Zbiór zadań z matematyki

Semestr 4LO

Wersja sierpień 2016

Wydruk luty 2019

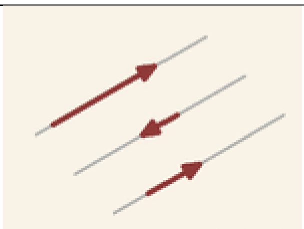
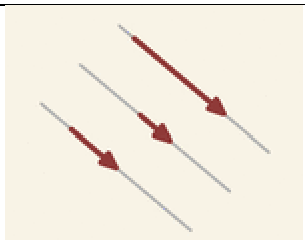
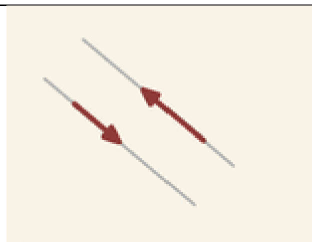
FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

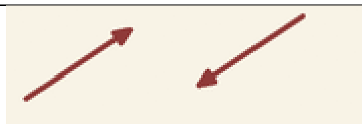
Wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej

• **Wektorem zaczepionym** (związanym) nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z tych punktów nazywamy początkiem wektora, a drugi punkt końcem wektora.

Wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$.

• **Wielkości charakteryzujące wektor:**
- kierunek wektora (zależy od prostej wyznaczonej przez ten wektor),
- zwrot wektora (zależy od strony na którą wektor wskazuje),
- długość wektora.

Wektory o takich samych kierunkach	**Wektory o takich samych kierunkach i zwrotach**	**Wektory o takich samych kierunkach ale przeciwnych zwrotach**
		

Dwa wektory są **równe**, gdy mają ten sam kierunek, zwrot i tę samą długość	
Wektory **przeciwne** to wektory o takiej samej długości i kierunku, ale przeciwnym zwrocie.	

• **Współrzędne wektora** $\overrightarrow{AB}$ **,** gdzie $A=(x_A, y_A) \quad i \quad B=(x_B, y_B)$

$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A]$

Współrzędne wektorów równych są równe, a współrzędne wektorów przeciwnych są liczbami przeciwnymi.

• **Wektorem swobodnym** wyznaczonym przez wektor $\overrightarrow{AB}$ nazywamy zbiór wszystkich wektorów równych wektorowi $\overrightarrow{AB}$.

Wektory swobodne oznaczamy zwykle małymi literami np. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \ldots$ i nazywamy **wektorem.**

Jeżeli $\overrightarrow{AB}=[p, q], \quad gdzie\ p=x_B-x_A \quad i \quad q=y_B-y_A \quad oraz \quad \vec{w}=\overrightarrow{AB}, to \quad \vec{w}=[p,q]$

• **Długość wektora**

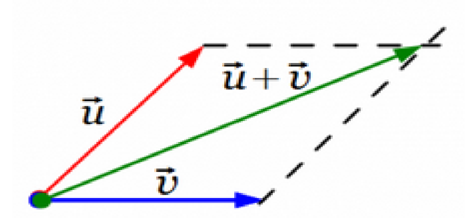
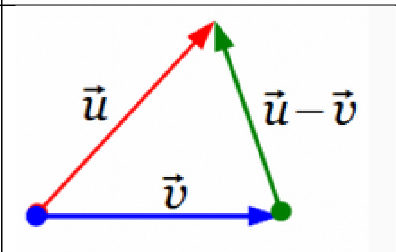
	Współrzędne wektora	**Długość wektora**
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A]$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$\vec{w}$	$\vec{w}=[p, q]$	$\lvert\vec{w}\rvert=\sqrt{p^2+q^2}$

• **Środek S wektora** $\overrightarrow{AB}$, gdzie A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B) ma współrzędne

$$x_S=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_S=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

• **Działania na wektorach**

Sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest wektor, którego początek pokrywa się z punktem zaczepienia obu wektorów, a koniec znajduje się na przecięciu dorysowanych przerywaną linią boków równoległoboku	
Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest wektor, który łączy końce tych wektorów.	

Jeżeli $\vec{u}=[a, b]$ i $\vec{v}=[c, d]$ to:

$\vec{u}+\vec{v}=[a+c, b+d]$, $\quad\vec{u}-\vec{v}=[a-c, b-d]$ i $k\cdot\vec{u}=[k\cdot a, k\cdot b]$

• Wektory $\vec{u}=[a, b]$ i $\vec{v}=[c, d]$ są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista *k* taka, że $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$

Jednokładność

Jednokładność o środku O i skali *k* ($k\neq 0$) przyporządkowuje każdemu punktowi P płaszczyzny taki punkt P', że $\overrightarrow{OP}=k\cdot\overrightarrow{OP'}$. Każda jednokładność jest podobieństwem o skali |*k*|.

Prosta na płaszczyźnie kartezjańskiej

•Równania prostej:

- równanie ogólne prostej
  Ax + By + C = 0, gdzie $A^2+B^2>0$ i $A, B, C\in R$
- równanie kierunkowe prostej
  y = ax + b, gdzie a – współczynnik kierunkowy prostej

• **Współczynnik kierunkowy prostej** przechodzącej przez dwa punkty A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B), gdzie $x_A\neq x_B$, określony jest wzorem $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

•Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B)

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A).$$

•Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie

Dwie proste leżące na płaszczyźnie nazywamy **równoległymi**, gdy pokrywają się lub nie mają punktów wspólnych.

Dwie proste przecinają się, jeżeli mają jeden punkt wspólny. Proste przecinające się pod kątem prostym są prostymi **prostopadłymi**.

Warunek równoległości prostych

Jeżeli proste k i l o równaniach $k: y=a_1x+b_1$ i $l: y=a_2x+b_2$ są równoległe, to $a_1=a_2$.

Warunek prostopadłości prostych
Jeżeli proste k i l o równaniach $k: y = a_1 x + b_1 \quad i \quad l: y = a_2 x + b_2$ są prostopadłe, to $a_1 \cdot a_2 = -1$.
• Odległość punktu od prostej
Odległość d punktu P, takiego, że P = (x_P, y_P) od prostej o równaniu Ax + By + C = 0, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, określona jest wzorem

$$d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

•Odległość punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej
Jeżeli A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B), to odległość punktów A i B określona jest wzorem

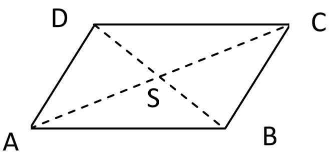
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

• Środek odcinka AB, gdzie S = (x_S, y_S), A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B), ma współrzędne

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

T: Pojęcie wektora

Zadanie 1. Każda para spośród punktów *A, B, C, D, S* (rysunek obok) określa pewien wektor. Wiedząc, że czworokąt *ABCD* jest równoległobokiem, wypisz wszystkie wektory:



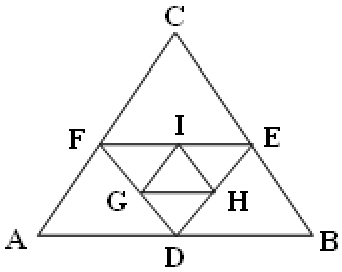
a) o tym samym kierunku co wektor $\overrightarrow{BD}$ ……………………………………………………………………

b) o tym samym zwrocie co wektor $\overrightarrow{SA}$……………………………………………………………………..

c) przeciwne do wektora $\overrightarrow{SD}$………………………………………………………………………………..

d) równe wektorowi $\overrightarrow{AD}$………………………………………………………………………………

Zadanie 2. W trójkąt równoboczny *ABC* (rysunek obok) wpisano, łącząc środki jego boków, trójkąt *EFD*, a w niego, łącząc środki boków trójkąta *EFD*, trójkąt *GHI*. Każda para spośród punktów *A, B, C, D, E, F, G, H, I* określa pewien wektor. Podaj:



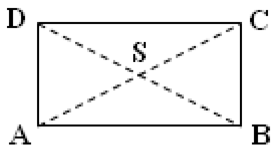
a) trzy wektory o tym samym kierunku co wektor $\overrightarrow{AB}$

…………………………………………………………………………………….

b) wszystkie wektory o tym samym zwrocie co wektor $\overrightarrow{AB}$

……………………………………………………………………………………..

Zadanie 3. Punkty *A, B, C, D* są kolejnymi wierzchołkami prostokąta, który nie jest kwadratem, a punkt *S* jest punktem przecięcia się jego przekątnych. Wypisz wszystkie wektory:



a) równe wektorowi $\overrightarrow{AB}$

……………………………………………………………..

b) przeciwne do wektora $\overrightarrow{AB}$,

……………………………………………………………..

c) mające tę samą długość co wektor $\overrightarrow{AC}$.

……………………………………………………………..

Zadanie 4. Zaznacz na płaszczyźnie trzy dowolne punkty *A*, *B*, *C*, nie leżące na jednej prostej, a następnie narysuj wektor:

a) równy wektorowi $\overrightarrow{AC}$, który jest zaczepiony w punkcie *B*,

b) przeciwny do wektora $\overrightarrow{AB}$, który jest zaczepiony w punkcie *C*,

c) równy wektorowi $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$, który jest zaczepiony w punkcie *C*,

d) równy wektorowi $-2 \cdot \overrightarrow{AC}$, który jest zaczepiony w punkcie B.

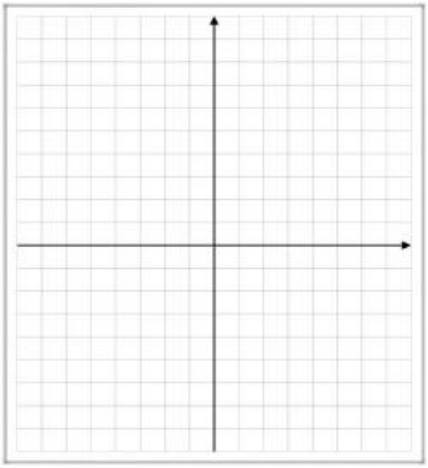
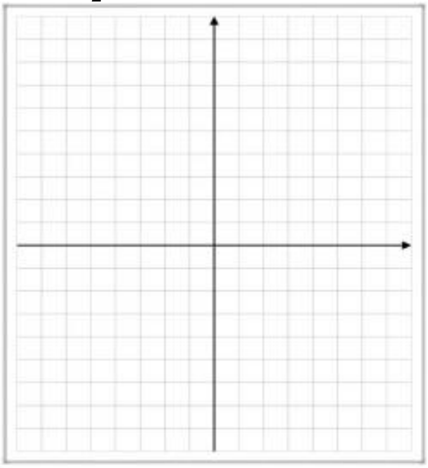
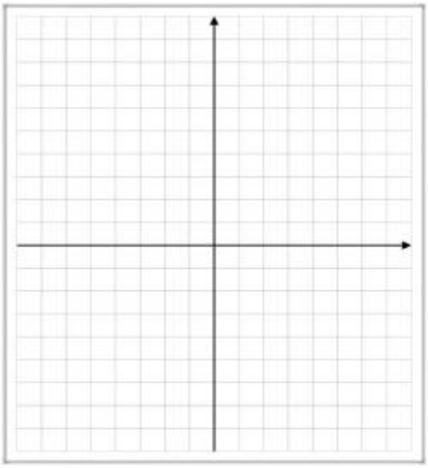
ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Jednokładność. Figury jednokładne a figury podobne.

Zadanie 1. Narysuj obraz punktu $P = (2,1)$ w jednokładności o środku $O = (0,0)$ i skali k.

a) $k = 3$, b) $k = \frac{1}{2}$, c) $k = -1$

Zadanie 2. Punkty: $A = (1,-1)$, $B = (3,-1)$, $C = (1,4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC. Narysuj obraz tego trójkąta w jednokładności o środku $D = (2,0)$ i skali k. Oblicz pole otrzymanego trójkąta

a) $k = 2$

b) $k = -1$

Zadanie 3. Narysuj dowolny trójkąt *ABC* i w jego wnętrzu obierz dowolny punkt *P*. Narysuj obraz trójkąta *ABC* w jednokładności o środku w punkcie *P* i skali $k = \frac{1}{3}$.

Zadanie 4. Boki trójkąta mają długości: 2, 3, 4. Czy obrazem tego trójkąta w pewnej jednokładności może być trójkąt o bokach długości:

a) 4, 6, 8　　　b) 1, 2, 2　　　c) $1, \frac{3}{2}, 2$　　　d) 6, 9, 12?

