

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad D_f=R\setminus\{0\}$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{5x+15}$

d) $f(x)=\dfrac{x-1}{3-2x}$

e) $f(x)=\dfrac{x+2}{4x-1}$

f) $f(x)=\dfrac{2}{x+\sqrt{2}}$.

Zadanie 3. Określ dziedzinę funkcji (pod pierwiastkiem kwadratowym nie może wystąpić liczba ujemna):

a) $f(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad x-1\geq 0$, skąd $x\geq 1$, czyli $D_f=<1,+\infty)$

b) $f(x)=\sqrt{x+5}$

c) $f(x)=\sqrt{2-x}$

d) $f(x)=\sqrt{3x-6}$

e) $f(x)=\sqrt{4-7x}$.

Zadanie 4. Określ dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $\quad$ b) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{-x}}$ $\quad$ c) $f(x)=\dfrac{-4}{\sqrt{6-2x}}$ $\quad$ d) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+5}}$.

Zadanie 5. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=3-5x,\quad D=\{0,1,\sqrt{2},2\}$

b) $f(x)=3x^2-5x+2,\quad D=\{-2,-1,0,1,2\}$.

Zadanie 6. Na podstawie wzoru funkcji określ dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje podaną wartość:

a) $f(x)=\frac{1}{5}x-7$, $y=-1$ b) $f(x)=3$, $y=3$

c) $f(x)=4x-\frac{2}{7}$, $y=-3$ d) $f(x)=|x+2|$, $y=-5$

Temat: MIEJSCE ZEROWE I ZNAK FUNKCJI W PRZEDZIALE

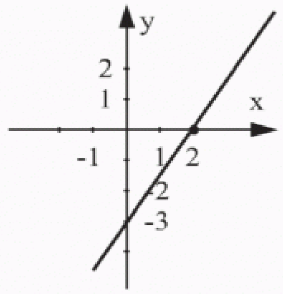
Miejsce zerowe funkcji f to argument x_0, taki że $f(x_0)=0$.
W przypadku funkcji podanej wykresem miejscem zerowym jest odcięta punktu przecięcia się wykresu z osią OX.

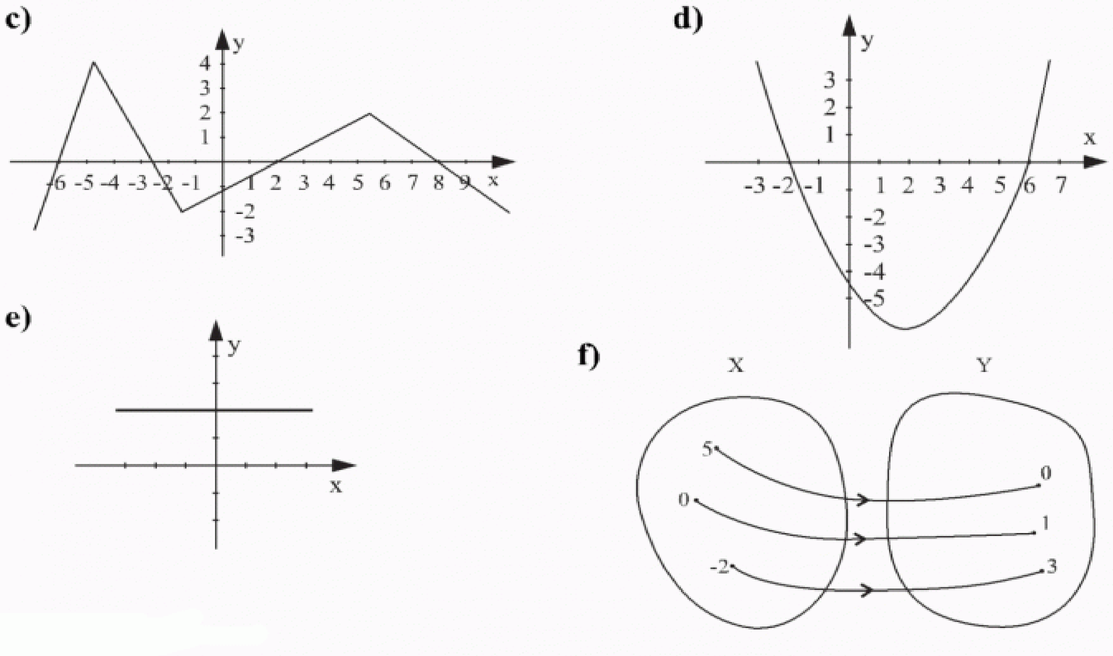
Zadanie 1. Podaj miejsca zerowe funkcji.

a)

x	–5	0	1	5
y	2	3	4	0

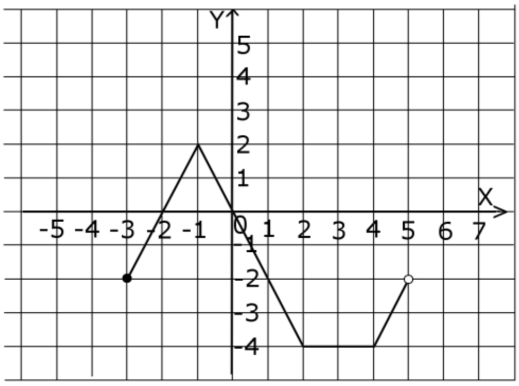
b)



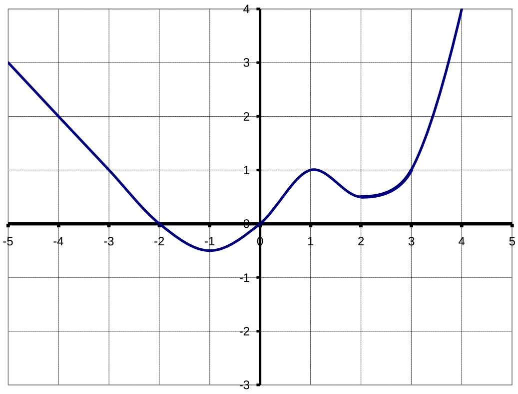


Zadanie 2. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji.

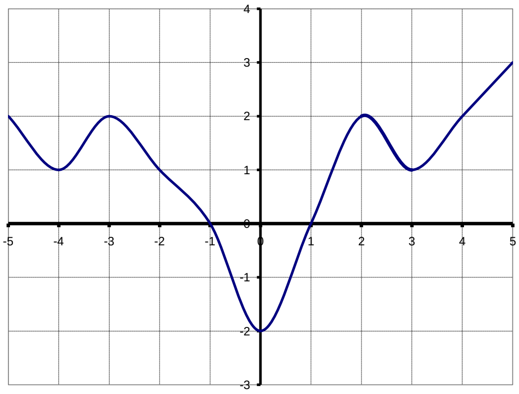
a)



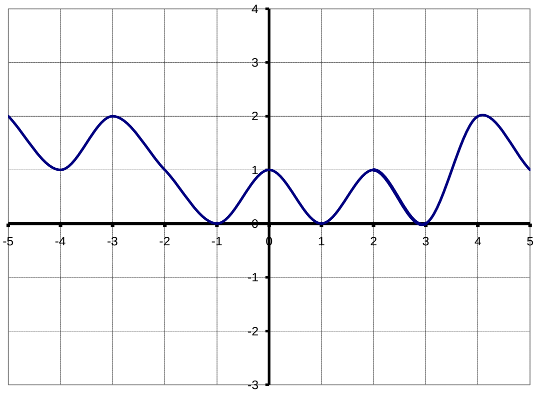
b)



c)



d)



Zadanie 3. Określ miejsca zerowe funkcji.

a)

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	3	-1	-1	2	1	1	0	-3	0

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	-2	0	1

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	3	-1	-1	2	-2	0	0	3	1

Zadanie 4. Oblicz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = 4x - 16$

b) $f(x) = -7x + 1$

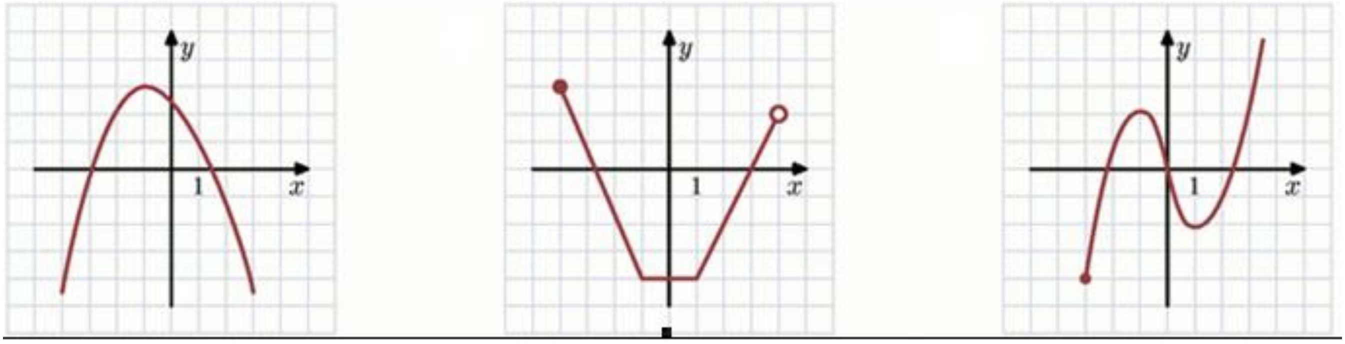
c) $f(x) = \frac{2x}{5} + 3$

d) $f(x) = \frac{x+4}{2} - \frac{1}{3}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x & dla \quad x \in (-1, +\infty) \\ -x+4 & dla \quad x \in (-\infty, -1\rangle \end{cases}$

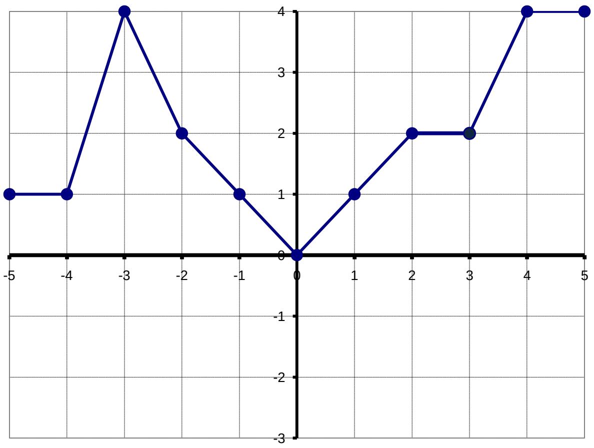
f) $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & dla \quad x \in (1, +\infty) \\ -2x+4 & dla \quad x \in (-\infty, 1\rangle \end{cases}$.

Zadanie 5. Ustal miejsca zerowe funkcji danej wykresem. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich dodatnie.

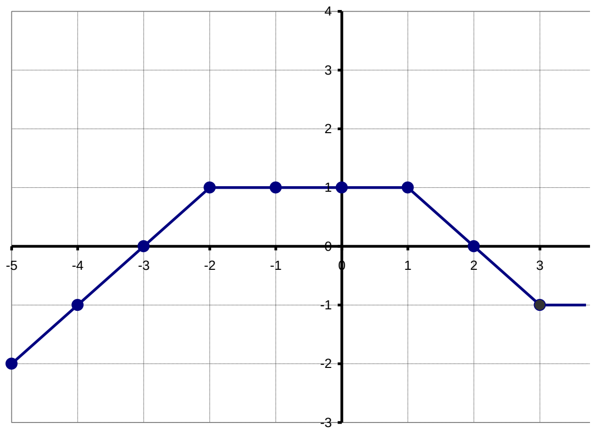


Zadanie 6. Określ, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne oraz niedodatnie

a)



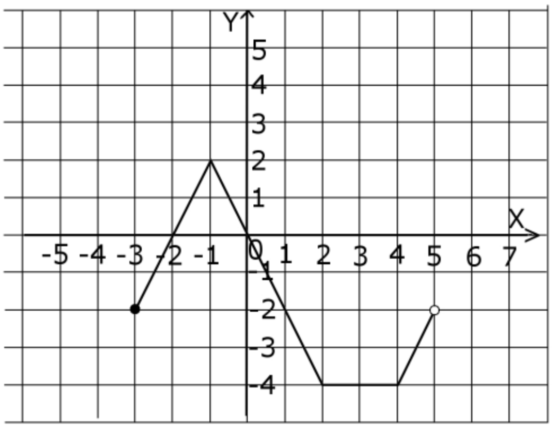
b)

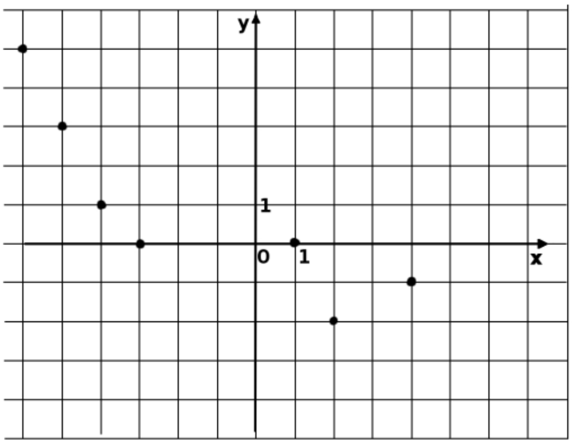


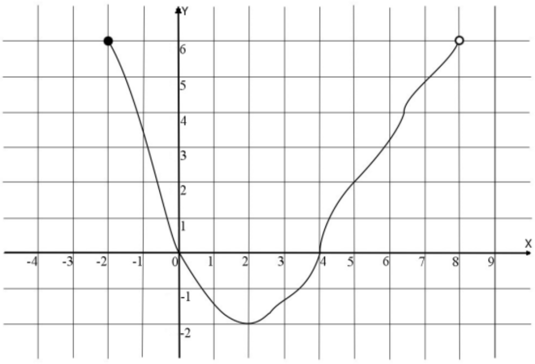
Zadanie 7. Określ dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne oraz niedodatnie.

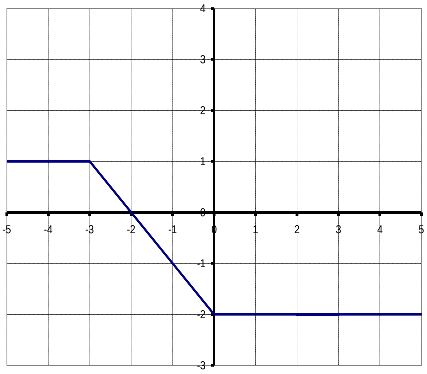
$a)\ f(x) = 4x - 16 \qquad b)\ f(x) = \frac{2x}{3} + 8 \qquad c)\ f(x) = -\sqrt{2}x + 4$

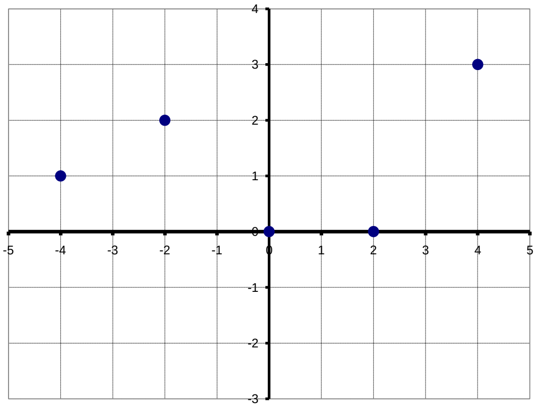
Zadanie 8. Funkcja dana jest za pomocą wykresu. Dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, ujemne, nieujemne i niedodatnie?