…………………　　…………………..　　………………　　………………….

Zadanie 5. Punkt *B* jest obrazem punktu *A* w jednokładności o środku w punkcie *O* i skali *k*. Oblicz skalę jednokładności *k*, gdy:
a) $|OA| = 3$ i $|AB| = 1$,　　　b) $|OA| = 5$ i $|AB| = 4$,

Zadanie 6. Podaj skalę jednokładności, która kwadrat o boku 2cm przekształca w kwadrat:
a) o obwodzie 32cm　　　b) o polu 1 cm^2

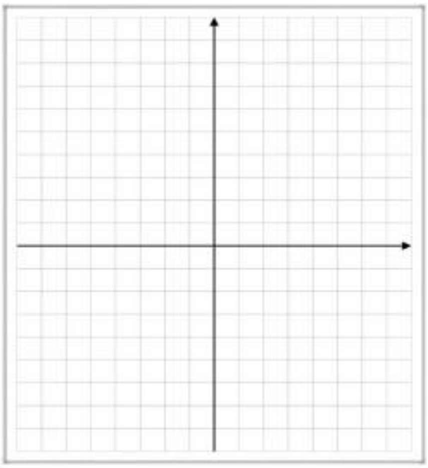
ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej

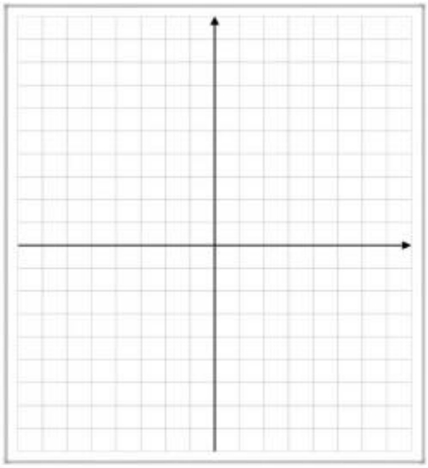
Zadanie 1. Podaj współrzędne wektora o początku w punkcie *A* i końcu w punkcie *B* oraz narysuj ten wektor w układzie współrzędnych.

a) A = (-2,1), B = (5,2)



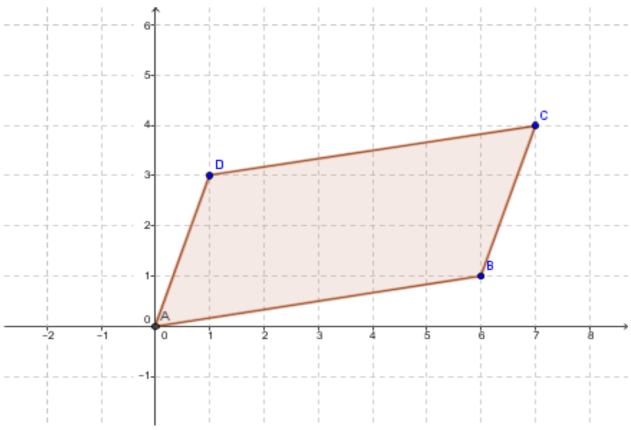
$\overrightarrow{AB} = [\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

b) A = (-3,-4), B = (-1,3)



$\overrightarrow{AB} = [\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Zadanie 2. Podaj współrzędne wektorów :



$\overrightarrow{AB} =$ ……………………………………………………

$\overrightarrow{AD} =$ ……………………………………………………

$\overrightarrow{AC} =$ ……………………………………………………

$\overrightarrow{DC} =$ ……………………………………………………

$\overrightarrow{BC} =$ ……………………………………………………

$\overrightarrow{BD} =$ ……………………………………………………

Zadanie 3. Oblicz współrzędne punktu *A*, gdy:

a) B = (-3,6), $\overrightarrow{AB} = [-2,5]$

b) B = (-2,2), $\overrightarrow{AB} = [-2,2]$

Zadanie 4. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{LM}$.
a) L = (3,2), M = (1,3)

b) L = (-3,-2), M = (3,-2)

Zadanie 5. Oblicz długość wektora $\vec{u}$

a) $\vec{u} = [2, -3]$

b) $\vec{u} = [-5, -12]$

Zadanie 6. Oblicz współrzędne środka *S* wektora $\overrightarrow{KL}$.

a) K = (-5,2), L = (1,-3)

b)K = (3,12), L = (-3,-5)

Zadanie 7. Oblicz współrzędne punktu *B*, jeżeli:

a) A = (4,2) oraz środek odcinka AB to S = (1,-1)

b) A = (-3,5) oraz środek odcinka AB to S = (0,0)

c) A = (2,7) oraz środek odcinka AB to S = (3,5).

ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Działania na wektorach na płaszczyźnie kartezjańskiej

Zadanie 1.Wyznacz $\vec{u}+\vec{v}$ oraz $\vec{u}-\vec{v}$

a) $\vec{u}=[1,2],\ \vec{v}=[3,\ 4]$

$\vec{u}+\vec{v}=$ ....

$\vec{u}-\vec{v}=$ ....

b) $\vec{u}=[4,-2],\ \vec{v}=[-4,\ 2]$

$\vec{u}+\vec{v}=$ ....

$\vec{u}-\vec{v}=$ ....

c) $\vec{u}=[-6,4],\ \vec{v}=[0,\ 3]$

$\vec{u}+\vec{v}=$ ....

$\vec{u}-\vec{v}=$ ....

Zadanie 2. Dane są wektory $\vec{u}=[3,-4],\ \vec{v}=[-6,\ 7],\ \vec{w}=[-2,-6]$. Oblicz:

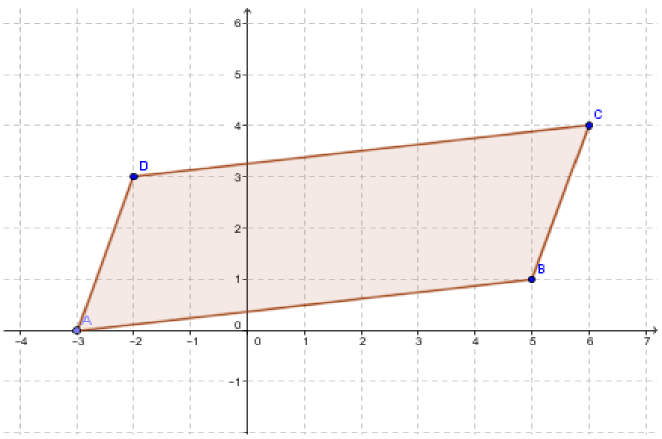
a) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=$ ....

b) $\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=$ ....

Zadanie 3. Dany jest wektor $\vec{u}=[-6,3]$. Wyznacz podany wektor.

a) $a)\ 2\vec{u}=$ .... $b)\ \frac{1}{3}\vec{u}=$ .... $c)\ -3\vec{u}=$ .... $d)\ -\frac{2}{3}\vec{u}=$ ....

Zadanie 4. Na rysunku przedstawiono równoległobok ABCD.



a) Podaj współrzędne wektorów:

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=$ ....

$\vec{v}=\overrightarrow{AD}=$ ....

b) Sprawdź, czy $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$

....

....

c) Sprawdź, czy $\overrightarrow{DB}=\vec{u}-\vec{v}$

....

....

Zadanie 5. Wykonaj działania na wektorach $\vec{v}=[2,4]$ $\vec{u}=[-12,-1]$

$\vec{u}+\vec{v}=$

$\vec{u}-\vec{v}=$

$3\vec{u}-4\vec{v}=$

$\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}=$

$-\vec{u}+7\vec{v}=$

Zadanie 6. Dane są wektory: $\vec{u}=[3,-4], \vec{v}=[-2,5], \vec{w}=[6,0]$. Znajdź wektor:

a) $2\cdot\vec{u}-3\ \cdot\vec{v}+\frac{1}{2}\ \overrightarrow{\cdot w}$

……

……

b) $3\cdot\vec{u}-\vec{v}+\frac{2}{3}\ \overrightarrow{\cdot w}$

……

……

c) $\vec{u}+2\ \cdot\vec{v}+3\ \overrightarrow{\cdot w}$.

……

……

ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Współczynnik kierunkowy prostej.

Zadanie 1. Przedstaw w postaci ogólnej równanie prostej

$$a)\ y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$b)\ y = 3x - 1$$

$$c)\ y = 3$$

Zadanie 2. Przedstaw w postaci kierunkowej prostą, odczytaj współczynnik kierunkowy prostej:

a) $x + 2y + 5 = 0$

b) $-3x - 2y + 5 = 0$

c) $2y + \sqrt{2} = 0$

$d)$ $4x - 12y = 18$

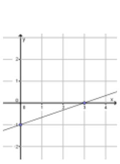
Zadanie 3. Napisz równanie prostej AB w postaci ogólnej i kierunkowej (o ile istnieje), gdy:

a) A = (3,-2), B = (-5,0)

b) A = (4,5), B = (-4,9)

c) A = (2,-7), B = (2,9)

Zadanie 4. Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Sprawdź (wykonując odpowiednie obliczenia) czy punkty A = (-10,-5), B = $(-3,\frac{8}{3})$ należą do tej prostej.



.

Zadanie 5.Wyznacz równanie ogólne prostej l, której współczynnik kierunkowy jest równy $2\sqrt{3}$,

wiedząc, że do prostej l należy punkt $P = (1, \sqrt{3})$.

Zadanie 6. Sprawdź, czy punkty A = (-2, -7), B = (1, -4) i C = (1000, 1005) są współliniowe.

ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zadanie 1. Podaj współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej k:

$a)\ k: y = -7x + 7$.................................... $b)\ k: y = \frac{5}{6}x + 1$...

$c)\ k: y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$.................................... $d)\ k: y = -\frac{7}{9}x - \frac{1}{9}$...

Zadanie 2.Wypełnij tabelę, wstawiając w każde pole jeden ze znaków:

|| - znak oznaczający proste równoległe;

⊥ - znak oznaczający proste prostopadłe

X - znak oznaczający proste przecinające się pod innym kątem niż kąt prosty.

	y=2x-3	y=-x+5	y=-2x+1	4x-2y-6=0	2x-y+7=0	2x-4y+6=0	y=2x-5
y=2x-3							
y=x+5							
y=-2x+1							
2x-4y-6=0							
2x-y+7=0							

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m proste k i l są równoległe.

a) $k: y = -4x + 6$ $\qquad l: y = (5 - m)x + 2$

$b)\ k: y = 3m^2x - \frac{2}{5}$ $\qquad l: y = -2x$

c) $k: y=(4-3m)x+2,\qquad l: x-3y+6=0$

Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru m proste k i l są prostopadłe.

$$a)\ k: y=\frac{3}{4}x-7,\ \ l: y=(m-1)x+5$$

$$b)\ k: y=4m^2x+\frac{1}{2},\ \ l: y=-9x-100$$

$$c)\ k: y=(m-2)x+3,\qquad l: y=(2+m)x+\frac{1}{3}$$

ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Równanie prostej równoległej i prostopadłej do danej.

Zadanie 1. Zapisz równanie prostej równoległej do prostej l i przechodzącej przez punkt P, gdy:
a) $l: y = 2x - 1, \quad P = (3,1)$

b) $l: y = -4x + 3, P = (-1,2)$

c) $l: 3x - y + 2 = 0, \quad P = (2, 3)$

d) y = 5, P = (0, -3)

e) x = -2, $P = (4, -\frac{1}{2})$

Zadanie 2. Zapisz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P, gdy:
a) $l: y = 4x - 5, \quad P = (0, 3)$

b) $l: y = -\frac{1}{4}x + 7, P = (-1,-1)$

c) $l: x + 2y + 2 = 0, \quad P = (-4,1)$

d) $l: y = 4, \quad P = (-3,5)$

e) $l: x = -5, \quad P = (2,-3)$

Zadanie 3. Podstawa AB trapezu ABCD zawiera się w prostej o równaniu y = -2x – 1. Wyznacz równanie prostej zawierającej podstawę CD, jeśli wiadomo, że $C = (-\frac{1}{2}, 4)$.

Zadanie 4. Dwa przeciwległe wierzchołki rombu ABCD mają współrzędne A = (-2, 3) i C = (6, -1). Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną BD tego rombu.