Zadanie 9. Określ dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne oraz niedodatnie

a) $f(x) = 7x - 1$

b) $f(x) = \frac{4x}{5}$

c) $f(x) = \frac{x}{5} - 3$

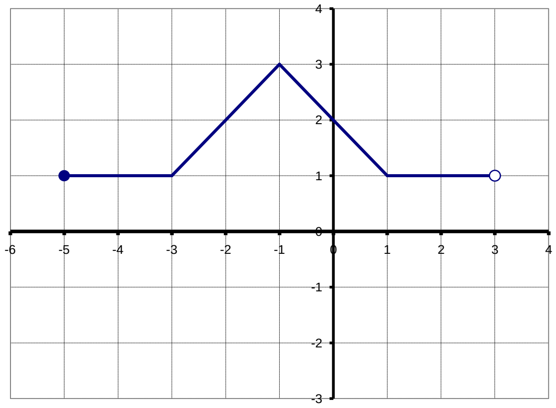
d) $f(x) = -\frac{7x}{3} + 2$

e) $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$

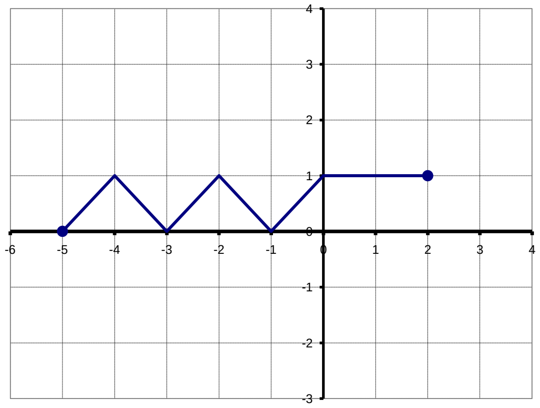
Temat: FUNKCJA ROSNĄCA, MALEJĄCA I STAŁA

Zadanie 1. Podaj przedziały monotoniczności funkcji.

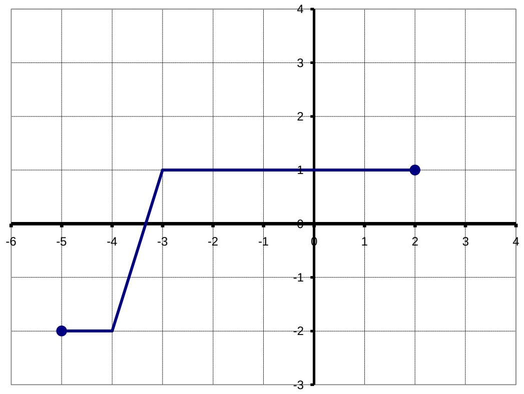
a)



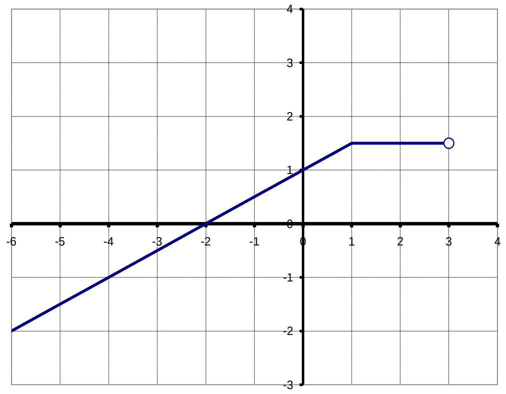
b)



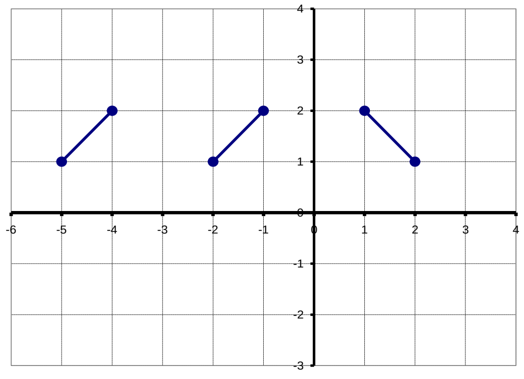
c)



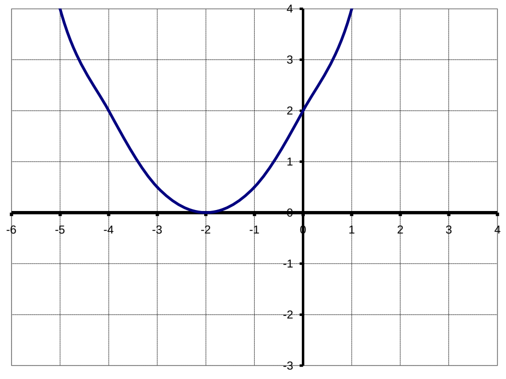
d)



e)

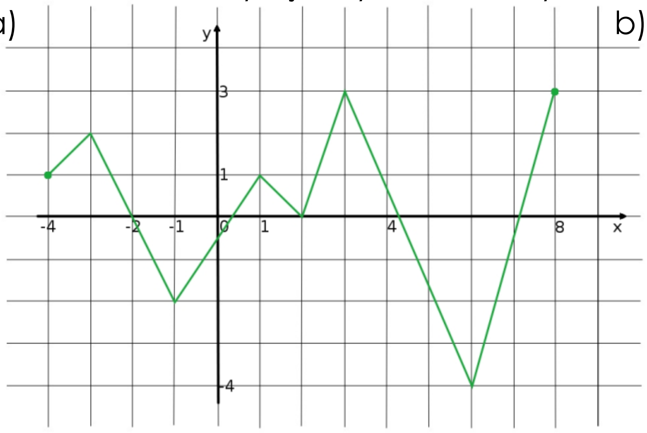


f)

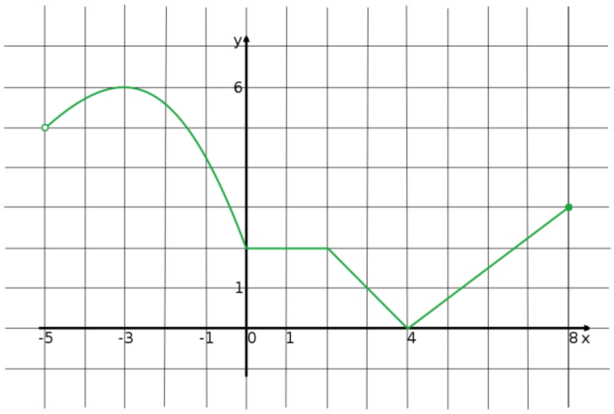


Zadanie 2. Odczytaj z wykresu maksymalne przedziały monotoniczności funkcji:

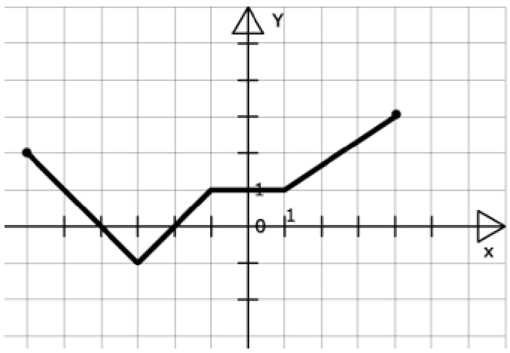
a)



b)

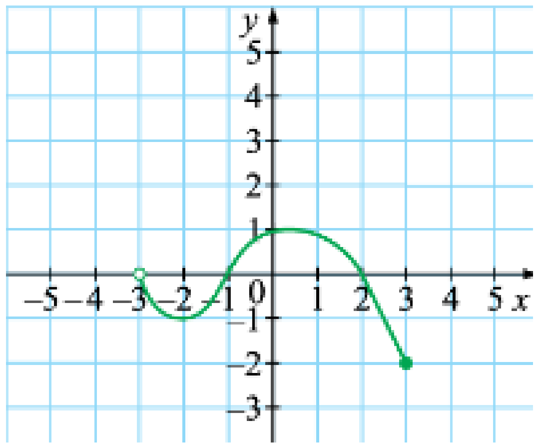


c)



Zadanie 3. Funkcja dana jest za pomocą wykresu

Określ



a) dziedzinę funkcji.

b) zbiór wartości funkcji

c) miejsca zerowe funkcji

d) przedział, w którym funkcja jest malejąca

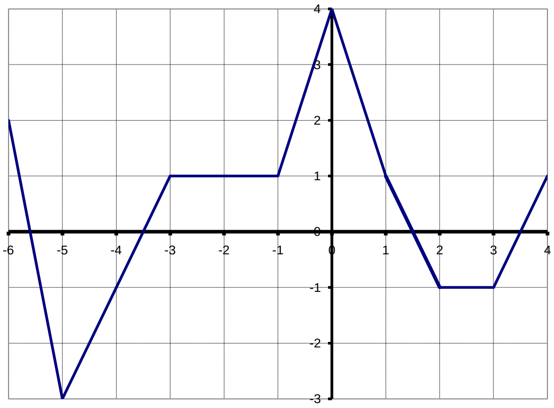
d) przedział, w którym funkcja jest rosnąca

e) wartość funkcji dla x=0

g) przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości nieujemne

Zadanie 4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*. Wskaż zdania prawdziwe

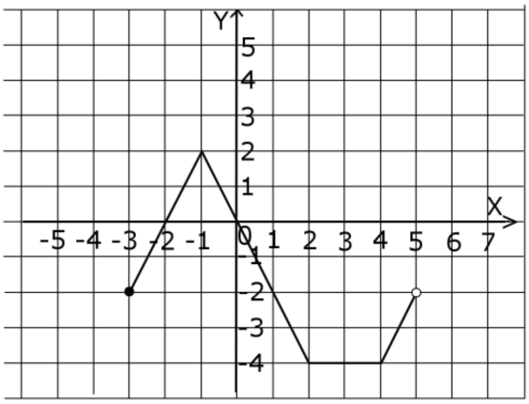
- ☐ *f* jest nierosnąca w przedziale $\langle 0;3\rangle$
- ☐ *f* jest nierosnąca w przedziale $(0;4)$
- ☐ *f* jest malejąca w przedziale $\langle 0;2\rangle$
- ☐ *f* jest niemalejąca w przedziale $(-5;-1)$
- ☐ *f* jest niemalejąca w przedziale $(-5;0)$
- ☐ *f* jest rosnąca w przedziale $(-4;-2)$



Temat: WARTOŚĆ NAJMNIEJSZA I NAJWIĘKSZA FUNKCJI W PRZEDZIALE

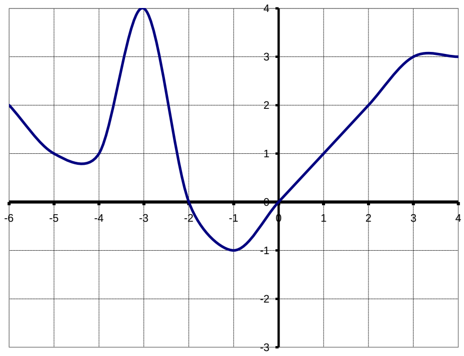
Zadanie 1. Na podstawie wykresu funkcji uzupełnij tabelę

przedział	Wartość	
	najmniejsza	największa
$\langle 2,3\rangle$		
$\langle -4,1\rangle$		
$\langle -3,0\rangle$		

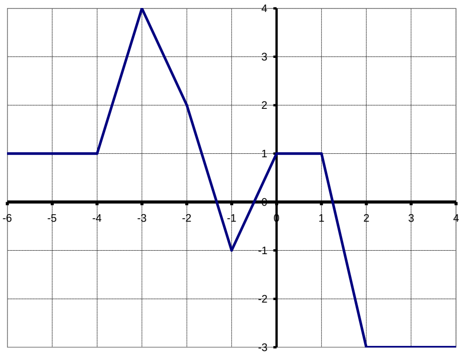


Zadanie 2. Dla poniższych wykresów funkcji odczytaj wartości najmniejsze i największe w przedziale $\langle -3,1\rangle$

c)



d)



Zadanie 3. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale

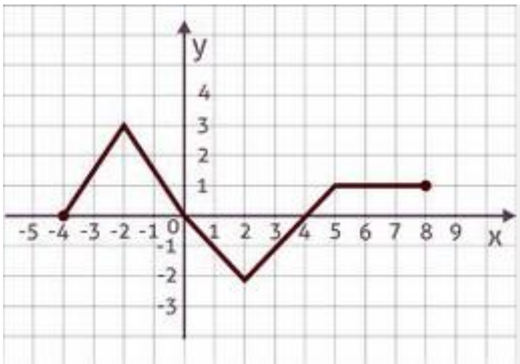
a) $f(x) = 3x - 2$, $x \in \langle 0,5 \rangle$ b) $f(x) = -5x + 4$, $x \in \langle -2,10 \rangle$

c) $f(x) = x + 3$, $x \in (-\infty, 0\rangle$ d) $f(x) = -x - 2$, $x \in \langle 2, \infty)$

Temat: ODCZYTYWANIE WŁASNOŚCI FUNKCJI Z JEJ WYKRESU

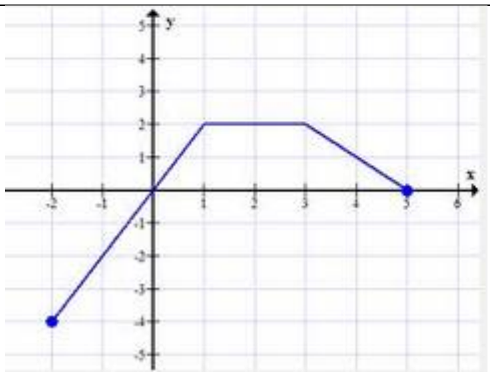
Zadanie 1. Odczytaj z wykresu funkcji następujące własności:

a)



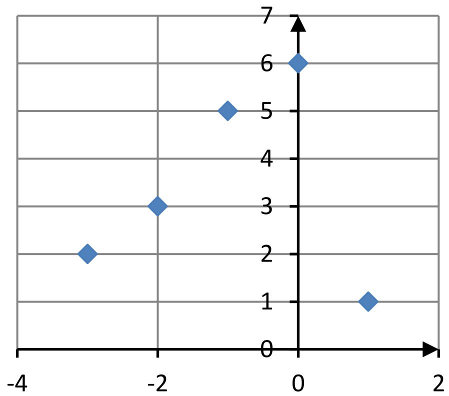
- dziedzinę i zbiór wartości,
- miejsca zerowe,
- przedziały monotoniczności funkcji
- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie
- wartość najmniejsza funkcji przedziale <-2, 0>
- argumenty, dla których $f(x) = -1$

b)



- dziedzinę i zbiór wartości,
- miejsca zerowe,
- przedziały monotoniczności funkcji
- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie
- wartość najmniejsza funkcji przedziale <-2, 0>
- argumenty, dla których $f(x) = 2$

c)



- dziedzinę i zbiór wartości,
- miejsca zerowe,
- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie
- wartość najmniejsza funkcji przedziale <-2, 0>
- argument, dla którego $f(x) = 6$

Zadanie 2. Na podstawie wykresu funkcji podaj

a) dziedzinę funkcji

b) zbiór wartości funkcji

c) miejsca zerowe funkcji

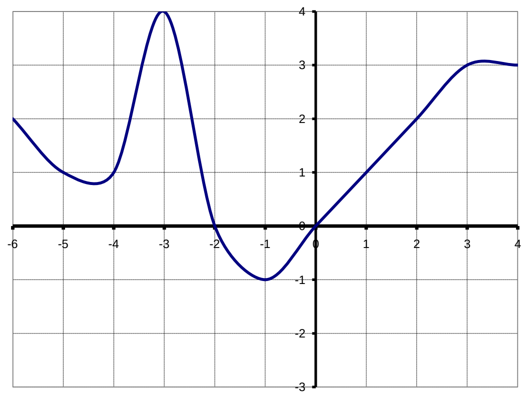
d) przedziały, w którym funkcja jest rosnąca

e) wartość funkcji dla $x=-3$

f) największą wartość funkcji w przedziale $\langle -6,2\rangle$

g) przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości ujemne

h) argumenty dla których funkcja przyjmuje wartość -1



Zadanie 3. Na podstawie wykresu funkcji podaj:

a) dziedzinę funkcji

b) zbiór wartości funkcji

c) miejsce zerowe funkcji

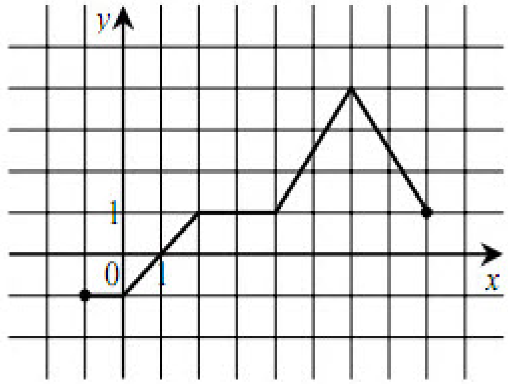
d) przedział, w którym funkcja jest malejąca

e) wartość funkcji dla x = 4

f) najmniejszą wartość funkcji w przedziale $\langle 0,2\rangle$

g) przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości nieujemne

h) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 1



Zadanie 4. Określ własności funkcji

a)dziedzina

b)zbiór wartości

c)miejsca zerowe

d)argumenty, dla których funkcja:

-maleje

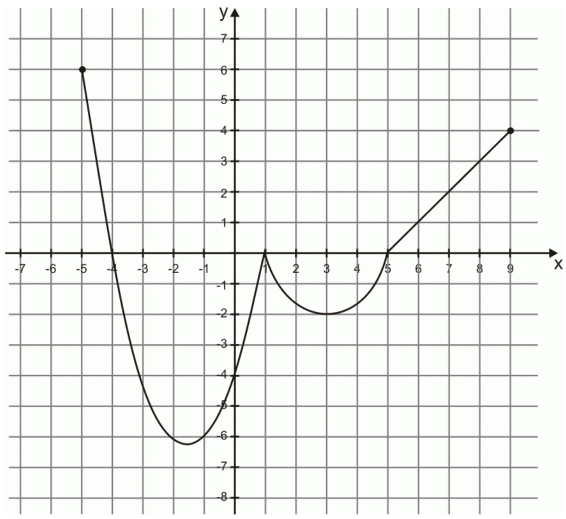
-przyjmuje wartości ujemne

-przyjmuje wartości dodatnie

-przyjmuje wartość -4

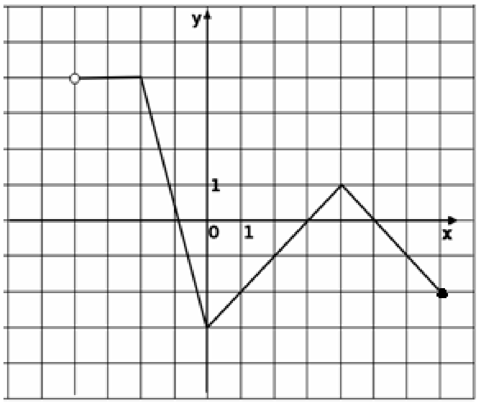
e) $f(6)$

f)wartość najmniejsza funkcji w przedziale $x\in\langle 0,5\rangle$



g)dartość najmniejsza funkcji w przedziale
$x \in \langle -5,1 \rangle$

Zadanie 5. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Na podstawie wykresu odczytaj:
Zadanie Określ własności funkcji:



a)dziedzina

b)zbiór wartości

c)miejsca zerowe

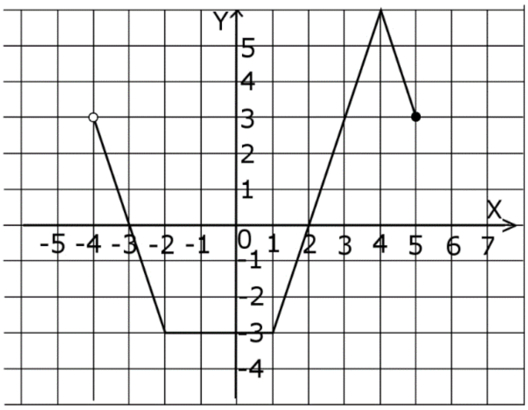
d)argumenty, dla których funkcja:

-maleje

-przyjmuje wartości nieujemne

-przyjmuje wartość -1:

Zadanie 6. Odczytaj z wykresu funkcji $f(x)$ następujące własności :



a)dziedzina

b)zbiór wartości

c)miejsca zerowe

d)maksymalne przedziały, w których
funkcja maleje

e)argumenty, dla których funkcja:

-jest stała

-maleje

-przyjmuje wartości dodatnie

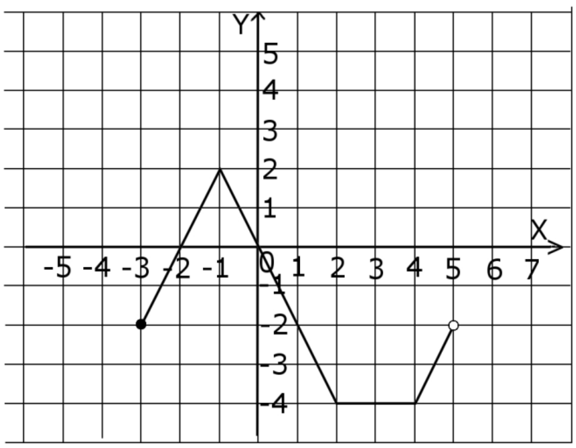
-przyjmuje wartość 3:

f) $f(-2)$

g)wartość największa funkcji w przedziale $x \in \langle 0,5 \rangle$

h)wartość najmniejsza funkcji w przedziale $x \in \langle 1,4 \rangle$.

Zadanie 7. Odczytaj z wykresu funkcji $f(x)$ następujące własności:



a)dziedzina

b)zbiór wartości

c)miejsca zerowe

d)maksymalne przedziały, w których
funkcja rośnie

e) $f(x) > 0$

f) $f(-0{,}5)$, $f(3)$

g)argumenty, dla których funkcja
przyjmuje wartość -2

h)argumenty, dla których funkcja przyjm

i)wartość największa funkcji w przedziale $x \in \langle -2,1 \rangle$

j)wartość najmniejsza funkcji w przedziale $x \in \langle -3,2 \rangle$.

Zadanie 8. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i odczytaj z wykresu jej dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe:

a) $f(x) = \begin{cases} x & dla \quad x \leq 3 \\ -x+6 & dla \quad x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & dla \quad x < 5 \\ 0 & dla \quad x = 5 \\ x & dla \quad x > 5 \end{cases}$

Zadnie 9. Narysuj przykładowy wykres funkcji, która spełnia następujące warunki:

a)ma dwa miejsca zerowe, jest rosnąca w zbiorze $(-\infty,-1>$ oraz malejąca w zbiorze $<-1,+\infty)$

b) $D = R, \quad Y_f = R$, miejscem zerowym funkcji jest (-2), funkcja jest rosnąca.

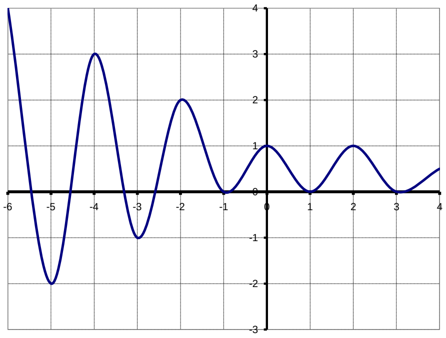
c) $D = R, \quad Y_f =< -1,+\infty)$. Funkcja w przedziale $(-\infty,-2>$ jest malejąca, a w przedziale $<-2,+\infty)$ rosnąca. $f(x) = 0$ dla x = -3 i x = -1.

d) $D = R, \quad Y_f =< -\infty,2>$. Funkcja w przedziale $(-\infty,0>$ jest rosnąca, a w przedziale $<0,+\infty)$ malejąca. $f(x) = 0$ dla x = -2 i x = -2. Wartość największą równą 2 funkcja przyjmuje dla x = 0.

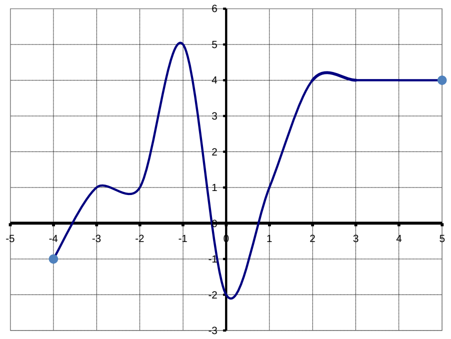
Temat: ODCZYTYWANIE Z WYKRESÓW FUNKCJI ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI.

Zadanie 1. Na podstawie wykresu funkcji określ dla jakich argumentów x prawdziwe jest podane równanie

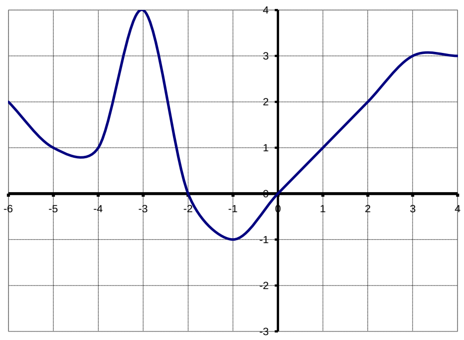
a) $f(x) = -2$



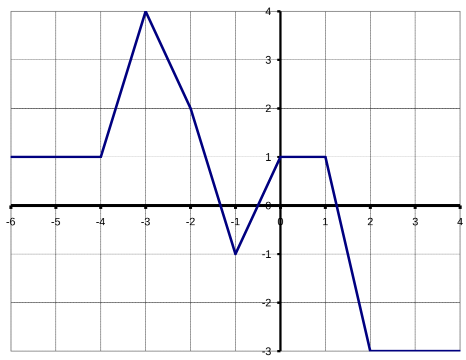
b) $f(x) = 5$



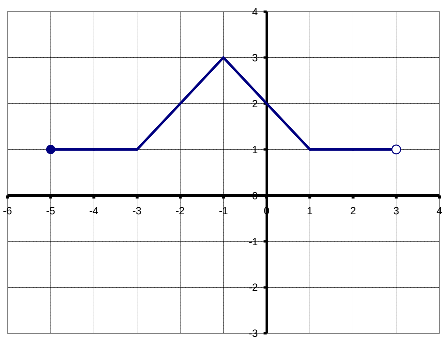
c) $f(x) = 1$



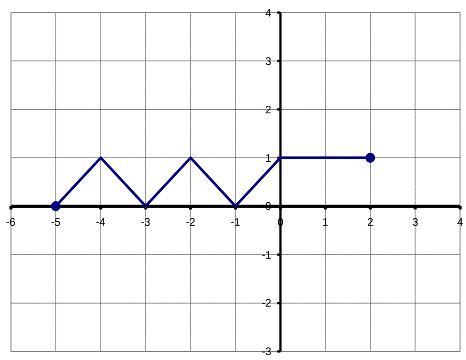
d) $f(x) = 1$



e) $f(x) = 1$

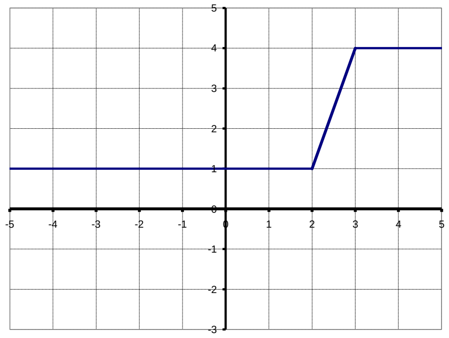


f) $f(x) = 0$

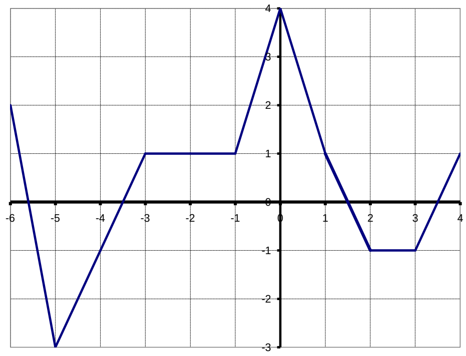


Zadanie 2. Na podstawie wykresu funkcji określ dla jakich argumentów x prawdziwa jest podana nierówność