Zadanie 5. Punkty A=(1, 2), B = (13, 4) i C = (7, 10) są wierzchołkami trójkąta ABC. Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta poprowadzoną z:

a) wierzchołka A

b) wierzchołka B

Zadanie 6. Punkty A = (4, -3), B = (10, 6) są wierzchołkami prostokąta ABCD, a prosta $3x - 2y + 8 = 0$ zawiera bok CD. Wyznacz równanie prostej AD.

Zadanie 7. Punkty A = (-2, -2), B = (2, 1), C = (3, 5) i D = (-1, 2) są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka D równoległoboku.

ZADANIE DOMOWE☺

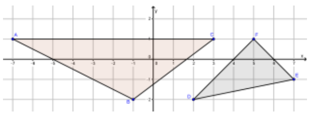
Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zadanie 1. Oblicz długość odcinka, którego końcami są punkty:
a) (3,6) i (2,4)

b)(2,3) i (-4,-1)

Zadanie 2.Oblicz obwody trójkątów ABC i DEF (rysunek poniżej).



Zadanie 3. Czy trójkąt o wierzchołkach A = (-2,-2), B = (1,2), C = (4,-2) jest trójkątem równobocznym?

Zadanie 4. Dany jest punkt P = (2, 7). Wyznacz na osi OX taki punkt R, aby jego odległość od punktu P wynosiła $\sqrt{74}$.

ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Środek odcinka i symetralna odcinka.

Zadanie 1. Wyznacz środek odcinka AB, gdy:

a) A = (-4, 2) i B = (0, 1) S_{AB} = ……………………………………………………………………

b) A = (3, 9) i B = (-5, -9) S_{AB} = ……………………………………………………………………

Zadanie 2. Środkiem odcinka AB jest punkt $S_{AB} = (5,-2)$. Wyznacz współrzędne punktu B, gdy:

a) A = (1, 8)

b) A = (-2, 5

c) A = (4,-2)

Zadanie 3. Dane są punkty A = (x,-2) i B = (7,y). Oblicz długość odcinka AB, jeśli jego środkiem jest punkt S = (2,1).

Zadanie 4. Dany jest punkt A = (-4,-3). Oblicz długość odcinka AB jeśli jego środek leży na osi *OX*, a odcięta punktu B jest równa 2.

Zadanie 5. Napisz równanie symetralnej odcinka AB, gdy:

a) A = (-2, -3) i B = (6, 5)

Rozwiązanie zadania podzielimy na trzy kroki:

1° Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B

2° Obliczamy S_{AB}.

3° Zapisujemy równanie prostej *k* prostopadłej do prostej *l* i przechodzącej przez punkt S_{AB}.

b) A = (2, -4) i B = (-4, 6)

c) A = (4, -5) i B = (4, 1)

d) A = (-1, 5) i B = (3, -3)

ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Odległość punktu od prostej.

Zadanie 1. Oblicz odległość punkt P od prostej *k*.

a) P = (-2, 4), *k*: 3x – 4y + 1 = 0

b) P = (-1, 0), *k*: 3x – 2y + 3 = 0

c) P = (4,2), *k*: y = 2x – 1

d) P = (5,-1), *k*: $y = -\frac{4}{3}x + 2$

Zadanie 2.Oblicz odległość punktu C = (-1,4) od prostej *l* przechodzącej przez punkty A = (-4,-2) i B = (5,4).

1° Zapisujemy równanie prostej *l*.

2° Obliczamy odległość punktu C od prostej

Zadanie 3. Oblicz odległość wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji $y = 2x^2 - 12x + 19$ od prostej o równaniu y = 2x - 6.

Zadanie 4. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty A = (1, -1), B = (-3, 4) i C = (3, 4).

a) Napisz równanie prostej AB.

b) Oblicz odległość wierzchołka C od prostej AB.

ZADANIE DOMOWE☺

Wykonaj zadania numer……………………………………………

T: Powtórzenie wiadomości – figury na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zadanie 1. Dany jest wektor $\overrightarrow{AB},\ gdzie\ A=(-2,3)\ i\ B=(4,2)$

a) Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$

…………………………………………………………………………………………………

b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$

…………………………………………………………………………………………………

c) Wyznacz środek wektora $\overrightarrow{AB}$

………………………………………………………………………………………………..

Zadanie 2. Oblicz współrzędne punktu *A* wektora $\overrightarrow{AB}$, gdy B = (3,-5) oraz $\overrightarrow{AB} = [7,-7]$.

Zadanie 3. Dane są wektory: $\vec{u} = [3,-4], \vec{v} = [-2,5], \vec{w} = [6,0]$. Znajdź wektor $-3\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w}$.

Zadanie 4. Dana jest prosta *k:* $2x-4y+6=0$. Wyznacz równanie prostej *l*, która:

a) jest prostopadła do prostej *k* i przechodzi przez punkt P = (-2, 1).

b) jest równoległa do prostej *k* i przechodzi przez punkt P = (4, 2).

Zadanie 5. Dane są punkty A = (3, -2) i B = (5, 4).

a) Wyznacz długość odcinka AB.

b) Wyznacz środek odcinka AB

c) Zapisz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B

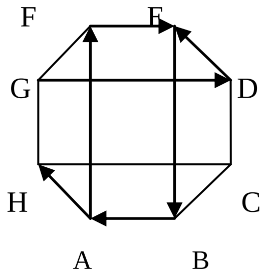
d) Zapisz równanie symetralnej odcinka AB.

Zadanie 6. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C mając dane $A = (1, 1)$, $B = (2, 6)$ i $C = (-4, 2)$.

BAZA ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Które z wektorów zaznaczonych w ośmiokącie foremnym są równe?



A. $\overrightarrow{EB}$ i $\overrightarrow{AF}$,

B. $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{FE}$,

C. $\overrightarrow{AH}$ i $\overrightarrow{DE}$,

D. $\overrightarrow{GD}$ i $\overrightarrow{AF}$.

Zadanie 2. Współrzędnymi wektora o początku $A = (-3,2)$ i końcu $B = (4,-6)$ są:

A.[-7,8] B. [7,8] C. [-7,-8] D. [7,-8].

Zadanie 3. Dane są punkty: A = (0,2), B = (3,0), C = (2,0) i D = (0,1). Długość wektora $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ wynosi:

A.$\sqrt{89}$ B. 9 C. $\sqrt{73}$ D. 9,4.

Zadanie 4. Współczynnikiem kierunkowym prostej o równaniu 3x – 2y + 2 = 0 jest liczba:

A. 3 B. -3 C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

Zadanie 5. Prosta o równaniu 2x – y + 3 = 0 jest nachylona do osi *OX* pod kątem α. Wtedy:

A. $\alpha \in (0^\circ, 30^\circ)$ B. $\alpha \in (45^\circ, 60^\circ)$

C. $\alpha \in (30^\circ, 45^\circ)$ D. $\alpha \in (60^\circ, 90^\circ)$.

Zadanie 6. Prosta o współczynniku kierunkowym $-\frac{1}{2}$, zawierająca punkt (-4, 1), ma równanie:

A. $y = -\frac{1}{2}x + 4$ B. $y = -\frac{1}{2}x - 4$ C. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ D. $y = -\frac{1}{2}x - 1$

Zadanie 7. Prosta *l* ma równanie ogólne x – 2y – 4 = 0. Wskaż równanie kierunkowe tej prostej:

A. $y = 1\frac{1}{2}x + 2$ B. $y = -1\frac{1}{2}x + 2$ C. $y = 1\frac{1}{2}x + 1$ D. $y = \frac{1}{2}x - 2$

Zadanie 8. Wskaż postać kierunkową prostej -4x + 8y – 6 = 0:

A. y = 0,5x + 0,75 B. y = 4x + 6 C. y = -0,5x – 6 D. y = -0,5x – 0,74

Zadanie 9. Do prostej *k* należą punkty *P* = (-1, 4) i *M* = (1, 2). Współczynnik kierunkowy prostej *k* jest równy:

A. -3 B. 3 C. -1 D. 1

Zadanie 10. Prosta, do której należą punkty (-6, -1) i (2, 3), ma równanie:

A. $y = \frac{1}{3}x + 1$ B. y = 2x – 4 C. $y = \frac{1}{2}x + 2$ D. $y = -\frac{1}{2}x - 4$

Zadanie 11. Proste o równaniach y = 2x + 3 oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$

A. są równoległe B. są prostopadłe

C. pokrywają się D. przecinają się pod innym kątem niż kąt prosty

Zadanie 12. Proste o równaniach x – 2y + 3 i 2x + y = 5:

A. są równoległe　　B. są prostopadłe

C. pokrywają się　　D. przecinają się w punkcie $P = (2, 2)$

Zadanie 13. Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{4}x + 7$. Wskaż równanie prostej równoległej do l:

A. $y = \frac{1}{4}x + 1$　　B. $y = -\frac{1}{4}x - 7$　　C. $y = 4x - 1$　　D. $y = -4x + 7$.

Zadanie 14. Prostą prostopadłą do prostej $x + 2y + 5 = 0$ jest:

A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$　　B. $x + y + 1 = 0$　　C. $y - 1 = 2x$　　D. $y = -5 - 2x$.

Zadanie 15. Przykładem równania prostej prostopadłej do prostej o równaniu $-x + 2y - 3 = 0$ jest:

A. $y = \frac{1}{2}x + 3$　　B. $y = -2x + 7$　　C. $y = -\frac{1}{2}x - 3$　　D. $y = 2x$.

Zadanie 16. Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{4}x + 2$ i przecinająca oś OY w punkcie (0, -1) ma równanie:

A. $y = -1\frac{1}{3}x - 1$　　B. $y = -\frac{3}{4}x - 1$　　C. $y = 1\frac{1}{3}x - 1$　　D. $y = \frac{3}{4}x - 1$.

Zadanie 17. Proste o równaniach $y = (m + 2)x$ i $y = (2m - 1)x - 2$ są równoległe, gdy:

A. m = 3　　B. m = 2　　C. m = 1　　D. m = 0

Zadanie 18. Proste $y = (2m + 1)x - 4$ i $y = x + 5$ są prostopadłe, gdy:

A. m = 2　　B. m = 1　　C. m = -1　　D. m = -2

Zadanie 19. Proste, w których zawierają się przekątne pewnego kwadratu mają postać:

A. 2x-y-1=0 i x-2y+5=0　　B. 2x-y-1=0 i 4x-2y-2=0

C. 2x-y-1=0 i –x+2y+4=0　　D. 2x-y-1=0 i x+2y-6=0

Zadanie 20. Dane są punkty A = (-2, 3) oraz B = (4, 6). Odległość między punktami A i B jest równa:

A. $\sqrt{208}$　　B. $\sqrt{52}$　　C. $\sqrt{45}$　　D. $\sqrt{40}$

Zadanie 21.Odległość między punktami K = (3, 5) i L = (-5, -1) jest równa:

A. 9　　B. 5　　C. 10　　D. 12

Zadanie 22.Odległość między punktami o współrzędnych A = (4, -7) oraz B = (-1, -19) wynosi:

A. 13　　B. 17　　C. $\sqrt{153}$　　D. $\sqrt{701}$

Zadanie 23.Odległość punktu o współrzędnych (3, 4) od początku układu współrzędnych wynosi:

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. nie można określić

Zadanie 24. Środek odcinka AB, gdzie A = (2, -5) i B = (-4, 1) to punkt:

A. (3, 3)　　B. (-3, -3)　　C. (-1, -2)　　D. (1, 2)

Zadanie 25.Punkt C = (-1, 2) jest środkiem odcinka AB, gdy:

A. A = (3, 2), B = (-5, -1)　　B. A = (-3, 2), B = (5, 2)

C. A = (3, -2), B = (-5, 6)　　D. A = (-3, 2), B = (5, -6)

Zadanie 26. Punkt (2, -3) jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że A = (-6, -5), wskaż punkt B:

A. (-2, -4)　　B. (10, -1)　　C. (-2, -11)　　D. (-14, -7)

Zadanie 27. Punkt P = (3, m – 2), gdzie $m \in R$, jest środkiem odcinka AB, gdzie A = (2, -1) i B = (4, 3). Zatem:

A. m = 3　　B. m = 1　　C. m = 0　　D. m = 6

Zadanie 28. Jeden z końców odcinka ma współrzędne (4, 1), zaś środek odcinka ma współrzędne (1, 2). Współrzędne drugiego końca odcinka są równe:

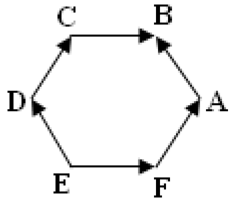
A. (3, -2) B. (7, 0) C. $(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ D. (-2, 3).