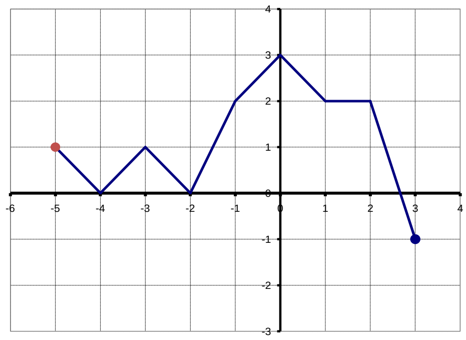
a) $f(x) < 4$



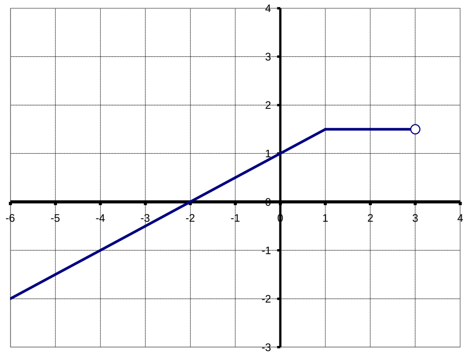
b) $f(x) \geq 4$



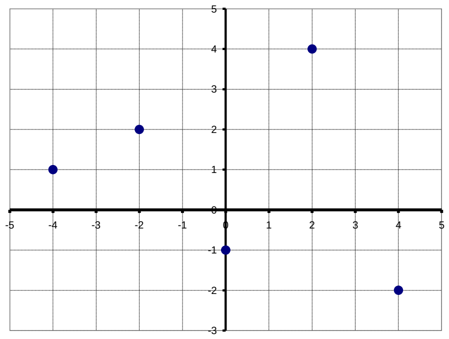
c) $f(x) < 2$



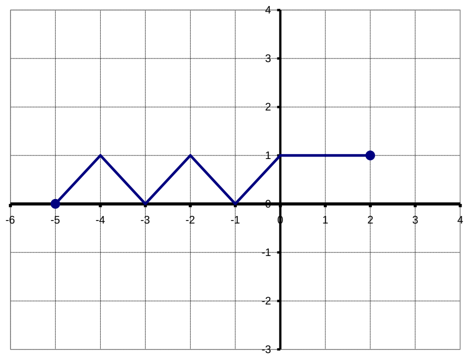
d) $f(x) < 3$



e) $f(x) \geq 1$

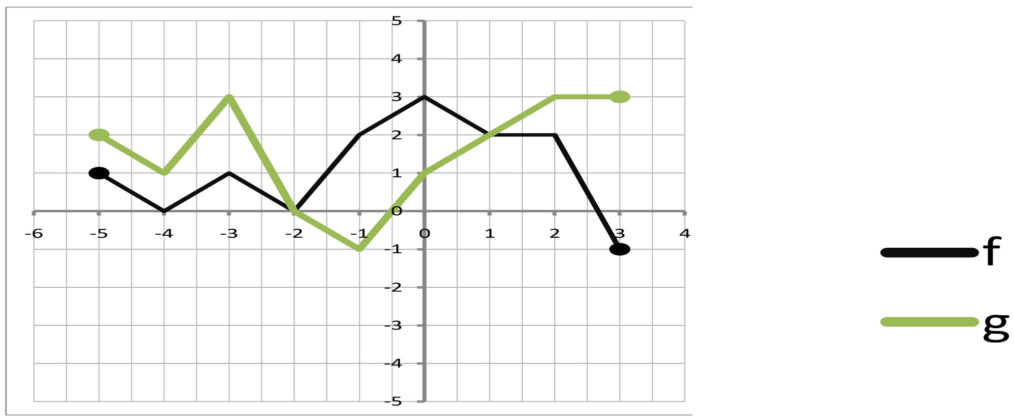


f) $f(x) < 1$



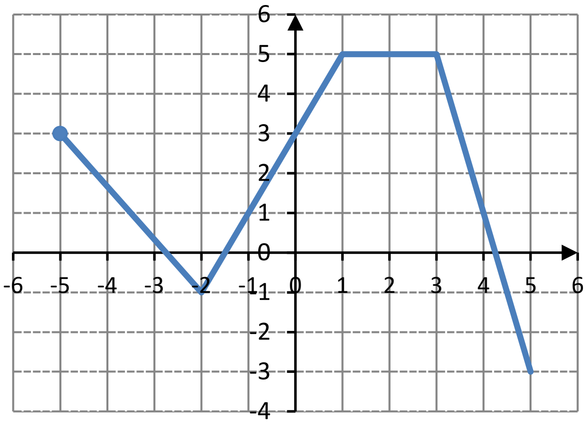
Zadanie 3. Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy dwóch funkcji *f* i *g*. Określ dla jakich argumentów

a) $f(x) < g(x)$ b) $f(x) \leq g(x)$ c) $f(x) \geq 2$ d) $g(x) > 0$

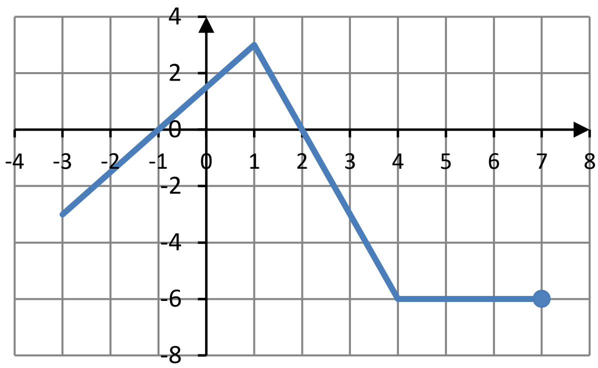


Zadanie 4. Omów liczbę rozwiązań równania *f(x)=m* w zależności od parametru *m*.

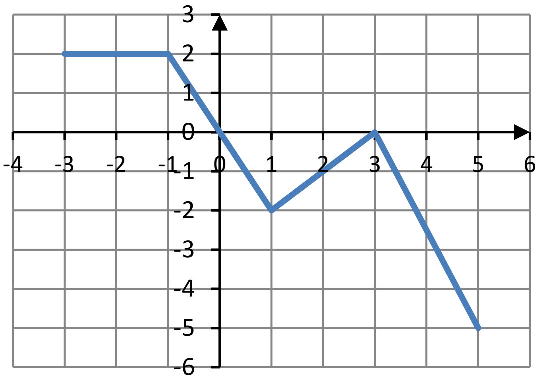
a)



b)



c)



Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI - FUNKCJA I JEJ WŁASNOŚCI

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ określić, czy dane przyporządkowanie (w postaci tabeli, grafu,wykresu, przypisu słownego) jest funkcją
- ✓ przedstawić funkcje za pomocą postaci tabeli, wzoru, grafu,wykresu, przypisu słownego
- ✓ obliczyć ze wzoru (i odczytac z wykresu) wartość funkcji dla podanego argumentu oraz argument, gdy podana jest wartość funkcji
- ✓ odczytać z wykresu: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, wartości ujemne lub dodatnie, wartość największą i najmniejszą funkcji
- ✓ odczytać z wykresu liczbę rozwiązań równania.

Zadanie 1. Rozstrzygnij, które z poniższych przyporządkowań jest funkcją. Dla przyporządkowania, które jest funkcją zapisz wzór i wykonaj wykres.

a)

x	1	2	3	4	5	5
y	2	3	4	5	6	7

b)

x	1	2	3	4	5	6
y	3	4	5	6	7	8

c) Każdej liczbie rzeczywistej mniejszej od 8 przyporządkowano liczbę przeciwną.

Zadanie 2. Funkcja dana jest tabelą, uzupełnij własności:

a) dziedzina

b) zbiór wartości funkcji

c) wartość największa funkcji

d) $f(4)$

e) dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 1?

X	-2	-1	0	2	4	6	7
$y=f(x)$	4	-2	1	0	7	0	-2

Zadanie 3. Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x)=4x-12$

b) $f(x)=-\frac{2}{3}x-8$

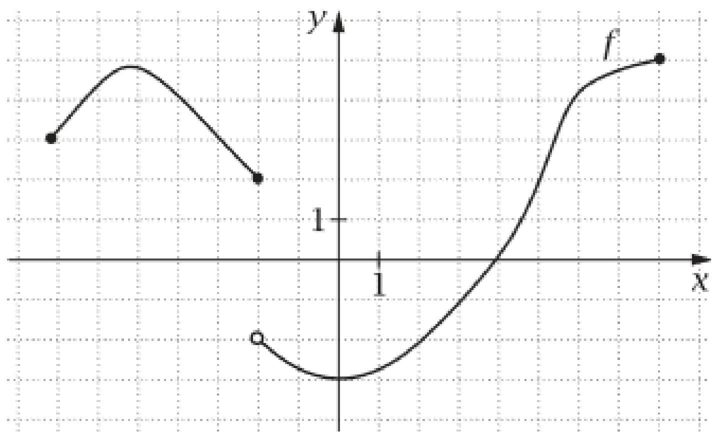
Zadanie 4. Dla jakich argumentów funkcja $f(x)=-6x+3$ przyjmuje wartości nieujemne?

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.

a)odczytaj f(−2), f(0)

b)dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość −1, a dla jakich wartość −2?

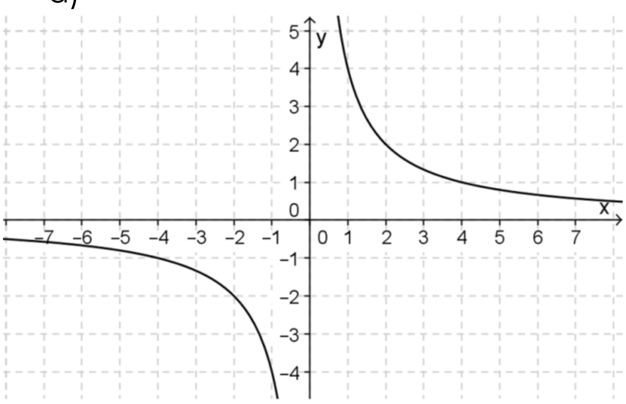
c)dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 4.



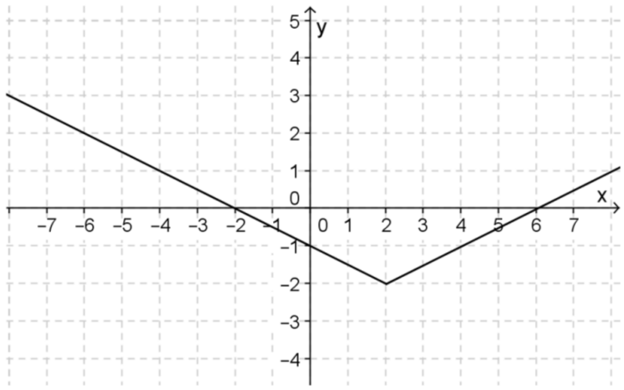
Zadanie 6. Wyznacz miejsce zerowe funkcji f(x) = 3x + 4

Zadanie 7. Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsce zerowe.

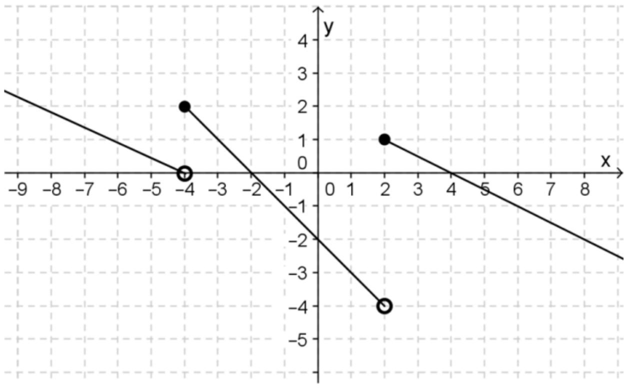
a)



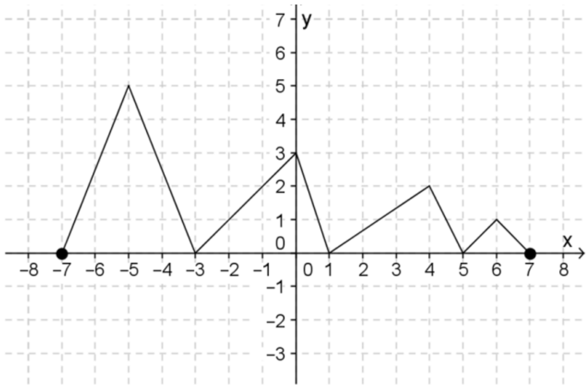
b)



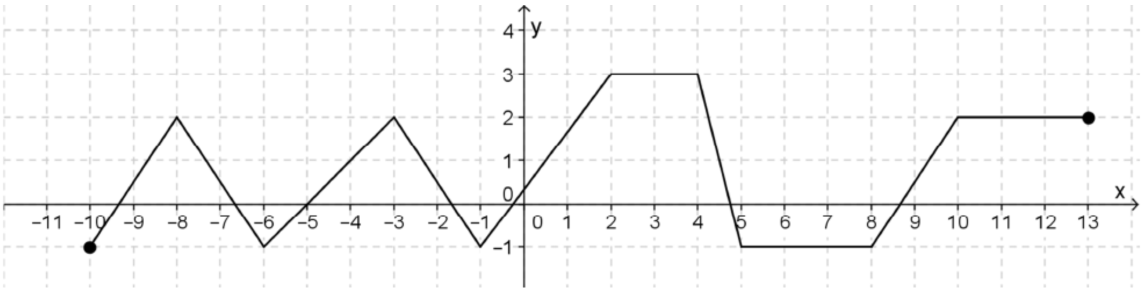
c)



d)

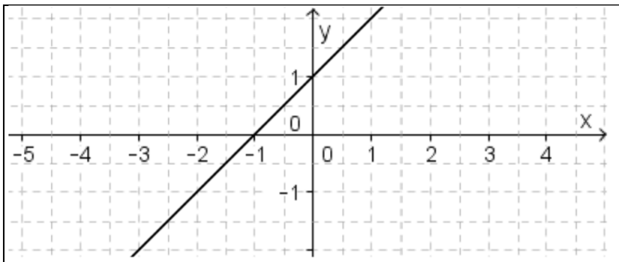


Zadanie 8. Dla funkcji przedstawionej na wykresie określ przedziały, w których jest ona rosnąca, przedziały, w których jest malejąca i przedziały, w których jest stała.

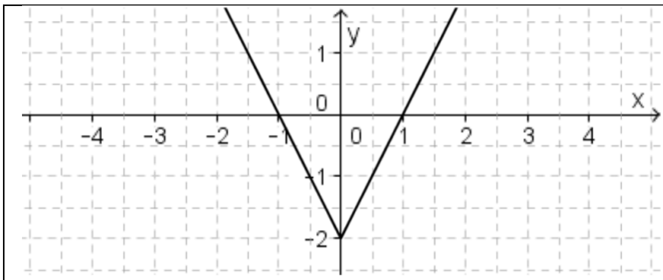


Zadanie 9. Dla każdej z poniższych funkcji wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne i dodatnie.

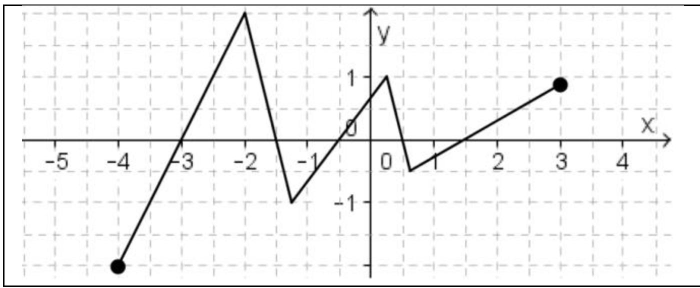
a)

	f(x) < 0 dla x f(x) > 0 dla x

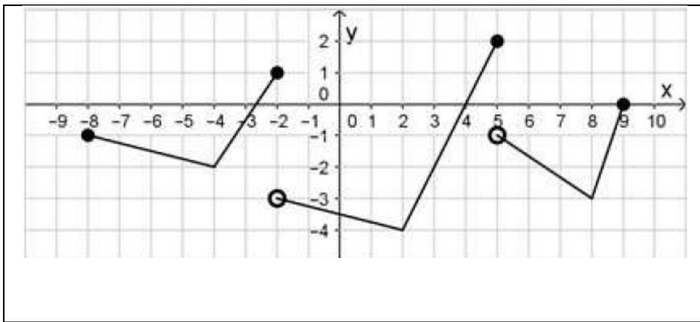
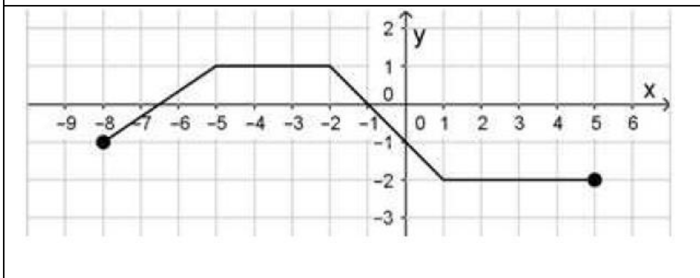
b)

	f(x) < 0 dla x □□......................... f(x) > 0 dla x □□..........................