Zadanie 29. Równanie symetralnej odcinka o końcach P = (1, 2), Q = (3, -2) ma postać:
A. $x - y = 0$ B. $2x - y - 2 = 0$ C. $x - 2y - 2 = 0$ D. $x - y + 2 = 0$.

Zadanie 30.Wskaż równanie symetralnej odcinka mającego końce w punktach A = (4, -6), B = (-2, 6).
A. $y = -2x - 0,5$ C. $y = 0,5x - 0,5$
B. $y = -0,5x - 0,5$ D. $y = -2x + 2$

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1. Spośród wektorów zaznaczonych na sześciokącie foremnym obok wypisz pary wektorów:



a) równych, b) przeciwnych.

Zadanie 2. Znajdź obraz punktu *A* w jednokładności o środku *O* = (0,0) i skali *k*:
a) A = (-4,2), $k = 2$, c) A = (-1,-4), $k = -3$,
b) A = (6,-2), $k = \frac{1}{2}$, d) A = (9,-3), $k = -\frac{2}{3}$.

Zadanie 3. Narysuj dowolny czworokąt i jego obraz w jednokładności w jednym z jego wierzchołków i skali *k*, gdy:

a) $k = 2$, b) $k = \frac{1}{2}$, c) $k = -1$.

Zadanie 4. Narysuj w układzie współrzędnych wektor $\overrightarrow{MN}$ oraz podaj jego współrzędne.
a) M = (5,2), N = (1,3) b) M = (-3,2), N = (3,-2)
c) M = $(-\frac{1}{2}, 3)$, N = (6,-2) d) M = (0,0), N = (2,-2).

Zadanie 5. Oblicz współrzędne punktu *B*, gdy:
a) A = (-3,6), $\overrightarrow{AB} = [-2,5]$ b) A = (-2,2), $\overrightarrow{AB} = [2,-2]$
c) A = (-2,2), $\overrightarrow{AB} = [-2,2]$ d) A = (3,-5), $\overrightarrow{AB} = [7,-7]$.

Zadanie 6. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{LM}$.
a) L = $(-\frac{1}{4}, 3)$, M = $(\frac{3}{4}, -1)$ b) L = (0,0), M = (3,-4).

Zadanie 7. Oblicz długość wektora $\vec{u}$.
a) $\vec{u} = [2,1]$ b) $\vec{u} = [-3,4]$ c) $\vec{u} = [-5,-12]$ d) $\vec{u} = [3,3]$

Zadanie 8. Oblicz współrzędne środka *S* wektora $\overrightarrow{KL}$.
a) K = $(-\frac{1}{2}, 3)$, L = (6,-2)
b) K = (0,0), L = (3,-6)
c) K = (2,7), L = $(\sqrt{3}, -3)$.

Zadanie 9. Oblicz sumę wektorów $\vec{u} + \vec{v}$.
a) $\vec{u} = [3,-2]$, $\vec{v} = [2,6]$ c) $\vec{u} = \left[-5, -\frac{11}{2}\right]$, $\vec{v} = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
b) $\vec{u} = [1,-3]$, $\vec{v} = [5,2]$ d) $\vec{u} = [2,-3]$, $\vec{v} = [-6,9]$.

Zadanie 10. Oblicz różnicę wektorów $\vec{u} - \vec{v}$.
a) $\vec{u} = [3,-2]$, $\vec{v} = [-4,2]$, c) $\vec{u} = \left[-5, -\frac{11}{2}\right]$, $\vec{v} = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$,
b) $\vec{u} = [1,-3]$, $\vec{v} = [5,2]$, d) $\vec{u} = [2,-3]$, $\vec{v} = [-6,9]$.

Zadanie 11. Dany jest wektor $\vec{u} = [4,2]$. Wyznacz wektor:
a) $2\vec{u}$, b) $\frac{1}{2}\vec{u}$, c) $\frac{3}{2}\vec{u}$, d) $-3\vec{u}$.

Zadanie 12. Dane są wektory $\vec{u} = [2,-1]$, $\vec{v} = [-3,2]$. Wyznacz wektor:
a)$2\vec{u} + 3\vec{v}$, c) $3\vec{u} - \vec{v}$,

b) $-4\vec{u} + 2\vec{v}$, d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

Zadanie 13. Narysuj w układzie współrzędnych wektory: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$. Podaj współrzędne tych wektorów i sprawdź czy wektor $\overrightarrow{AC}$ jest sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$. gdy A = (-3,5), B = (2,4), C = (4,0).

Zadanie 14. Przedstaw w postaci ogólnej równanie prostej:

a) $y = \sqrt{3}x + 1$ b) $y = 1$ c) $x = 2$ d) y = 4x – 1

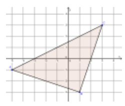
Zadanie 15. Podaj współczynnik kierunkowy prostej określonej równaniem:

a) $4x + 2y - 1 = 0$ b) $2x - 3\frac{1}{2}y + 4 = 0$ c) $(1 - \sqrt{2})x - (1 + \sqrt{2})y - 2 = 0$.

Zadanie 16. Napisz równanie prostej AB w postaci ogólnej i kierunkowej (o ile istnieje), gdy:

a) A = (4,-3), B = (-2,-1) b) A = (4,-13), B = (2,-7) c) A = (0,7), B = (-3,4)

Zadanie 17. Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta *ABC*. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki tego trójkąta.



Zadanie 18.Uzasadnij, że punkty *A* = (1,3), *B* = (3,7) i *C* = (1006,2013) leżą na jednej prostej.

Zadanie 19. Dla jakiej wartości parametru *p* proste o równaniach 3x – 4y + 5 = 0 i (2p+ 1)x – y + 3 = 0 są: a) równoległe, b) prostopadłe?

Zadanie 20. Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu 2x – y – 11 = 0 i przechodzącej przez punkt *P* = (1, 2).

Zadanie 21.Wyznacz równanie prostej *k* równoległej do prostej *l* i zawierającej punkt *P*, jeśli:

l: 5x – 2y + 3 = 0, *P* = (2, 3).

Zadanie 22. Napisz wzór prostej przecinającej oś *OY* w punkcie (0, -3) i prostopadłej do prostej y = 2x – 4.

Zadanie 23. Sprawdź czy trójkąt ABC jest równoramienny.

a) A = (1,3), B = (6,4), C = (4,-1) c) A = (-3,-3), B = (12,-3), C = (6,9)

b) A = (0,0), B = (4,-1), C = (3,3) d) A = (-1,0), B = $(2,\sqrt{3})$, C = $(2-\sqrt{3},\sqrt{3})$

Zadanie 24. Sprawdź czy trójkąt ABC jest prostokątny.

a) A = (-1,-1), B = (2, -1) i C = (-1,3)

b) A = (3,0), B = (-6, 8) i C = (-2,-2)

c) A = (-5,-1), B = (4,1) i C = (3,5) .

Zadanie 25. Który z punktów A = (4,2), B = (-3,3), C = (-1,-4), D = (5,0) jest położony najbliżej początku układu współrzędnych?

Zadanie 26. Oblicz długość boku i długość przekątnej kwadratu o wierzchołkach: A = (1,-2), B = (9,4), C = (3,12), D = (-5,6).

Zadanie 27. Dane są dwa punkty: A = (2,3) i B = (5,4). Przez początek układu współrzędnych poprowadź prostą przechodzącą w równych odległościach od obu punktów.

Zadanie 28. Oblicz odległość punktu K = (2,3) od środka odcinka AB, gdzie A = (-1,-4), B = (10,1).

Zadanie 29. Punkt A = (-3,2) i B = (5,0) są końcami odcinka. Wyznacz równanie symetralnej tego odcinka.

Zadanie 30. Punkt S = (-2,3) jest środkiem odcinka AB, gdzie B = (5,-7). Wyznacz współrzędne punktu A.

Zadanie 31.Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, jeżeli A = (-4, -6), B = (2, - 4).

Zadanie 32.Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, gdy A = (-2, 3) i B = (2, 1).

Zadanie 33. Napisz równanie symetralnej odcinka AB, gdy A= (1, 4) i B = (3, 2).

Zadanie 34. Oblicz odległości punktów: A = (0,3), B = (-1,0), C = (-1,3) od prostej *l*.

a) *l*: y – x = 1 b) *l*: 3x – y – 7 = 0 c) *l*: $y = -\frac{1}{2}x + 2{,}5$

Zadanie 35. Oblicz odległość punktów A i B od prostej *l*. Czy prosta AB jest równoległa do prostej *l* ?

a) A = (1,4), B = (5,5), *l*: $y = \frac{2}{3}x - 6$ b) A = (-4,-2), B = (2,6), *l*: $y = 1\frac{1}{3}x - 5$

Zadanie 36. Oblicz odległość punktu o współrzędnych (2,1) od prostej przechodzącej przez punkty (0,1) i (2,0).

FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ cz. II

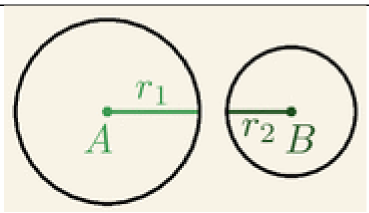
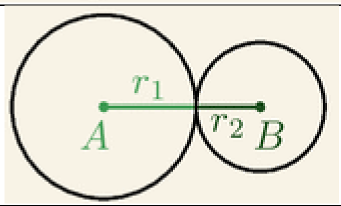
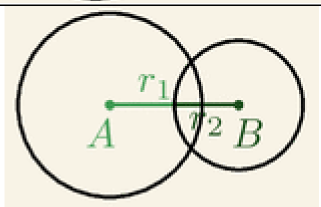
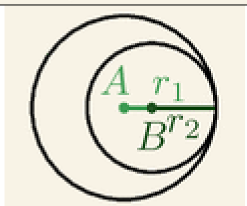
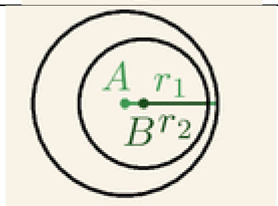
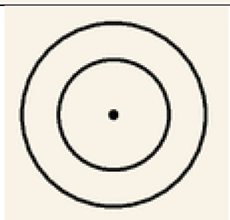
Okręgiem o środku S i promieniu r (r > 0) nazywamy zbiór punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r.

Równanie okręgu

Równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie S = (a, b) i promieniu r (r > 0). Jest to **postać kanoniczna równania okręgu**.

Równanie $x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \quad gdzie \quad c=a^2+b^2-r^2 \quad i \quad a^2+b^2-c>0$, to **postać ogólna równania okręgu** o środku S, takim, że S = (a, b) i promieniu r.

Wzajemne położenie dwóch okręgów

Wzajemne położenie dwóch okręgów	Ilustracja graficzna	warunek
Okręgi rozłączne zewnętrznie		$\|AB\| > r_1 + r_2$
Okręgi styczne zewnętrznie		$\|AB\| = r_1 + r_2$
Okręgi przecinające się		$\|r_1 - r_2\| < \|AB\| < r_1 + r_2$
Okręgi styczne wewnętrznie		$\|AB\| = \|r_1 - r_2\|$
Okręgi rozłączne wewnętrznie		$\|AB\| < \|r_1 - r_2\|$
Okręgi współśrodkowe		

Kołem o środku S i promieniu r (r > 0) nazywamy zbiór punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza lub równa r.

Koło o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu r opisuje **nierówność** $(x-a)^2+(y-b)^2 \le r^2$

Wzajemne położenie okręgu i prostej.

• **styczną do okręgu** nazywamy prostą, która ma z okręgiem jeden punkt wspólny
Odległość środka okręgu do punktu styczności jest równa promieniowi r . **Styczna do okręgu jest prostopadła do odcinka łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.**

• **Sieczną okręgu** nazywamy prostą, która ma dwa punkty wspólne z okręgiem. Odległość środka okręgu od siecznej jest mniejsza od promienia okręgu

• **zewnętrzną do okręgu** nazywamy prostą, która nie ma z nim punktów wspólnych.