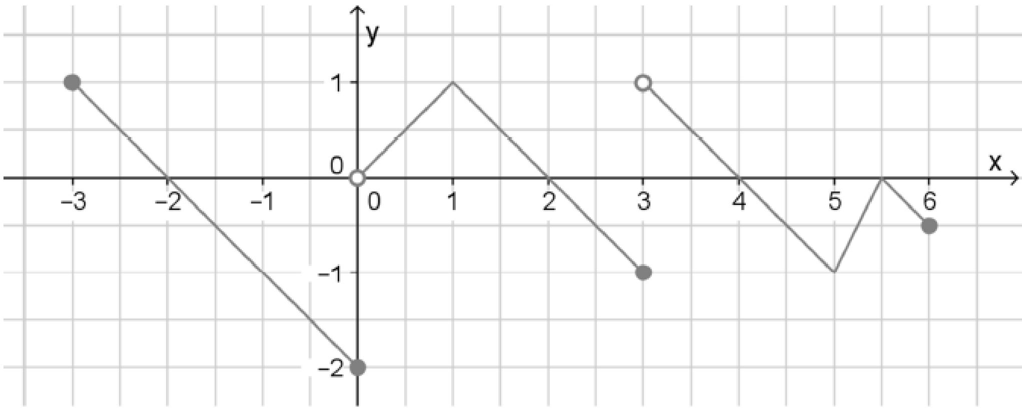
c)

	f(x) < 0 dla x □□......................... f(x) > 0 dla x □□..........................

Zadanie 10. Dla poniższych funkcji określ wartość najmniejszą i największą oraz podaj argumenty, dla których funkcja te wartości przyjmuje.

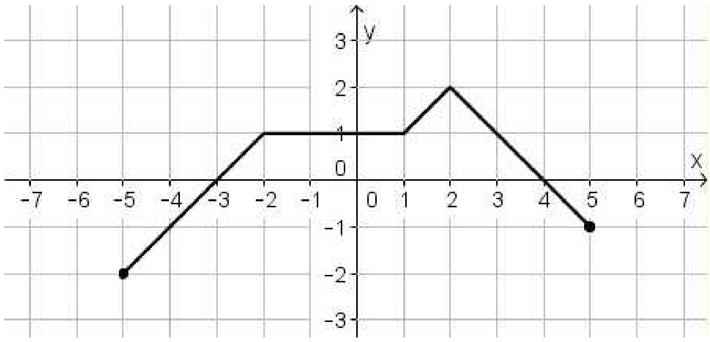
	Wartość największa: .... dla x=....... Wartość najmniejsza: .... dla x=.......
	Wartość największa: .... dla x=....... Wartość najmniejsza: .... dla x=.......

Zadanie 11. Odczytaj z wykresu funkcji $f(x)$ następujące własności



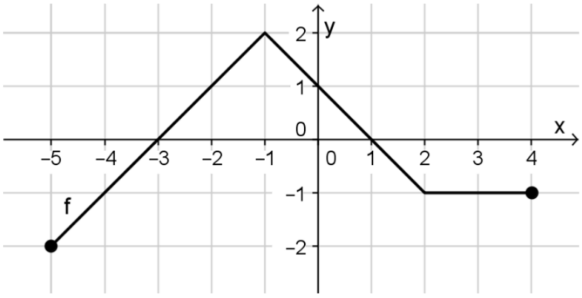
a) dziedzina funkcji i zbiór wartości funkcji
b) miejsca zerowe funkcji
c) przedziały, w których funkcja jest rosnąca
d)przedziały, w których funkcja jest malejąca
e)przedziały, w których funkcja jest stała
f) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
g)argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

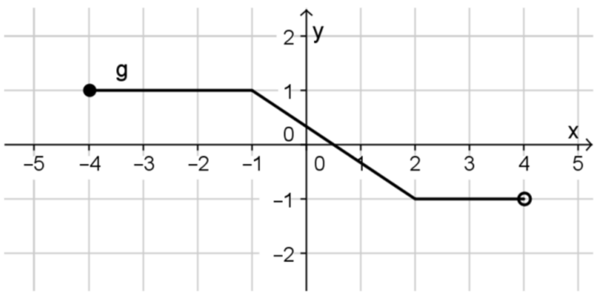
Zadanie 12. Odczytaj z wykresu funkcji następujące własności



dziedzina,
zbiór wartości
miejsca zerowe
wartości dodatnie
wartości ujemne
funkcja jest stała dla
maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie
$f(3)$, $f(0)$, $f(-5)$
argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 1.

Zadanie 13. Na podstawie wykresu funkcji f odczytaj rozwiązanie równania i nierówności.





f(x) = 1 dla _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ g(x) = – 1 dla _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
f(x) < 1 dla _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ g(x) > – 1 dla _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Zadanie 14. Określ dziedzinę funkcji danej wzorem

a) $f(x)=\frac{1}{x}$ b) $f(x)=\frac{2}{x-4}$ c) $f(x)=\frac{2x}{x+7}$

d) $f(x)=\frac{x}{3x-5}$ e) $f(x)=\sqrt{x-1}$ f) $f(x)=\sqrt{x+5}$

g) $f(x)=\sqrt{2x-4}$ h) $f(x)=\sqrt{-x+8}$ i) $f(x)=2x$.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Funkcja $h(x)=-x^3-x^2-x$ dla argumentu -2 przyjmuje wartość:

A.-14 B. -12 C. 6 D. 14

Zadanie 2. Funkcja $f(x)=-6x-2$ wartość 2 przyjmuje dla argumentu:

A.-14 B. $-\frac{2}{3}$ C. 0 D. $\frac{1}{6}$

Zadanie 3. Funkcja f(n) przyporządkowuje każdej dodatniej liczbie naturalnej liczbę liczb pierwszych mniejszych od n. Wtedy f(23) jest równe:

A.6 B. 7 C. 8 D. 9

Zadanie 4. Funkcja f określona jest wzorem f(x)=3x-2, $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$. Zbiorem wartości funkcji f jest:

A.{-2, -1, 0, 1, 2} B. <-8,4> C. <-2,2> D. {-8, -5, -2, 1, 4}

Zadanie 5. Zbiór A jest zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja $f(x) = 4x + 16$ przyjmuje wartości większe od 8. Zatem:

A.$A = (-8, +\infty)$ B. $A = (-4, +\infty)$ C. $A = (-2, +\infty)$ D. $A = (8, +\infty)$

Zadanie 6. Wskaż liczbę, która należy do dziedziny funkcji $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)(3x+6)}$.

A.-2 B. -1 C. 0 D. 1

Zadanie 7. Do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{2-x}$ nie należy liczba:

A.$\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{4}$ D. $\sqrt{5}$

Zadanie 8. Dziedziną funkcji $f(x) = x^2 - x$ jest zbiór:

A.$D = (-\infty, 0 > \cup (0, +\infty)$ B.$D = R\backslash\{0,1\}$

C. D=R D.$D =< 1, +\infty)$

Zadanie 9. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{5}{x}$ jest zbiór:

A.$D =< 0, +\infty)$ B. $D = (0, +\infty)$

C. $D = R\backslash\{0\}$ D. $D = R\backslash\{5\}$

Zadanie 10. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x-5}$ jest przedział:

A.$D =< -5, +\infty)$ B.$D =< 0, +\infty)$

C. $D =< 5, +\infty)$ D. $D = R\backslash\{5\}$

Zadanie 11.Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x+16}$ jest przedział:

A. $D =< -16, +\infty)$ B.$D =< -4, +\infty)$

C. $D =< 0, +\infty)$ D.$D = R\backslash\{-16\}$

Zadanie 12. Wskaż liczbę, która jest miejscem zerowym funkcji $g(x) = x^4 - 16$:

A.-4 B. -2 C. 0 D. 4

Zadanie 13. Liczba miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^3 + 25x$ jest równa:

A.1 B. 2 C. 3 D. 0

Zadanie 14. Miejscem zerowym funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$ jest liczba:

A. 5 B. 15 C. $-\frac{1}{3}$ D. 0

Zadanie 15. Funkcja f określona jest za pomocą tabelki. Zbiór wartości tej funkcji ma:

A. Dwa elementy
B. Trzy elementy
C. Cztery elementy
D. Sześć elementów

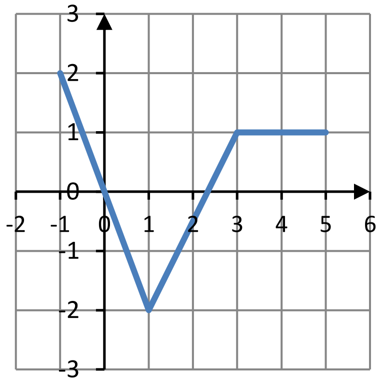
x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-3	0	-1	-3	-2	0

Zadanie 16. Funkcja f określona jest tabelką. Wskaż miejsce zerowe funkcji f:

A. 2 B.1 C. 0 D. Brak miejsc zerowych

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	-2	-4

Zadanie 17. Maksymalny przedział, w którym funkcja przedstawiona na rysunku jest rosnąca, to:



A. <-2,2> B. <-2,3> C. <-1,1> D. <1,3>.

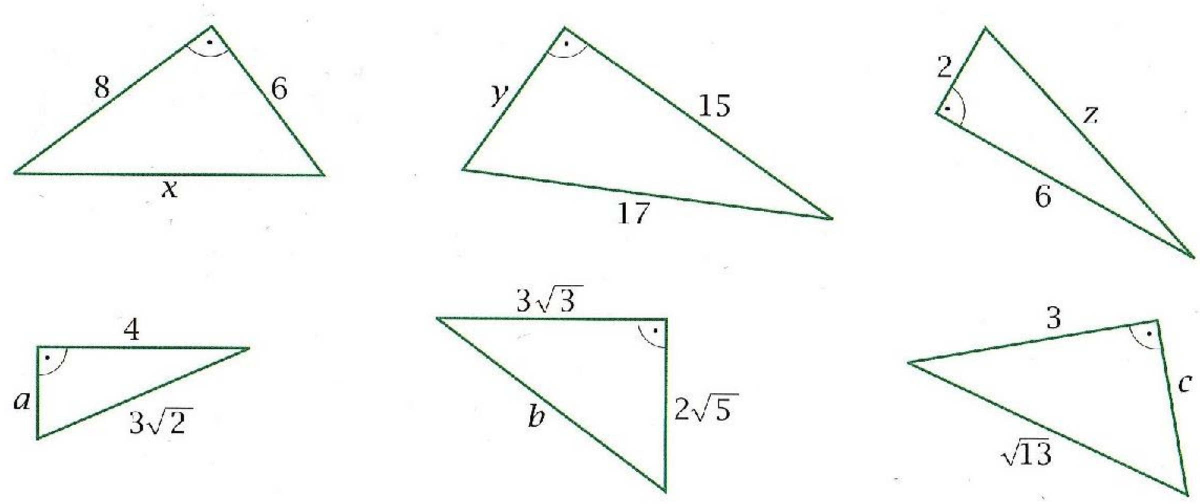
11. TRYGONOMETRIA

Trygonometria to dział matematyki, którego przedmiotem badań są związki między bokami i kątami trójkątów. Trygonometria powstała i rozwinęła się głównie w związku z zagadnieniami pomiarów na powierzchni Ziemi oraz potrzebami żeglugi morskiej :określenia położenia i kierunku przy pomocy ciał niebieskich (na rozwój trygonometrii miała znaczący wpływ astronomia).

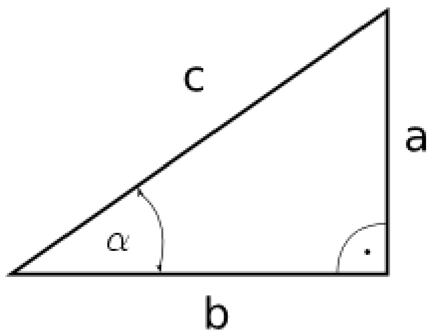
Definiuje się cztery podstawowe funkcje trygonometryczne:
sinus (sin), **cosinus (cos)**, **tangens (tg)**

Temat: TANGENS KĄTA OSTREGO

Zadanie 1. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

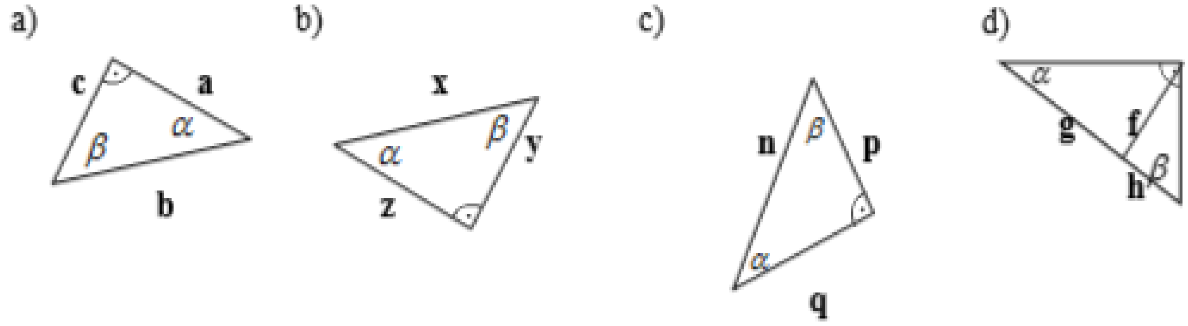


Tangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do przyprostokątnej leżącej przy kącie α

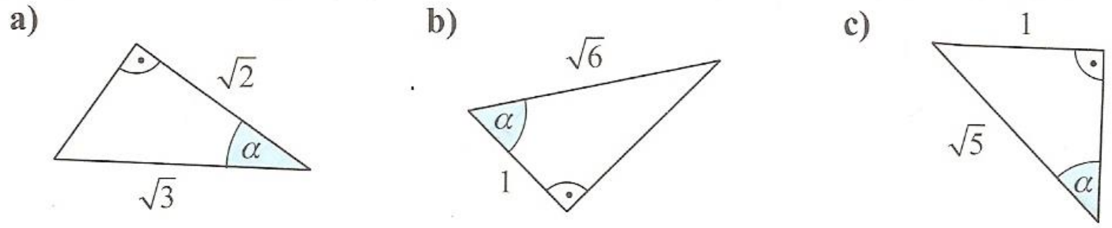


$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

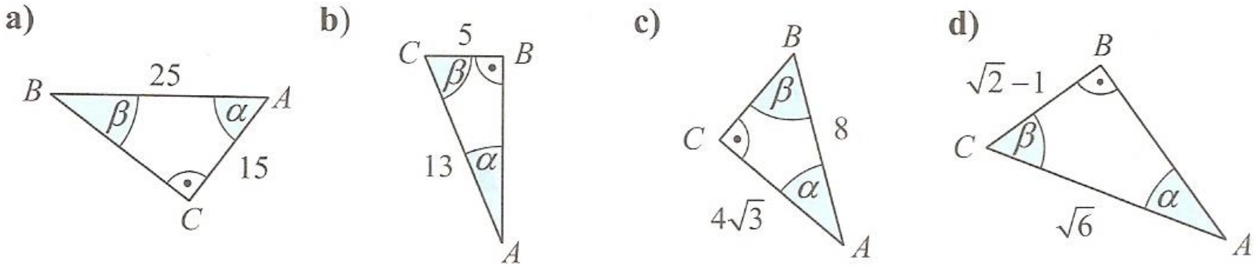
Zadanie 2. Wyznacz tangensy kątów α i β.