Jeśli okrąg i prosta mają równania $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ i $Ax+By+C=0$ to aby określić wzajemne położenie prostej i okręgu obliczamy odległość d środka okręgu od prostej i porównujemy liczby d i r .

$$d=\frac{|A\cdot a+B\cdot b+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Trójkąty w układzie współrzędnych

Przypomnijmy:

• w każdym trójkącie można przeprowadzić **symetralne jego boków**, które przecinają się w jednym punkcie. Punkt przecięcia się symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

• w każdym trójkącie można poprowadzić trzy **środkowe**, które przecinają się w jednym punkcie S zwanym **środkiem ciężkości trójkąta**.

Jeżeli punkt $S=(x_s,y_s)$ jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, gdzie $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ i $C=(x_C,y_C)$, to $x_S=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$ i $y_S=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$

• w każdym trójkącie można poprowadzić trzy **wysokości**. Przecinają się w jednym punkcie zwanym **ortocentrum**.

Pole trójkąta ABC, gdzie $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ i $C=(x_C,y_C)$ określone jest wzorem

$$P=\frac{1}{2}\cdot|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)|.$$

T: Równanie okręgu.

Zadanie 1. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r

a) $S=(2,4)$ $r=4$

……………………………………..

b) $S=(-3,2)$ $r=5$

……………………………………..

c) $S=(0,-4)$ $r=\sqrt{5}$

……………………………………..

d) $S=(1,0)$ $r=\frac{1}{2}$

……………………………………..

e) $S=(0,0)$ $r=2\sqrt{3}$

……………………………………..

f) $S=(2,-4)$ $r=3\sqrt{2}$

……………………………………..

Zadanie 2. Wyznacz współrzędne środka okręgu i jego promień:

a) $(x+3)^2+(y-6)^2=8$ $\quad$ *środek* : $S=(-3,6)$, $\quad$ *promień* : $r=2\sqrt{2}$

b) $x^2 + (y-1)^2 = 3$ ……………………………………………

c) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 16$ ……………………………………………

d) $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 18$ ……………………………………………

e) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ ……………………………………………

f) $(x+\sqrt{3})^2 + (y+2)^2 = 5$ …………………………………………….

g) $x^2 + y^2 = 9$ …………………………………………….

Zadanie 3. Wyznacz współrzędne środka okręgu i jego promień:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

c) $x^2 + 3x + y^2 - 10y + 27 = 0$

d) $x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 + 2y - 7 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 28 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 25 = 0$

Zadanie 4. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie S = (1, 3) wiedząc, że punkt P = (-2, -1) należy do tego okręgu.

Zadanie 5. Wyznacz równanie okręgu o środku S = (3, -5) przechodzącego przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 6. Środek odcinka o końcach A = (5,-1) i B = (-7,-3) jest środkiem okręgu o promieniu r = 8. Napisz równanie tego okręgu.

Zadanie 7. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB, gdzie:

a) A = (1, 3) oraz B = (7, -3)

$$S = S_{AB} = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right) = (\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$

$r = |AS| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

równanie : ……………………………………………………

b) A = (-1,3) oraz B = (1,-1).

$S = S_{AB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$r = |AS| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

równanie : ………………………………………………………………

Zadanie 8. Znajdź współrzędne punktów przecięcia okręgu z osiami układu współrzędnych:

a) $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$

z osią y (x = 0)	z osią x (y = 0)
$y^2 - 3 = 0$	$x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

z osią y (x = 0)	z osią x (y = 0)

Zadanie 9. Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach:

a) $(x+3)^2 + y^2 = 25, \quad (x+4)^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 + (y-2)^2 = 47, \quad x^2 + (y+8)^2 = 9$

c) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 36, \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$

d) $(x+1)^2+(y+2)^2=9, \quad (x-1)^2+(y-3)^2=16$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T:Nierówność koła.

Zadanie 1. Przedstaw na płaszczyźnie kartezjańskiej figurę opisaną nierównością:

a) $x^2 + (y-2)^2 \leq 9$

b) $(x+3)^2 + (y-1)^2 < 4$

c) $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$

d) $(x+1)^2 + y^2 > 25$

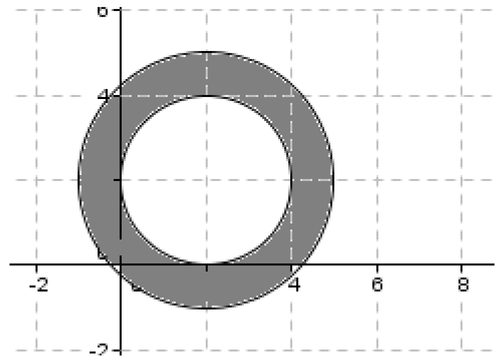
Zadanie 2. Narysuj w układzie współrzędnych figurę opisaną układem warunków:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \leq x \end{cases}$

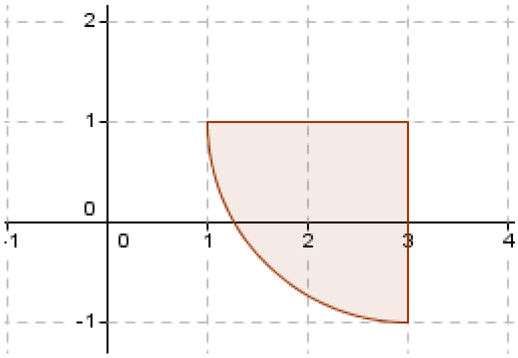
b) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$

Zadanie 3. Podaj warunki, jakie spełniają współrzędne punktów figury zacieniowanej na rysunku

a)



b)



ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Wzajemne położenie okręgu i prostej.

Zadanie 1. Oblicz odległość środka okręgu o równaniu $(x+1)^2+(y+2)^2=25$ od prostej $x+y-3=0$.

Uzasadnij, że ta prosta ma dwa punkty wspólne z podanym okręgiem.

Zadanie 2. Oblicz odległość środka okręgu o równaniu $(x-4)^2+(y-1)^2=25$ od prostej. Uzasadnij,

że ta prosta jest styczna do danego okręgu.

Zadanie 3. Określ wzajemne położenie okręgu i prostej o równaniach:

a) $4x-3y+2=0, \quad (x-1)^2+y^2=1$

b) $6x+8y-15=0, \quad (x-1)^2+(y+2)^2=9$

c) $x - y - 1 = 0, \quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$

d) $x - 2y + 5 = 0, \quad (x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$

Zadanie 4. Prosta *l* jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt A. Oblicz promień tego okręgu.

a) *l*: $y = \frac{1}{2}x + 4$, A = (-3,0)

b) *l*: 3x + 4y -5 = 0, A = (-4,-2)

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Trójkąty.

Zadanie 1. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 4)$, $B = (2, 2)$, $C = (-3, -8)$ jest prostokątny.

Zadanie 2. Boki trójkąta zawierają się w prostych $x + y - 1 = 0$, $y = -3$, $-2x + 2y - 1 = 0$. Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny.

Zadanie 3. Dane są wierzchołki trójkąta $A = (2, 2)$, $B = (7, 7)$, $C = (10, 3)$. Wyznacz długość wysokości trójkąta ABC opuszczonej z punktu C.

Zadanie 4. Punkty A = (1, 2), B = (-1, -1), C = (5, 2) są wierzchołkami trójkąta ABC. Napisz równanie prostej zawierającej:

a) środkową trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C.

b) wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A.

Zadanie 5. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych o równaniach:

$x - y + 3 = 0, \quad 3x - y - 7 = 0, \quad x + y - 1 = 0$. Oblicz:

a) Współrzędne wierzchołków trójkąta,

$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 3x - y - 7 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - y - 7 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

stąd A = ………… stąd B = …………. stąd C = …………………

b) obwód trójkąta

|AB| = ………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

|BC| = ……………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………

|AC| = ……………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………

$L_{\Delta ABC}$ = ………………………………………………………………………………………

c) pole trójkąta

P = …………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Zadanie 6. Wierzchołek C trójkąta ABC jest punktem przecięcia się prostych o równaniach $y = x + 2$ i $y = -2x + 14$, a wierzchołki A i B są punktami przecięcia się tych prostych z osią OX. Oblicz pole i obwód trójkąta ABC.

C = ? A = ? B = ?

|AB| = …………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

|BC | = ……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

|AC| = ……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

$L_{\Delta ABC}$ = ………………………………………………………………………………….

Zadanie 7. Dany jest trójkąt ABC ograniczony prostą $-4x + 2y + 1 = 0$ i osiami *OX* oraz *OY*.

a) Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

b) Oblicz jego pole.

Zadanie 8. Punkty A = (-2, 0), B = (2, -2) i C = (4, 6) są wierzchołkami trójkąta ABC.

a) Wyznacz równanie środkowej trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A.

b) Oblicz współrzędne środka ciężkości tego trójkąta.

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Czworokąty.

Zadanie 1. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku: A = (-4,-3) i B = (1,-2) oraz punkt przecięcia przekątnych S = (2,1). Wyznacz pozostałe wierzchołki równoległoboku.

Zadanie 2. Punkty A = (1,-2), B = (3,2), C = (0,4) są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku ABCD. Wyznacz współrzędne wierzchołka D.

Zadanie 3. Punkty A = (0, 6), B = (2, 0), C = (8, 2) są kolejnymi wierzchołkami kwadratu ABCD.

a) Oblicz współrzędne wierzchołka D.

b) Napisz równania prostych zawierających przekątne tego kwadratu.

Zadanie 4.W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty A = (2,5) i C = (6, 7) są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ABCD. Wyznacz równanie prostej BD.

Zadanie 5. Sprawdź, czy czworokąt ABCD, gdzie A = (-3, -1), B = (53, -2), C = (54, 4), D = (-2, 3) jest równoległobokiem. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. Dany jest kwadrat o kolejnych wierzchołkach A = (-4,2) i B = (6,-2). Wyznacz promień okręgu opisanego na tym kwadracie.

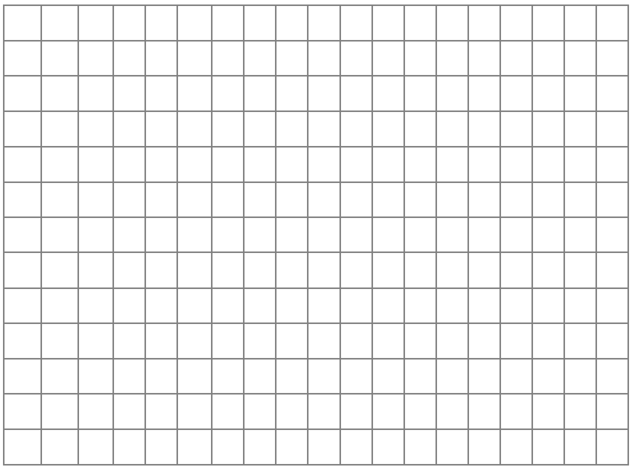
Zadanie 7. Dwa boki równoległoboku leżą na prostych $x - 3y + 6 = 0$ i $4x + 2y + 5 = 0$. Napisz równania prostych, na których leżą dwa pozostałe boki, wiedząc, że wierzchołkiem równoległoboku jest punkt A = (5,-1). Sporządź rysunek ilustrujący to zadanie.

Zadanie 8. Oblicz długość wysokości równoległoboku ABCD, gdy A = (-1, 1), B = (3, -2), C = (2, 3) i D = (-2,6).

Zadanie 9. Oblicz pole równoległoboku ABCD o wierzchołkach w punktach: A = (-4,2), B = (7,-1), C = (10,3), D = (-1,6).

T: Symetria osiowa na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zadanie 1. Podaj współrzędne punktów A’, B’, C’, D’ symetrycznych odpowiednio do punktów A, B, C i D względem osi OX oraz punktów A”, B”, C” i D” symetrycznych odpowiednio do punktów A, B, C i D względem osi OY. Zaznacz te punkty na rysunku.