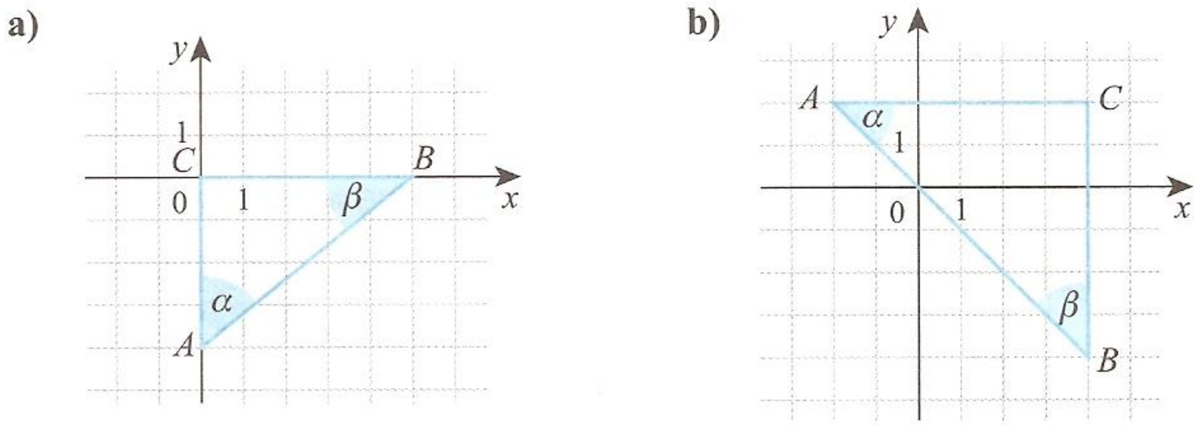
Zadanie 3. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta, a następnie podaj $tg\alpha$.



Zadanie 4. Uwzględniając dane przedstawione na rysunku, oblicz tg α i tg β

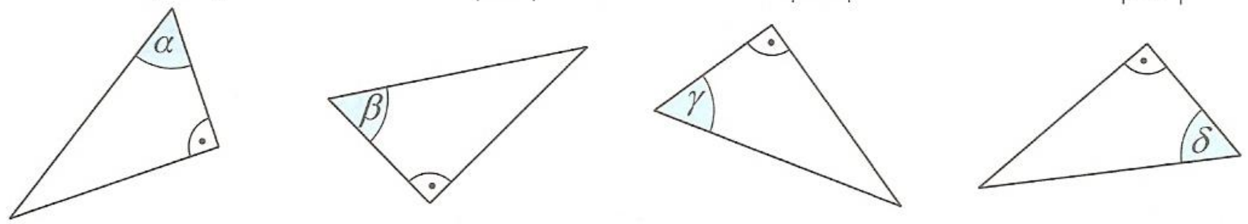


Zadanie 5. Oblicz wartość tangensów kątów a i β trójkąta ABC przedstawionego na rysunku:



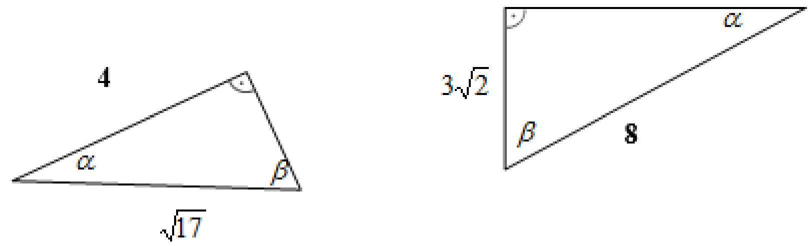
Zadanie 6. Wierzchołki trójkąta prostokątnego oznacz takimi literami, aby równość zapisana nad rysunkiem trójkąta była prawdziwa.

a) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{|KL|}{|LM|}$, **b)** $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{|BC|}{|AB|}$, **c)** $\mathrm{tg}\gamma = \dfrac{|RP|}{|OR|}$ **d)** $\mathrm{tg}\delta = \dfrac{|ZY|}{|XY|}$.

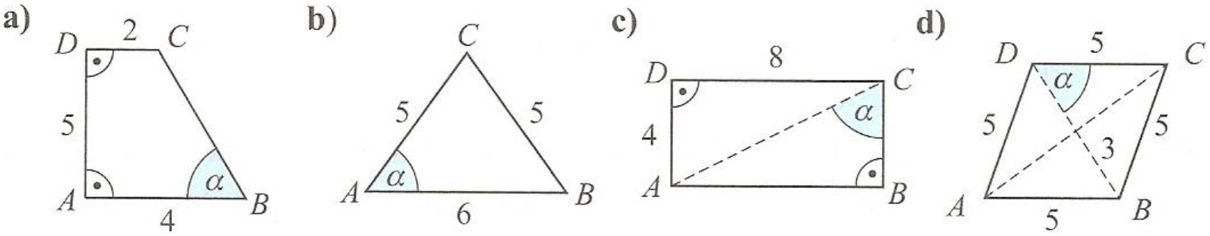


Zadanie 7. Oblicz wartości funkcji tangens dla kąta α

a) b)



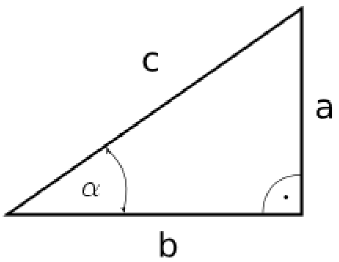
Zadanie 8. Uwzględniając dane przedstawione na rysunku, oblicz tangens kąta a.



Temat: SINUS I COSINUS KĄTA OSTREGO

Sinusem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej.

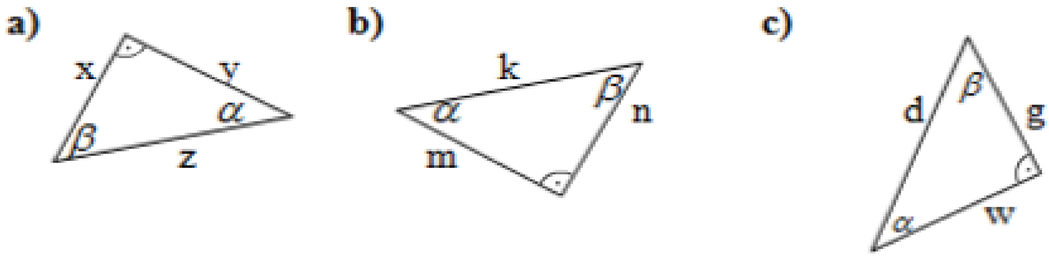
Cosinusem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie α do przeciwprostokątnej.



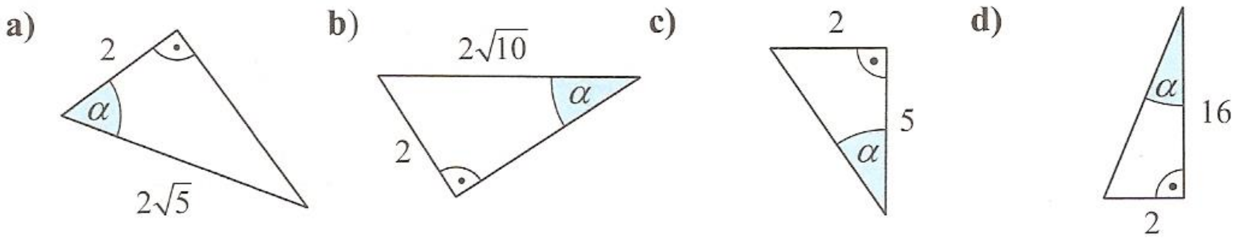
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

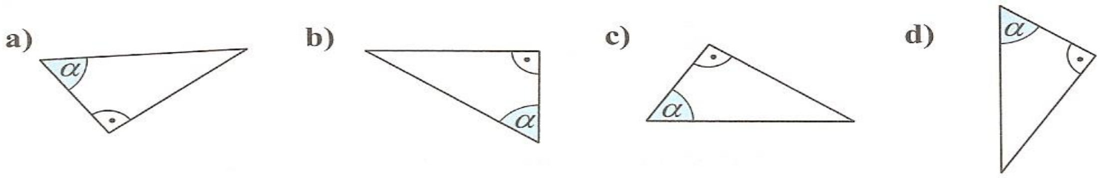
Zadanie 1. Wyznacz sinus i cosinus kąta α.



Zadanie 2. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta a następnie podaj sinus i cosinus kąta α.



Zadanie 3. Wierzchołki trójkąta prostokątnego oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem była prawdziwa.



$\sin\alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$ $\cos\alpha = \frac{|AB|}{|AC|}$ $\sin\alpha = \frac{|AB|}{|AC|}$ $\cos\alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$.

Zadanie 4. Oblicz sinus oraz cosinus każdego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|AB| = 3,\ |BC| = 4,\ |AC| = 5$.

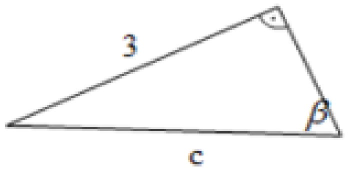
Zadanie 5. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest równa 8, a jedna z jego przyprostokątnych wynosi 5. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 6. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest równa 13 cm, a jedna z jego przyprostokątnych ma długość 12 cm. Oblicz cosinus każdego z kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 7. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AC jest trzy razy krótsza niż przeciwprostokątna AB. Oblicz $\sin(\sphericalangle ABC)$, $\cos(\sphericalangle ABC)$, $\mathrm{tg}(\sphericalangle ABC)$.

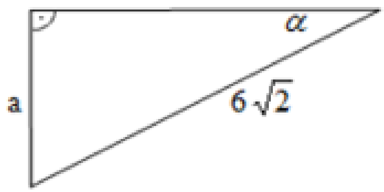
Zadanie 8. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

a)



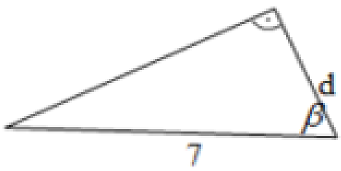
$\sin\beta = \frac{2}{3}$

b)



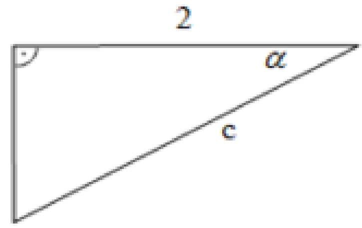
$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

c)



$\cos\beta = \frac{4}{5}$

d)



$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Temat: WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOEMETRYCZNYCH KĄTÓW

30 , 45 , 60 .

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Zadanie 1. Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $sin30^o - cos30^o \cdot tg30^o$

b) $2\sin 30^o + \frac{\sqrt{3}}{tg60^o}$

c) $\frac{tg^2 30^o + cos^2 30^o}{3 - 2tg45^o}$

d) $\frac{2 - tg^2 60^o}{sin30^o cos60^o}$

Zadanie 2. Oblicz wartość x z proporcji:

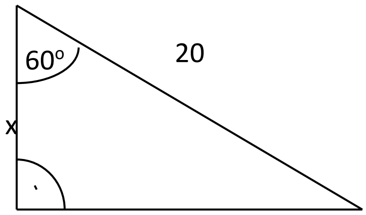
a) $\frac{x}{tg60^o} = \frac{cos30^o}{2sin30^o}$,

b) $\frac{x}{tg60^o} = \frac{cos60^o}{sin45^o}$,

c) $\frac{5tg45^o}{\sqrt{2}x} = \frac{sin45^o}{cos45^o}$,

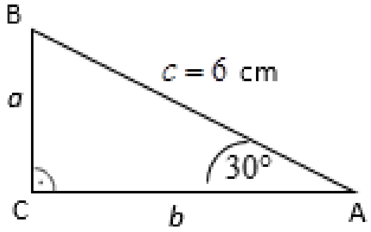
d) $\frac{cos30^o}{sin30^o} = \frac{\sqrt{3}x}{2tg60^o}$,

Zadanie 3. Korzystając z danych na rysunku oblicz długość boku x.



$$\frac{x}{20} = \cos 60 \quad i \quad \cos 60 = \frac{1}{2}$$

Zadanie 4. Korzystając z danych na rysunku wyznacz długości boków a i b.

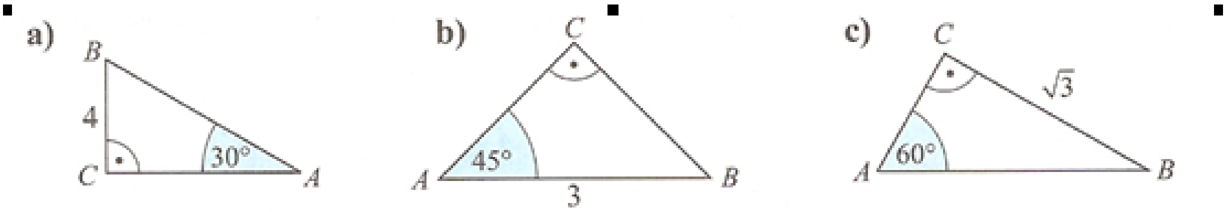


Zadanie 5. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , a krótsza przyprostokątna ma długość a. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, jeśli:

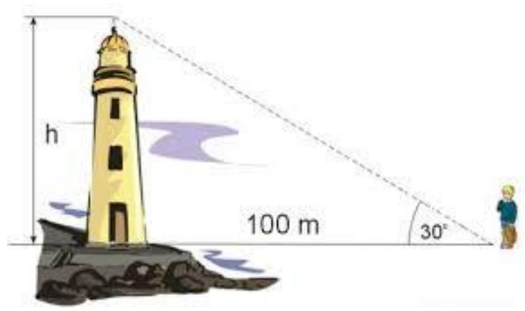
a) α = 30⁰, a = 4 dm

b) α = 60⁰, a = $2\sqrt{3}$ cm.

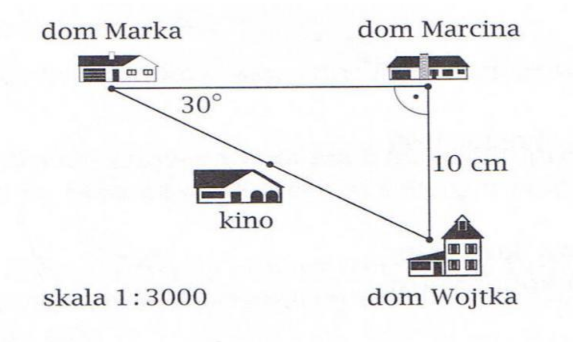
Zadanie 6. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz obwód trójkąta ABC.



Zadanie 7. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz wysokość *h* latarni morskiej.



Zadanie 8. Korzystając z informacji zamieszczonych na rysunku poniżej oblicz odległość między domami Marka i Marcina. Wiedząc, że kino znajduje się w połowie drogi między domem Marka i Wojtka oblicz jak daleko obaj chłopcy mają do kina.



Zadanie 9. Kąt padania promieni słonecznych jest równy 60°. Oblicz wysokość drzewa, którego cień ma długość 3 m z dokładnością do 0,1.

Zadanie 10 Wojtek, leżąc na polanie, widzi wierzchołek drzewa pod kątem 45° w stosunku do poziomu. Drzewo ma wysokość 16 m. W jakiej odległości od drzewa znajduje się Wojtek?

Temat: ODCZYTYWANIE WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH Z TABLIC

Zadanie 1. Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

a) $\sin 63^o$ b) $\cos 12^o$ c) $tg\ 54^0$ d) $\sin 37^o$

e) $\cos 49^o$ f) $tg 25^0$ g) $\sin 42^o$ h) $\cos 15^o$

i) $tg 64^0$ j) $\sin 12^o$ k) $\cos 78^o$ l) $tg 55^0$

m) $\sin 8^o$ n) $\cos 11^o$ o) $tg 23^0$ p) $\cos\ 76^0$.