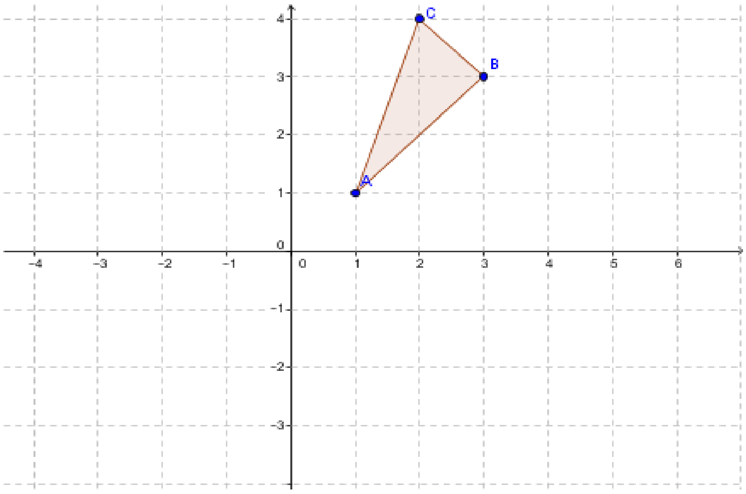
A = (1, 3) A’=……….. A”= …………

B = (-4, 1) B’ = ……… B” = ………...

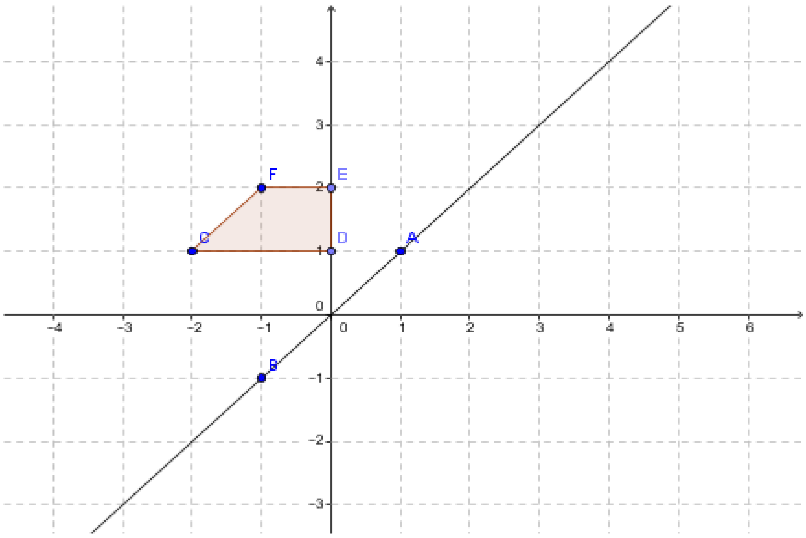
C = (-2, -5) C’ = ……… C” = ………...

D = (4, 0) D’ = ………… D” = …………

Zadanie 2. Narysuj figurę A’B’C’ symetryczną do danej względem osi OX oraz figurę A”B”C” symetryczną do danej względem osi OY.



Zadanie 3. Narysuj figurę symetryczną do danej względem prostej l.



Zadanie 4. Sprawdź czy okrąg o średnicy AB jest symetryczny do okręgu o średnicy CD względem osi *OX* lub osi *OY*, jeśli A = (0,5), B = (6,3), C = (-4,1), D = (-2,7)

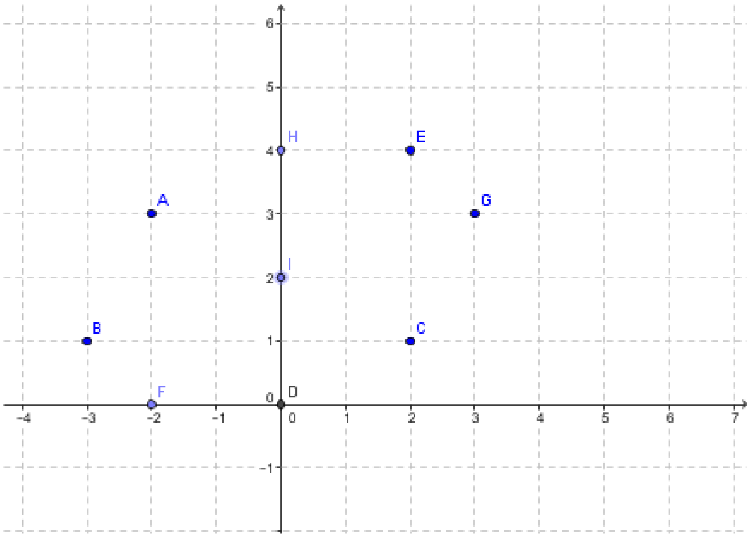
Zadanie 5. Dane są punkty A = (-2, -1), B = (2, -5), C = (8, 1), D = (4, 5). Oblicz pole części wspólnej prostokąta ABCD oraz jego obrazu w symetrii względem:
a) osi OX

b) osi OY

ZADANIE DOMOWE ☺
Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Symetria środkowa na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zadanie 1. Podaj punkty symetryczne do podanych punktów względem punktu I.



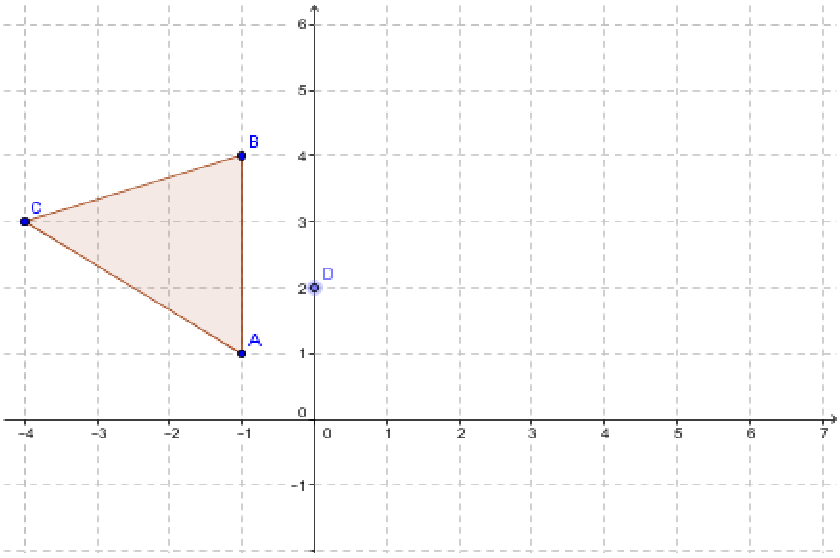
A - ....

B - ....

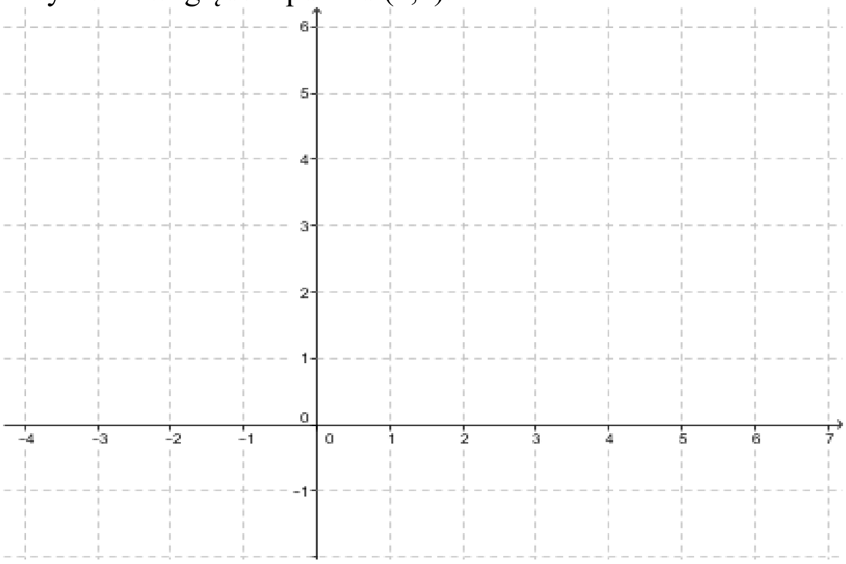
D - ....

E - ....

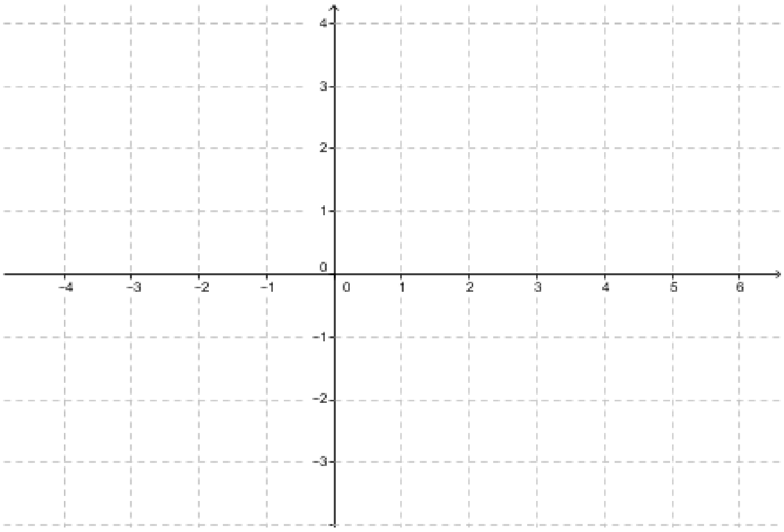
Zadanie 2. Narysuj obraz trójkąta ABC w symetrii względem punktu D



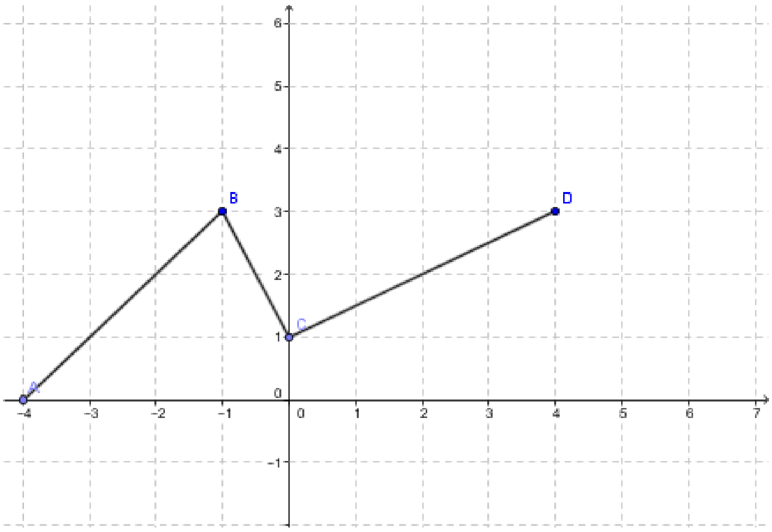
Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC, gdzie A = (1,1), B = (5,1), C = (2,2). Narysuj obraz tego trójkąta w symetrii względem punktu (3,3).



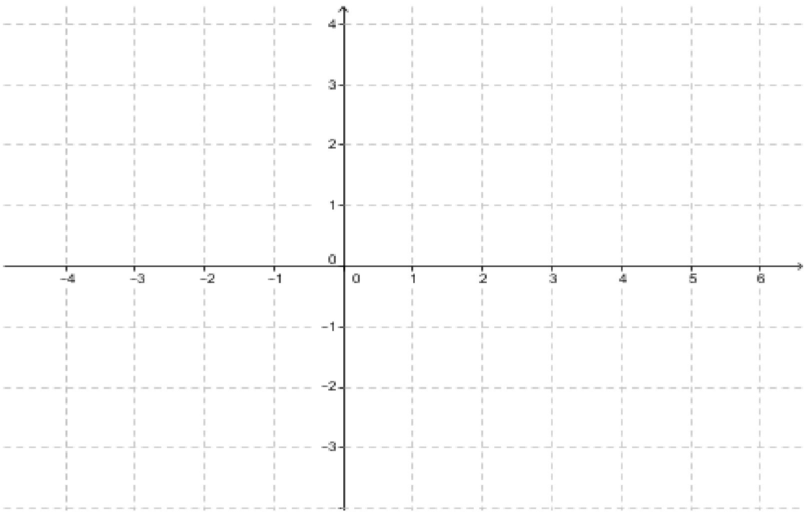
Zadanie 4. Prostokąty ABCD i A’B’C’D’ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów, jeśli A = (-2,1), B = (1,-2), C = (3,0), D = (0,3).