Zadanie 2. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych podaj miarę kąta α wiedząc, że:

a) $sin\ \alpha = 0{,}5736$ b) $tg\alpha = 1{,}6003$ c) $cos\ \alpha = 0{,}8910$

d) $cos\ \alpha = 0{,}9903$, e) $sin\alpha = \frac{1}{4}$ f) $tg\alpha = 3{,}2709$

g) $tg\alpha = 0{,}4$ h) $\sin\alpha = 0{,}9$ i) $cos\alpha = \frac{1}{10}$

j) $sin\alpha = \frac{1}{7}$ k) $tg\alpha = 2\frac{4}{5}$ l) $cos\alpha = \frac{1}{3}$.

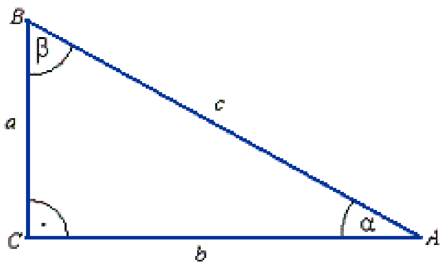
Zadanie 3. Z dokładnością do jednego stopnia podaj miarę takiego kąta ostrego α, dla którego $tg\alpha = 2\frac{1}{3}$.

Zadanie 4. Z dokładnością do jednego stopnia podaj miarę takiego kąta ostrego α, dla którego $cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Zadanie 5. Korzystając z tablic, znajdź przybliżone wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy:
a) $\sin\alpha = 0{,}91$ b) $tg\alpha = 0{,}55$ c) $\cos\alpha = 0{,}91$.

Zadanie 6. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 3 cm i 7 cm. Podaj z dokładnością do jednego stopnia miarę najmniejszego kąta tego trójkąta.

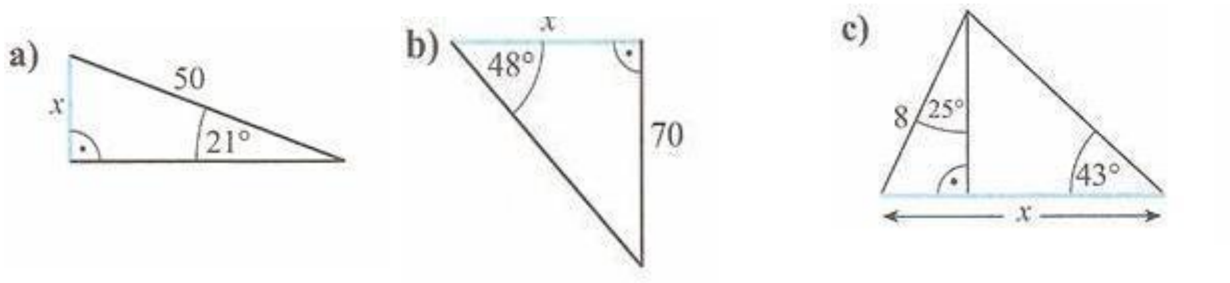
Zadanie 7. W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty (rysunek poniżej). Oblicz długość boków i miary kątów trójkąta, gdy:



a) $a = 4, b = 8$

b) $a = 5, b = 5\sqrt{2}$.

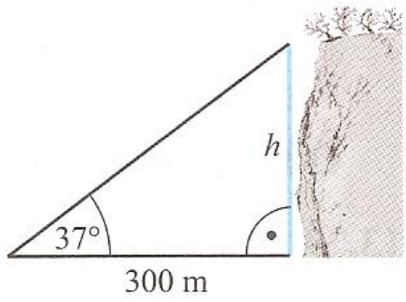
Zadanie 8. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz długość odcinka x. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.



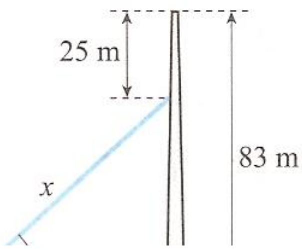
Temat: ZASTOSOWANIA TRYGONOMETRII

Zadanie 1. W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych mają długości:
a) 1cm i 3cm; b) 3cm i 5 cm; c) 7dm i 2,5dm; d) 5m i 4m.
Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta.

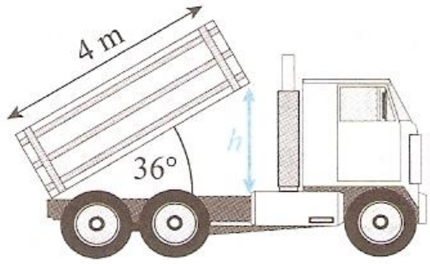
Zadanie 2. Uwzględniając dane przedstawione na rysunku obok, oblicz wysokość *h* klifu.



Zadanie 3. Wieża radiowa ma wysokość 83 m. Odciąg, zamocowany w odległości 25 m poniżej górnego końca wieży, tworzy z powierzchnią ziemi kąt 42° (rysunek obok). Oblicz długość x odciągu. Wynik zaokrąglij do 0,1 m.



Zadanie 4. Jak wysoko (h) będzie uniesiona przednia część podłogi skrzyni w wywrotce (rysunek obok), jeżeli skrzynia wywrotki ma długość 4 m i w chwili rozładunku podłoga skrzyni odchyla się o kąt 36°.



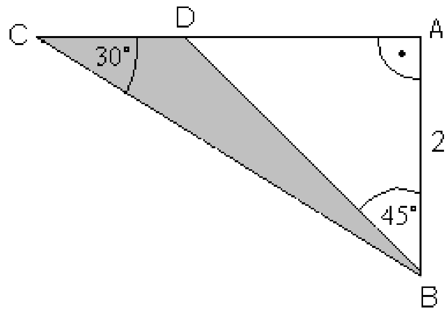
Zadanie 5. Górska droga wznosi się równomiernie pod kątem 15° do poziomu i od jej podnóża do szczytu (w linii prostej) jest około 5000 m. Jak wysoko ponad poziom wszedł turysta, idąc tą drogą? Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1 km.

Zadanie 6. Słupek mający wysokość 4m rzuca cień długości 6,9 m. Pod jakim kątem do powierzchni ziemi padają promienie słoneczne?

Zadanie 7. Wysokość trójkąta ABC opuszczona na bok AB ma długość 4 i tworzy z bokiem BC kąt o mierze 45°oraz z bokiem AC kąt o mierze 60°. Oblicz pole i obwód trójkąta ABC.

Zadanie 8. Oblicz pole i obwód trapezu prostokątnego, którego podstawy mają długość 18 cm i 12 cm, a kąt rozwarty ma miarę 120°

Zadanie 9. Oblicz pole zacieniowanej figury.



Zadanie 10. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe 50√2. Oblicz wysokość tego rombu.

Zadanie 11. Krótsza przekątna równoległoboku ma długość 6 i tworzy z bokami równoległoboku kąty o miarach 60° i 90°. Oblicz pole i obwód równoległoboku.

Zadanie 12. Dany jest trapez równoramienny o podstawach długości 8 i 12 oraz kącie ostrym 60°. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta między przekątną i podstawą trapezu.

Temat: ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą związki:

$sin^2 \propto +cos^2 \propto = 1$ (jedynka trygonometryczna)
$tg \propto = \frac{sin\propto}{cos\propto}, \ \ gdy \ \ cos \propto \neq 0$
$\sin\left(90^o - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(90^o - \alpha\right) = \sin\alpha$

Zadanie 1. Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $sin^2 13^o + cos^2 13^o$

b) $sin^2 17^o + sin^2 73^o$

c) $cos^2 1^o + sin^2 89^o$

d) $3 - \sqrt{3} sin^2 15^o - \sqrt{3} cos^2 15^o$

e) $\frac{sin 15^o}{cos 75^o} + \frac{cos 75^o}{sin 15^o}$

f) $cos^2 15^o + cos^2 30^o + cos^2 45^o + cos^2 60^o + cos^2 75^o$.

Zadanie 2. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , gdy:

a) $sin\alpha = \frac{12}{13}$ b) $tg\alpha = \frac{20}{21}$ c) $tg\alpha = 3$

d) $cos\alpha = 0{,}75$ e) $cos\alpha = \frac{9}{41}$ f) $tg\alpha = 1\frac{7}{8}$

g) $sin\alpha = \frac{1}{5}$, h) $sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$ i) $cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Zadanie 3. Wiedząc, że $tg\alpha = 5$ oblicz $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Zadanie 4. Kąt a jest ostry i $sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2tg^2\alpha$.

Zadanie 5. Wiedząc, że a jest kątem ostrym, takim, że $tg\alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia:

a) $sin^2\alpha - cos^2\alpha$, b) $sin\alpha \cdot tg\alpha + cos\alpha$,

c) $sin\alpha + cos\alpha$, d) $2sin\alpha \cdot cos\alpha$.

Zadanie 6. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Oblicz $\sqrt{tg^2\alpha + 1}$.

Zadanie 7. Kąt a jest ostry oraz $sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $sin^4\alpha + cos^4\alpha$.

Zadanie 8. Dla pewnego kąta ostrego α mamy $sin\alpha + cos\alpha = \sqrt{2}$. Oblicz wartość iloczynu $sin\alpha \cdot cos\alpha$.

Zadanie 9. Zbadaj, czy istnieje kat ostry α, taki że:

a) $sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

b) $sin\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ i $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

c) $sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $tg\alpha = \frac{1}{3}$

d) $cos\alpha = \frac{4}{5}$ i $tg\alpha = \frac{3}{4}$,

Zadanie 10. Wykaż, że dla każdego kąta ostrego a spełniona jest równość:

Wskazówka: należy wykazać, że lewa strona równości jest równa prawej (L=P)

Można to zrobić na dwa sposoby:

-przekształcając jedna ze stron (np. Lewą L), aż otrzymamy postać drugiej strony równości (P)

-osobno uprościć każdą ze ztron do takiej samej postaci.

a) $(1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha) = cos^2\alpha$

b) $\frac{sin^2\alpha}{1-cos\alpha} = 1 + cos\alpha$

c) $1 + tg\alpha = \frac{sin\alpha+cos\alpha}{cos\alpha}$

d) $\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} \cdot (tg^2\alpha - sin^2\alpha) = sin^2\alpha$

e) $\frac{sin\alpha}{1-cos^2\alpha} = \frac{1}{sin\alpha}$

f) $\frac{1-cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha$

g) $\left(tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}\right)^2 = \frac{1}{sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha}$

h) $(1-\sin\alpha)(1+tg\alpha\cdot\cos\alpha) = \sin^2(90 \;\; -\alpha)$.

Zadanie 11. Korzystając z tożsamości: $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeżeli $tg\alpha = 4$.

Temat: FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW OD 0° DO 180°.

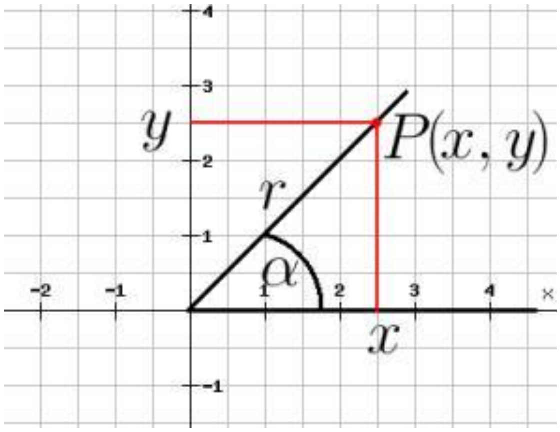
W celu określenia funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od 0° do 180° umieszcza się kąt w układzie współrzędnych w taki sposób, że:

• wierzchołek kąta pokrywa się z początkiem układu współrzędnych (punktem (0,0))

• jedno ramię, zwane **ramieniem początkowym** pokrywa się z dodatnią półosią x,

• drugie ramię, zwane **ramieniem końcowym**, w zależności od miary kąta, umieszcza się w I lub II ćwiartce albo na półosiach x lub y układu współrzędnych.

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych kąta umieszczonego w układzie współrzędnych, obieramy na ramieniu końcowym tego kąta dowolny punkt P, różny od 0 = (0,0), taki, że P = (x, y)



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$0 \leq \alpha \leq 180$$

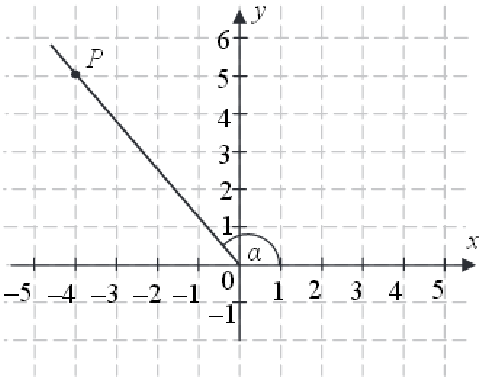
ZNAKI I WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH KĄTA α

	0°	I ćwiartka	90°	II ćwiartka	180°
sin x	0	+	1	+	0
cos x	1	+	0	—	-1
tg x	0	+	nie istnieje	—	0

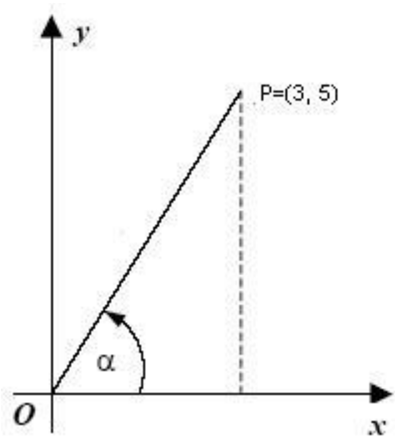
Jeśli kąt α jest kątem ostrym, to:

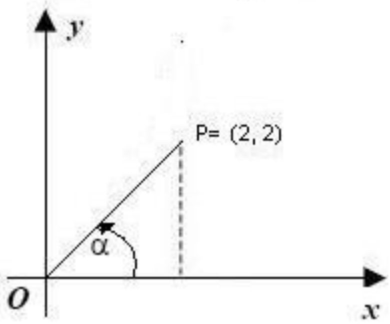
$\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad \cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad tg(180 - \alpha) = -tg\alpha$

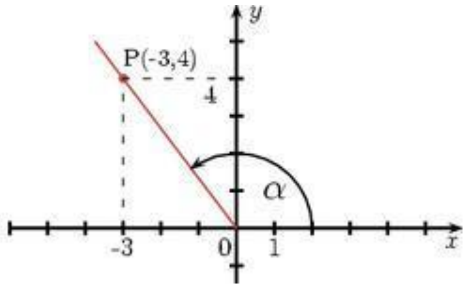
Zadanie 1. Punkt P = (-4,5) leży na ramieniu końcowym kąta α . Podaj wartości $x,\ y,\ r$ oraz funkcje trogonometryczne kąta α .



Zadanie 2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .







Zadanie 3. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta a, na którego ramieniu końcowym leży punkt P taki, że:

a) $P=(6,8)$ b) $P=(-\sqrt{5},2)$.