Zadanie 5. Narysuj obraz łamanej ABCD w symetrii względem początku układu współrzędnych.



Zadanie 6.Punkt A’ położony jest symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA’, jeśli A = (2,3).



T: Powtórzenie wiadomości – figury na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zadanie 1.Wskaz równanie okręgu o środku o współrzędnych (4, -8) i promieniu 7

A.$(x-4)^2+(y+8)^2=49$ C.$(x-4)^2+(y-8)^2=49$

B.$(x-4)^2+(y+8)^2=7$ D. $(x+4)^2+(y-8)^2=7$

Zadanie 2.Środek okręgu o równaniu x^2+y^2 - 10x - 8y – 80 = 0ma współrzędne:

A. (-5, 4) B. (5, 4) C. (10, 8) D. (10, -8)

Zadanie 3.Promień okręgu o równaniu x^2+y^2 - 6x + 2y – 6 = 0 ma długość:

A. 6 B. 4 C. 2 D. $\sqrt{6}$

Zadanie 4. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ z osiami układu współrzędnych jest równa:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 5. 88.Okręgi $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$ i $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$

A. są styczne zewnętrznie B. są styczne wewnętrznie

C. mają dwa punkty wspólne D. są rozłączne

Zadanie 6. Okrąg o środku S = (-2, 2) jest styczny do obu osi układu współrzędnych. Równanie tego okręgu ma postać:

A. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$
B. $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
C. $(x-2)^2+(y+2)^2=2$
D. $(x+2)^2+(y-2)^2=2$

Zadanie 7. Punkt A ma współrzędne (3,-2). Punkt B jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych. Punkt B ma współrzędne:

A.(-3,2) B. (-2,3) C. (-3,-2) D. (3,2)

Zadanie 7.Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty A = (-2, -1), B = (6, 1), C = (7, 10).

Zadanie 8.Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C mając dane A = (1, 1), B = (2, 6) i C = (-4, 2).

Zadanie 9 . Zbadaj położenie prostej l o równaniu $3x-4y-13=0$ względem okręgu o równaniu

$x^2+y^2-10x+24y-56=0$

Zadanie 10**.** Punkty A = (0,0), B = (3, 1), D = (-1, 1) są wierzchołkami równoległoboku ABCD. Oblicz współrzędne wierzchołka D.

BAZA ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Równanie okręgu o środku S = (-1,2) i promieniu r = 2 ma postać:

$A.\ (x+1)^2+(y+2)^2=4$ C.$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

$B.\ (x+1)^2+(y-2)^2=2$ D.$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

Zadanie 2. Równanie okręgu o środku S = (2,1) i promieniu r = 3 ma postać:

$A.\ (x-2)^2+(y+1)^2=3$ C.$(x-2)^2+(y-1)^2=9$

$B.\ (x+2)^2+(y-1)^2=3$ D.$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

Zadanie 3. Równanie okręgu o promieniu 3, stycznego z osiami *OX* i *OY* oraz znajdującego się w I ćwiartce układu współrzędnych ma postać:

$A.\ (x+3)^2+(y+3)^2=9$ C.$(x-3)^2+(y-3)^2=9$

$B.\ (x+3)^2+(y+3)^2=3$ D.$(x-3)^2+(y-3)^2=3$

Zadanie 4. Wskaż równanie okręgu o promieniu 6.

A. $x^2+y^2=3$ C. $x^2+y^2=6$

B. $x^2+y^2=12$ D. $x^2+y^2=36$

Zadanie 5. Promień okręgu o równaniu $(x-1)^2+y^2=16$ jest równy:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadanie 6. Promień okręgu o równaniu $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ ma długość:

A. 6 B. 4 C. 2 D. $\sqrt{6}$

Zadanie 7. Odległość środka okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y+1)^2=9$ od początku układu współrzędnych wynosi:

$A.\ \sqrt{10}$ B. 4 C. 3 D. $\sqrt{2}$

Zadanie 8. Odległość środka okręgu o równaniu $x^2+y^2-2x-3=0$ od początku układu współrzędnych jest równa:

A.2 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 3

Zadanie 9. Dany jest okrąg o równaniu $x^2+y^2+2x-6y-10=0$. Wówczas:

A.$r=\sqrt{20}$ B. r=20 C. r=10 D. $r=\sqrt{10}$

Zadanie 10. Środek okręgu o równaniu $x^2+y^2-6x+8y-11=0$ ma współrzędne:

A.S = (-3,4) B. S = (-6,8) C. S = (3,-4) D.S= (6,-8)

Zadanie 11. Okrąg o środku S=(-2,2) jest styczny do obu osi układu współrzędnych. Równanie tego okręgu ma postać:

A. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ C. $(x-2)^2+(y+2)^2=2$

B. $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ D. $(x+2)^2+(y-2)^2=2$

Zadanie 12. Które osie układu współrzędnych przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y+1)^2=4$?

A. Przecina obie osie

B. Przecina tylko oś x

C. Przecina tylko oś y

D. Nie przecina żadnej osi układu współrzędnych

Zadanie 13. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ z osiami układu współrzędnych jest równa:

A.0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 14. Okręgi o równaniach $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ i $(x-4)^2+(y-3)^2=1$:

A. są styczne zewnętrznie

B. są styczne wewnętrznie

C. mają dwa punkty wspólne

D. są rozłączne.

Zadanie 15. Który z poniższych punktów leży na okręgu o równaniu $(x+2)^2+(y-3)^2=4$

A.(-2,1) B. (2,3) C. (-5,1) D. (0,0)

Zadanie 16. Dane są punkty S = (2, 1) i M = (6, 4). Równanie okręgu o środku S i przechodzącego przez punkt M ma postać:

$A.\ (x-2)^2+(y-1)^2=5$ C. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

$B.\ (x-6)^2+(y-4)^2=5$ D. $(x-6)^2+(y-4)^2=25$

Zadanie 17. Pole koła ograniczonego okręgiem $x^2+y^2-4x+6y-6=0$ wynosi:

A. $\sqrt{7}\pi$ B. $\sqrt{19}\pi$ C. 7π D. 19π

Zadanie 18. Okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach A = (3,-4) i B = (-1,2), ma równanie:

A. $x^2+y^2-2x+2y-13=0$ C. $x^2+y^2-2x+2y-11=0$

B . $x^2+y^2+2x-2y-13=0$ D. $x^2+y^2+2x-2y-11=0$

Zadanie 19. Liczba punktów wspólnych okręgu o promieniu 4 i środku w punkcie K = (0,3) z prostą o równaniu y = -x + 1 jest równa:

A.0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 20. Ile punktów wspólnych ma prosta $x+y=0$ z okręgiem o równaniu $x^2+y^2=9$?

A.2 B. nieskończenie wiele C. 1 D. 0

Zadanie 21. Ile punktów wspólnych ma prosta o równaniu y = -x + 2 z okręgiem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 22. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x+3)^2+y^2=5$ z prostą o równaniu y = -2x + 1 jest równa:

A. 0 B. 1 C. 2 D.3.

Zadanie 23. Pole trójkąta ograniczonego prostą y = -2x + 6 oraz osiami układu współrzędnych wynosi:

A. 3 B. 6 C. 9 D. 18

Zadanie 24. Punkty A = (-1, 5) i B = (-3,2) są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Długość boku tego trójkąta wynosi:

A. 5 B. $\sqrt{13}$ C. $\sqrt{67}$ D. $\sqrt{61}$

Zadanie 25. Punkty A = (-5, 2) i B = (3, -2) są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 30 B. 36 C. $12\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

Zadanie 26. Trójkąt o wierzchołkach A = (0,0), B = (1, 4), C = (5,2) ma pole:

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

Zadanie 27. Punkt A = (-1, 1) jest środkiem kwadratu, a punkt B = (2, 0) jego wierzchołkiem. Bok kwadratu ma długość:

A. 5 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{5}$

Zadanie 28. Dwa kolejne wierzchołki kwadratu mają współrzędne: A = (-1, 3), B = (3, -3). Pole tego kwadratu wynosi:

A. 12 B. 52 C. $2\sqrt{13}$ D. $13\sqrt{2}$

Zadanie 29. Dane są wierzchołki czworokąta: A = (-2, 4), B = (6, 4), C = (6, -4) i D = (-2, -4). Długość przekątnej BD tego czworokąta wynosi:

A. $8\sqrt{2}$ B. $\sqrt{124}$ C. $2\sqrt{8}$ D. 4

Zadanie 30. Punkty A = (1, 1) i C = (6, 0) są przeciwległymi wierzchołkami równoległoboku ABCD. Punkt przecięcia przekątnych mam współrzędne:

A. $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ C. $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ D. $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

Zadanie 31. Przekątna LM rombu KLUM leży na prostej o równaniu y = 0,2x oraz U = (2, -9). Wówczas przekątna KU zawiera się w prostej o równaniu:

A. $y = -\frac{1}{5}x - 1$ B. y = -5x – 1 C. y = -5x + 1 D. $y = \frac{1}{5}x + 1$

Zadanie 32. Punkt A ma współrzędne (2013,1000). Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Punkt C ma współrzędne:
A. (-2013,1000) B. (-1000, 2013) C. (-2013, -1000) D. (2013, 1000)

Zadanie 33. Dany jest punkt A o współrzędnych (-3,2). Punkt B jest symetryczny do A względem początku układu współrzędnych, natomiast punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi *OY*. Odcinek AC ma długość:

A. 6 B. 4 C. $2\sqrt{13}$ D. $\sqrt{13}$

Zadanie 34. Punkt A ma współrzędne (3,-2). Punkt B jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych. Punkt B ma współrzędne:

A.. (-3,2) B. (-2,3) C. (-3,-2) D. (3,2)

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r

$a)\ S=(-5,3)\quad r=4$ $\qquad d)\ S=(3,5)\quad r=5\sqrt{2}$

$b)\ S=(-1,0)\quad r=0,2$ $\qquad e)\ S=(-2,-4)\quad r=3\sqrt{7}$

$c)\ S=(0,0)\quad r=5$ $\qquad f)\ S=(0,-8)\quad r=1$

Zadanie 2. Wyznacz współrzędne środka okręgu i jego promień:

a) $x^2+(y-7)^2=81$ $\qquad$ e) $x^2+y^2+2x-6y+9=0$

b) $(x-5)^2+(y+3)^2=8$ $\qquad$ f) $x^2+y^2-10y-16=0$

c) $(x-1)^2+y^2=4$ $\qquad$ g) $x^2+y^2+8x-2y+12=0$

d) $x^2+y^2=9$ $\qquad$ h) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

Zadanie 3. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie S = (4, -2) i przechodzącego przez punkt (0,0).

Zadanie 4. Wyznacz równanie okręgu stycznego do osi *OY*, którego środkiem jest punkt S = (3, -5).

Zadanie 5. Dany jest kwadrat o kolejnych wierzchołkach A = (-4,2) i B = (6,-2). Wyznacz promień okręgu opisanego na tym kwadracie.

Zadanie 6. Napisz równanie okręgu o środku S = (-3,6) i promieniu równym długości odcinka o końcach A = (2,-3) i B = (-5,-1).

Zadanie 7. Punkty R = (2,4) i N = (-4,-2) są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ARON. Oblicz pole koła opisanego na tym kwadracie.

Zadanie 8. Znajdź współrzędne punktów przecięcia okręgu o równaniu $x^2+y^2+2x-3=0$ z osiami układu współrzędnych.

Zadanie 9. Określ wzajemne położenie okręgów o podanych środkach $S_1\ i\ S_2$ oraz promieniach $r_1\ i\ r_2$.

a) $S_1=(3,2),\quad S_2=(6,2),\quad r_1=2,\quad r_2=1$

b) $S_1=(0,0),\quad S_2=(3,0),\quad r_1=2,\quad r_2=5$

c) $S_1=(-5,2),\quad S_2=(1,-6),\quad r_1=4,\quad r_2=6$.

Zadanie 10. Sprawdź czy punkty *O* = (0,0) i B = (-2,1) należą do koła $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2\le 4$.