Zadanie 4. Narysuj końcowe ramię kąta α i zaznacz ten kąt, wiedząc, że:

a) $tg\alpha=-3$ b) $\cos\alpha=-0{,}8$ c) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$

Przykładowe rozwiązanie a)

Punkt P = (x, y) leży na końcowym ramieniu kąta α

$tg\alpha=-3$ więc $90 < \alpha < 180$. Zatem $x<0\ i\ y>0.$

Ponieważ $tg\alpha=\frac{y}{x}\quad i\quad tg\alpha=-3,$ więc $\frac{y}{x}=\frac{+3}{-1}=\frac{+6}{-2}=\ldots$

Przyjmujemy, np. $x=-1\ i\ y=3$, zaznaczamy ten punkt i rysujemy ramie końcowe kąta, przechodzące przez ten punkt

Zadanie 5. Oblicz:

a) $\sin120^{\circ}=\sin\ (180^{\circ}-60^{\circ})=$ b) $\sin135^{\circ}$

c) $\cos 120^{\circ}$

d) $\cos 160^{\circ}$

e) $tg\ 110^{\circ}$

f) $tg\ 135^{\circ}$.

Zadanie 6. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\dfrac{\sin(180^{\circ}-\alpha)}{\cos(180^{\circ}-\alpha)}$

b) $\sin(180^{\circ}-\alpha)+\sin\alpha$

c) $\cos\ (180^{\circ}-\alpha)+\cos\alpha$

d) $tg(180^{\circ}-\alpha)+tg\alpha$

Zadanie 7. Podaj miarę kąta a, gdy:

a) $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$

b) $\sin\alpha=0$

c) $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$

d) $tg\alpha=-\sqrt{3}$

e) $tg\alpha=-1$

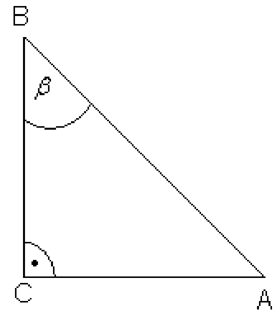
f) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Temat:POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

Sprawdź, czy już umiesz:

- ✓ zastosować definicje funkcji trygonometrycznych do podanych długości boków w trójkącie prostokątnym
- ✓ zapisać odpowiednią funkcję trygonometryczną kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, przy podanych dwóch bokach
- ✓ policzyć długość jednego z boków trójkąta prostokątnego, jeżeli podana jest wartość funkcji trygonometrycznej i jeden z boków
- ✓ odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych podanych kątów
- ✓ odczytać miarę kąta, jeżeli podana jest wartość jego funkcji trygonometrycznej
- ✓ policzyć pozostałe funkcje trygonometryczne kąta, jeżeli podana jest jedna z funkcji
- ✓ podać funkcje trygonometryczne kąta rozwartego, jeżeli podany jest punkt z ramienia końcowego kąta
- ✓ stosować definicje funkcji trygonometrycznych, twierdzenie Pitagorasa do rozwiązywania zadań

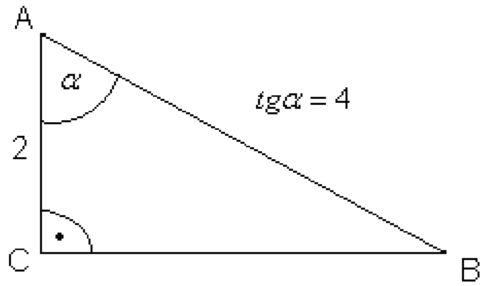
Zadanie 1. Dane są długości boków |BC| = 5 i |AC| = 3 trójkąta prostokątnego ABC o kącie ostrym β . Wtedy:



A. $\sin\beta = \frac{3}{5}$ B. $\sin\beta = \frac{4}{5}$

C. $\sin\beta = \frac{3\sqrt{34}}{34}$ D. $\sin\beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}$.

Zadanie 2. Posługując się rysunkiem i podaną wartością funkcji trygonometrycznej wskaż długość przeciwprostokątnej trójkąta ABC:



A. $\sqrt{17}$ B. $2\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{17}$ D. 2

Zadanie 3. Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości 12 i 5. Cosinus najmniejszego kąta w tym trójkącie jest równy:

A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\frac{12}{13}$ D. $\frac{13}{12}$

Zadanie 4. Liczba $sin^2 20° + cos^2 20°$ jest:

A. Niewymierna B. równa 1 C. mniejsza od 0,9 D. większa od 1

Zadanie 5. Liczba tg30° - sin30° jest równa:

A.$\sqrt{3} - 1$, B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{6}$, D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

Zadanie 6. Wartość wyrażenia $sin^2 30^\circ + cos^2 60^\circ - tg^2 45^\circ$ jest równa:

A.1 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $-\frac{3}{4}$

Zadanie 7. Drabina nachylona jest do podłoża pod kątem 60° i oddalona od ściany o 6dm. Jaka jest długość drabiny?

A.$4\sqrt{3}dm$ B. 12dm C. $6\sqrt{3}dm$ D. 6dm

Zadanie 8. W trójkącie prostokątnym najdłuższy bok ma 10, a najmniejszy kąt ma miarę 40°. Długość średniego boku najdokładniej określa liczba:

A.6,4 B. 6,5 C. 7,6 D. 7,7

Zadanie 9. Z dokładnością do jednego stopnia podaj miarę takiego kąta ostrego $\propto$, dla którego $cos \propto = \frac{2}{3}$

A.$\propto = 41^\circ$ B. $\propto = 42^\circ$ C. $\propto = 48^\circ$ D. $\propto = 49^\circ$

Zadanie 10. Kąt α jest ostry i cosα = $\frac{2}{5}$. Wówczas:

A. sinα = $\frac{21}{25}$ B. sinα < $\frac{\sqrt{21}}{5}$ C. sinα = $\frac{\sqrt{21}}{5}$ D. sinα = $\frac{\sqrt{21}}{25}$

Zadanie 11. Wyrażanie 1 + tg$^2\alpha$ można zapisać w postaci:

A. $\frac{1}{\cos\alpha}$ B. $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ C. $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ D. $\frac{1}{\sin\alpha}$

Zadanie 12. Wyrażenie $cos \propto \cdot tg \propto$ jest równe:

A.$sin \propto$ B. $cos \propto$ C. $\frac{sin\propto}{cos\propto}$ D. $\frac{cos\propto}{sin\propto}$

Zadanie 13. Która z podanych liczb jest największa?

A. $\sin 30$ B. $\sin 20$, C. $tg45$ D. $\cos 75$.

Zadanie 14. Czy istnieje kąt ostry $\propto$ taki, że: $sin \propto = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $tg \propto = \frac{2}{3}$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 15. W trójkącie prostokątnym długość krótszej przyprostokątnej jest równa 10, a sinus kąta leżącego naprzeciwko tej przyprostokątnej jest równy $\frac{5}{13}$. Wyznacz długość pozostałych boków trójkąta.

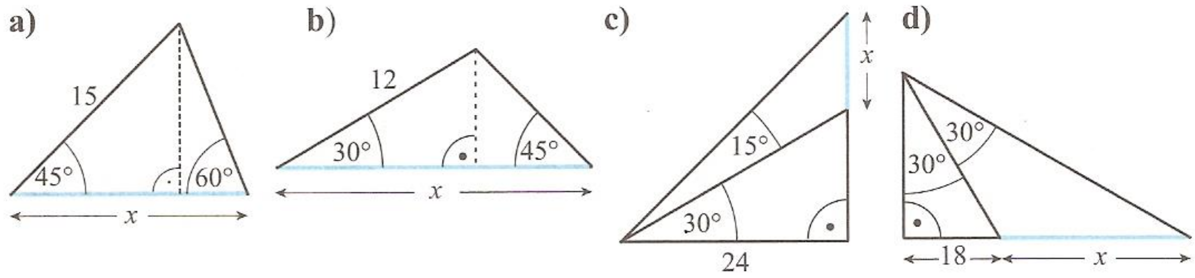
Zadanie 16. W trójkącie równoramiennym długość ramienia wynosi 13, długość podstawy 10. Oblicz $\cos\alpha$

Zadanie 17. Samolot startuje z lotniska pod kątem 30° do poziomu. Na jakiej wysokości znajdzie się ten samolot po przebyciu 3 km w linii prostej?

Zadanie 18. Kąt α jest ostry i sinα = $\frac{1}{3}$. Oblicz 2-3$tg^2\alpha$.

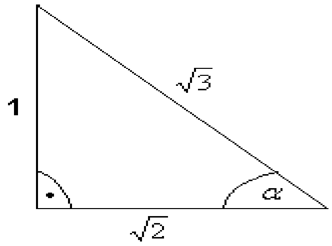
Zadanie 19. Wykaż, że dla kąta ostrego α prawdziwa jest tożsamość cosα - $\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha$.

Zadanie 20. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz długość odcinka x.



ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Dany jest trójkąt prostokątny (zobacz rysunek). Wtedy tg α jest równy:



A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

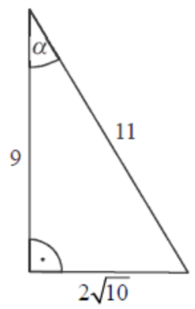
Zadanie 2. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 8, a przeciwprostokątna 10. Tangens jednego z kątów ostrych jest równy:

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

Zadanie 3. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest dwukrotnie dłuższa od drugiej. Tangens kąta o najmniejszej mierze w tym trójkącie jest równy:

A. 2 B. 0,5 C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Zadanie 4. Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego. Wtedy:



A. $cos\alpha = \frac{9}{11}$ B. $sin\alpha = \frac{9}{11}$ C. $sin\alpha = \frac{11}{2\sqrt{10}}$ D. $cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

Zadanie 5. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 i 9. Sinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy:

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{30}$

Zadanie 6. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 i 6. Sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy:

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

Zadanie 7. W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:

A.. $\frac{\sqrt{17}}{17}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ D. $\frac{1}{17}$

Zadanie 8. Liczba tg 60° – cos 60° jest równa:

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

Zadanie 9. Liczba $tg45^o - sin45^o$ jest równa:

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ C. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 10. Liczba cos 30° – sin 30° jest równa:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 11. Liczba sin60° + cos60° jest równa:

A. 1 B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

Zadanie 12. Jeśli $\alpha = 45$, to:

A. tg α > sin α B. tg α < sin α C. tg α = sin α , D. sin α > cos α .

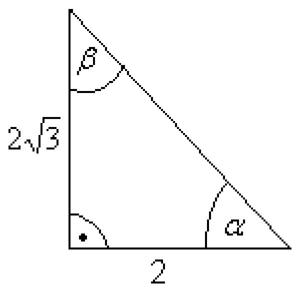
Zadanie 13. Kąt a jest ostry i tga = 1. Wówczas:

A. $\alpha < 30$ B. $\alpha = 30$ C. $\alpha = 45$ D. $\alpha > 60$

Zadanie 14. Kąt a jest ostry i sin a = cos a. Wówczas:

A. $\alpha = 30$ B. $\alpha = 60$ C. $\alpha = 45$ D. $\alpha = 90$

Zadanie 15. Wskaż poprawną odpowiedź dotyczącą kątów przedstawionego na rysunku trójkąta prostokątnego.



A. $\alpha = 30$ B. $\beta = 30$ C. $\alpha = 45$ D. $\beta = 60$

Zadanie 16. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 30 . Przyprostokątne w tym trójkącie są w stosunku:

A. 1 : $\sqrt{3}$ B. 2 : 3 C. 1 : 2 D. 2 : $\sqrt{3}$.

Zadanie 17. Kąty ostre trójkąta prostokątnego mają miary 30 i 60 . Przeciwprostokątna trójkąta ma długość 8. Bok, który leży naprzeciw kąta 60 ma długość:

A. $4\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 4 D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 18. Kąt a jest ostry i $sin\alpha > \frac{4}{5}$. Wówczas:

A. $cos\alpha > \frac{4}{5}$ B. $cos\alpha < \frac{4}{5}$ C. $cos\alpha > \frac{3}{5}$ D. $cos\alpha < \frac{3}{5}$.

Zadanie 19. Kąt α jest ostry i cos α =0,9. Wówczas:

A. $\alpha < 30$ B. α =30 C. α = 45 D. α > 45 .

Zadanie 20. Kąt α jest ostry i sin α = $\frac{3}{4}$. Wówczas:

A. $\alpha < 30$ B. α =30 C. α = 45 D. α > 45

Zadanie 21. Kąt a jest ostry i sina = 0,8. Wówczas:

A. $\alpha < 30$ B. α =30 C. α = 45 D. α > 45

Zadanie 22. Kąt a jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego oraz $sin\alpha = cos32^o$. Miara kąta a jest równa:

A.58 B. 28 C. 48 D. 32

Zadanie 23. Wartość wyrażenia $2sin^2 18^o + sin^2 72^o + cos^2 18^o$ jest równa

A.0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 24. Kąt α jest ostry i sinα = $\frac{1}{3}$. Wówczas tgα jest równy:

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{1}{2}$.

Zadanie 25. Kąt α jest ostry i sinα = $\frac{1}{4}$. Wówczas:

A. cos$\alpha < \frac{3}{4}$ B. cos$\alpha = \frac{3}{4}$ C. cos$\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$ D. cos$\alpha > \frac{\sqrt{13}}{4}$

Zadanie 26. Kąt a jest ostry i $sin\alpha = \frac{2}{3}$. Wtedy $cos\alpha$ jest równy:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{13}}{3}$

Zadanie 27. Kąt a jest ostry i $sin\alpha = \frac{8}{17}$. Wtedy:

A. $cos\alpha = \frac{8}{15}$ B. $cos\alpha = \frac{15}{8}$ C. $tg\alpha = \frac{8}{15}$ D. $tg\alpha = \frac{8}{17}$

Zadanie 28. Kąt *a* jest ostry i $cos\alpha = \frac{3}{4}$. Wtedy sin *a* jest równy:

A.$\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{7}{16}$

Zadanie 29. Kąt *a* jest ostry i sin *a* = 0,6. Wówczas:

A.$cos\alpha = 0{,}8$ i $tg\alpha = 0{,}4$ C. $cos\alpha = 0{,}8$ i $tg\alpha = 0{,}75$

B.$cos\alpha = 0{,}4$ i $tg\alpha = 1{,}5$ D. $cos\alpha = 0{,}4$ i $tg\alpha = 0{,}75$

Zadanie 30. Wyrażenie $(sin15^o + cos15^o)^2$ można zapisać w postaci:

A. 1 C. $sin15^o \cdot cos15^o$

B. $1 + 2sin15^o \cdot cos15^o$ D. $sin30^o \cdot cos30^o$

Zadanie 31. Upraszczając wyrażenie $\frac{1}{tg\alpha} + \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}$ otrzymujemy:

A.. $\frac{1}{\cos\alpha + 1}$ B. $\frac{1}{\sin\alpha}$ C. $\frac{1}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$ D. $\frac{2tg\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Zadanie 32. Wyrażenie $\frac{1-sin^2\alpha}{cos\alpha}$ można zapisać w postaci:

A. $\sin\alpha$ B. $\cos\alpha$ C.1 D. $\frac{1}{\cos\alpha}$.

Zadanie 33. [CKE]

Jeżeli kąt *a* jest ostry i $tg\alpha = \frac{3}{4}$, to $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$ równa się:

A.-1 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{84}{25}$

Zadanie 34. [CKE]

Kąt *a* jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas:

A. $\cos\alpha < \frac{3}{4}$ B. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$ D. $\cos\alpha > \frac{\sqrt{13}}{4}$