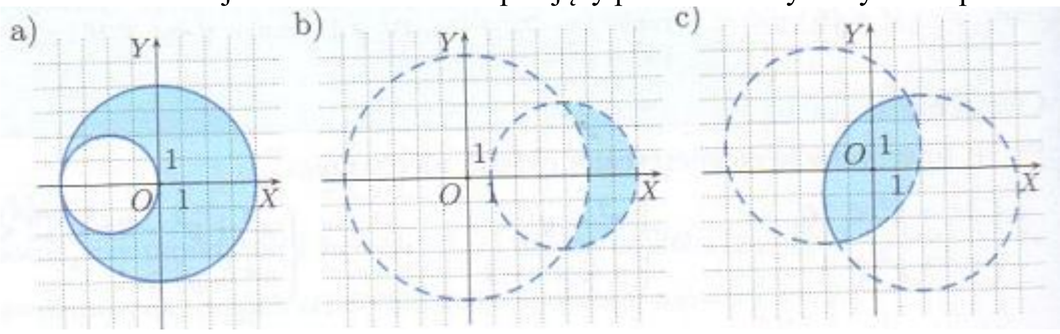
Zadanie 11. Dane są koła: K_1, K_2, K_3. K_1: $x^2+y^2\le 16$, K_2: $(x-2)^2+y^2\le 4$, K_3: $(x-2)^2+(y+3)^2\le 9$. Do których z tych kół należy punkt P?

a) P = (-2,2) $\qquad$ b) P = (2,1) $\qquad$ c) P = (2,-1) $\qquad$ d) P = (4,-4).

Zadanie 12. Podaj interpretację geometryczną układu nierówności.

a) $\begin{cases} x^2+y^2\le 16 \\ x^2+y^2\ge 4 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-12\le 0 \\ x^2+y^2\ge 1 \end{cases}$

Zadanie 13. Podaj układ nierówności opisujący przedstawiony na rysunku podzbiór płaszczyzny.



Zadanie 14. Określ wzajemne położenie okręgu: o:$(x+1)^2+(y-3)^2=5$ i prostej l: $y=-\frac{1}{2}x+5$.

Zadanie 15. Ile punktów wspólnych ma okrąg o równaniu $x^2 + (y-2)^2 = 9$ z prostą o równaniu 3x + y – 5 = 0?

Zadanie 16. Podaj ile punktów wspólnych z okręgiem o środku *S* i promieniu 4 ma prosta *l*.

a) *l*: 12x + 5y – 4 = 0, S = (3,4)

b) *l*: 3x + 4y – 12 = 0, S = (7,4)

c) *l*: 4x +3y +6 = 0, S =(-3,2)

d) *l*: x + y =0, S = $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Zadanie 17. Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty A = (-2, -1), B = (6, 1), C = (7, 10).

Zadanie 18. Wiadomo, że A = (0, 3), B = (-1, 0), C = (0, 0). Znajdź równanie prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C.

Zadanie 19. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C mając dane A = (1, 1), B = (2, 6) i C = (-4, 2).

Zadanie 20. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach: x + y – 1 = 0, y = -3, -2x + 2y – 1 = 0. Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny.

Zadanie 21. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach A = (3, 8), B = (1, 2) i C = (6, 7) jest prostokątny.

Zadanie 22. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach A = (1, 1), B = (2, 6) i C = (-4, 2) jest prostokątny.
Zadanie 23. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach: x + y – 1 = 0, y = -3, -2x + 2y – 1 = 0. Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz jego pole.

Zadanie 24. Dane są punkty A = (-1,-1), B = (5,2), C = (4,1).

a) Sprawdź czy trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym.

b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 25. Oblicz pole trójkąta ABC, wiedząc, że A = (-2,-2), B = (4,1), C = (0,4).

Zadanie 26. Punkty A = (1, 5), B = (14, 31), C = (4, 31są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz długość odcinka BD.

Zadanie 27. Punkt M = (2, -5) jest wierzchołkiem kwadratu. Jeden z jego boków zawiera się w prostej o równaniu x + 2y – 7 = 0. Oblicz pole powierzchni tego kwadratu.

Zadanie 28. Wiadomo, że A = (-1, 4), B = (2, 4), C = (-1, -2). Znajdź równanie prostej, w której zawiera się przekątna AC prostokąta ABCD i określ jej współczynnik kierunkowy.

Zadanie 29. Proste o równaniach y – 4 = 0 i 4x – y + 12 = 0 oraz osie układu współrzędnych ograniczają trapez. Oblicz tangens kata ostrego tego trapezu.

Zadanie 30. Punkty R = (2,4) i N = (-4,-2) są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ARON. Oblicz pole koła opisanego na tym kwadracie.

Zadanie 31. Sprawdź czy punkty A = (1,1), B = (4,2), C = (7,1), D = (-2,-2) są wierzchołkami trapezu.

Zadanie 32. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych 3x – y – 1 = 0 i x + 5y – 11 = 0, a jednym z jego wierzchołków jest punkt (7,4). Wyznacz pozostałe wierzchołki tego równoległoboku.

Zadanie 33. Dane są wierzchołki A = (-3,-1), B = (1,2), C = (4,-2) kwadratu ABCD. Oblicz współrzędne wierzchołka D oraz pole kwadratu ABCD.

Zadanie 34. Wiadomo, że A = (-1, 4), B = (2, 4) i D = (-1, -2). Znajdź równanie prostej, w której zawiera się przekątna AC prostokąta ABCD i określ jej współczynnik kierunkowy.

Zadanie 35. Sprawdź czy okrąg o średnicy AB jest symetryczny do okręgu o średnicy CD względem osi *OX* lub osi *OY*.

a) A = (-4,-6), B = (2,2), C = (3,5), D = (-5,-1).

Zadanie 36. Dane są punkty A = (-2, -1), B = (2, -5), C = (8, 1), D = (4, 5). Oblicz pole części wspólnej prostokąta ABCD oraz jego obrazu w symetrii względem prostej y = x.

Zadanie 37. Która z wypisanych obok liter ma:

a) 0 osi symetrii
b) 1 oś symetrii
c) 2 osie symetrii?

A M E F H

Zadanie 38. Dany jest trapez *ABCD*, gdzie A = (0,3), B = (2,-1), C = (4,-1) i D = (5,3). Narysuj ten trapez w układzie współrzędnych oraz jego obraz w symetrii względem:

a) osi OX b) osi OY c) prostej x = 2 d) prostej y = x.

Zadanie 39. Wyznacz środek symetrii kwadratu o wierzchołkach: A = (1,-2), B = (9,4), C = (3,12), D = (-5,6).

Zadanie 40. Dany jest trójkąt ABC, gdzie A = (1,1), B = (5,1), C = (1,6). Narysuj obraz tego trójkąta w symetrii względem punktu:

a) O_1 = (0,0) b) O_2 = (1,1) c) O_3 = (2,2)

Zadanie 41. Prostokąty ABCD i A'B'C'D' są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów, jeśli A = (-3,-2), B = (5,-2), C = (5,3), D = (-3,3).

Zadanie 42. Punkt A' położony jest symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA', jeśli:

a) A = (-1,4) c) A = (-6,-8).

PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESÓW FUNKCJI

• **Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi układu.**

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o wektor $\vec{w} = [p, q]$, czyli o p jednostek względem osi x i q jednostek względem osi y, to wzór funkcji, którą otrzymamy pop przesunięciu, ma postać $y = f(x - p) + q$.

Jeżeli:

$p > 0$ przesuwamy wykres w prawo względem osi x

$p < 0$ przesuwamy wykres w lewo względem osi x

$q > 0$ przesuwamy wykres w górę względem osi y

$q < 0$ przesuwamy wykres w dół względem osi y

• **Wykres funkcji** $y = |f(x)|$

Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej wzór funkcji $y = |f(x)|$ można zapisać w postaci

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & gdy \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x), & gdy \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Aby narysować wykres funkcji $y = |f(x)|$, znając wykres funkcji f, wystarczy określić znaki funkcji f. W tych przedziałach, w których funkcja przyjmuje:

- wartości nieujemne, wykres funkcji $y = |f(x)|$ pokrywa się z wykresem funkcji f
- wartości ujemne, wykres funkcji $y = |f(x)|$ jest symetryczny względem osi x do wykresu funkcji f

• **Wykres funkcji** $y = k \cdot f(x)$

Jeżeli $y = f(x)$ i $g(x) = k \cdot f(x)$, gdzie $k \neq 0$, to do wykresu funkcji f należą punkty $(x, f(x))$, a do wykresu funkcji g punkty $(x, k \cdot f(x))$.

Przekształcenie, w wyniku którego otrzymujemy wykres funkcji g nazywamy **powinowactwem prostokątnym o osi x i skali k.**

• **Wykres funkcji** $y = f(k \cdot x)$

Jeżeli $y = f(x)$ i $g(x) = f(k \cdot x)$, gdzie $k \neq 0$, to do wykresu funkcji f należą punkty $(x, f(x))$, a do wykresu funkcji g punkty $\left(\frac{1}{k} \cdot x, f(x)\right)$. Przekształcenie, w wyniku którego otrzymujemy wykres funkcji g nazywamy **powinowactwem prostokątnym o osi y i skali k.**

• **Symetria względem osi x**

Odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi x, otrzymujemy wykres funkcji $y = -f(x)$

• **Symetria względem osi y**

Odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi y, otrzymujemy wykres funkcji $y = f(-x)$

T: Przesunięcie wykresu funkcji względem osi układu współrzędnych.

Zadanie 1. Określ o ile jednostek i wzdłuż której osi należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g.

a) $g(x) = f(x-6)+1$ $\quad 6 \rightarrow, 1 \uparrow \quad$ *czyli o wektor* $\vec{w} = [6, 1]$

b) $g(x) = f(x-3)$ ……………………………………………

c) $g(x) = f(x+1)$ ……………………………………………

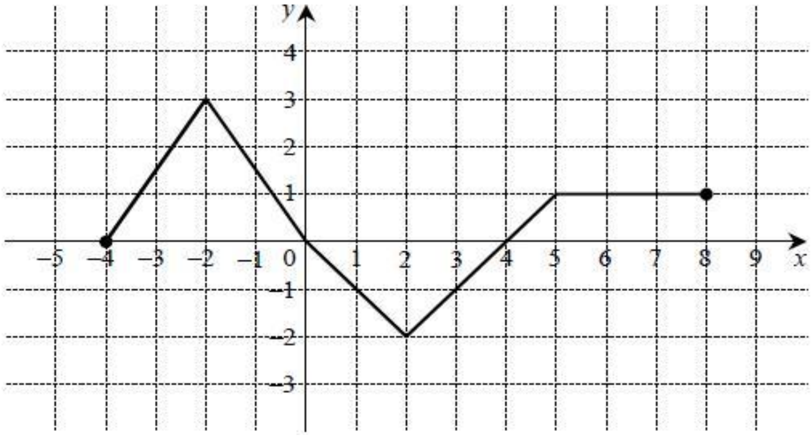
d) $g(x) = f(x)-5$ ……………………………………………

e) $g(x) = f(x)+2$ ……………………………………………

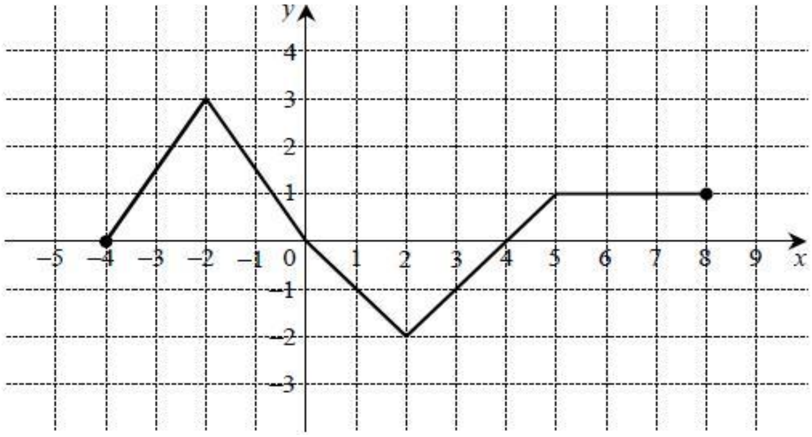
f) $g(x) = f(x+2)-3$ ……………………………………………

Zadanie 2. Dany jest wykres funkcji *f*. W tym samym układzie współrzędnych narysuj wykresy następujących funkcji:

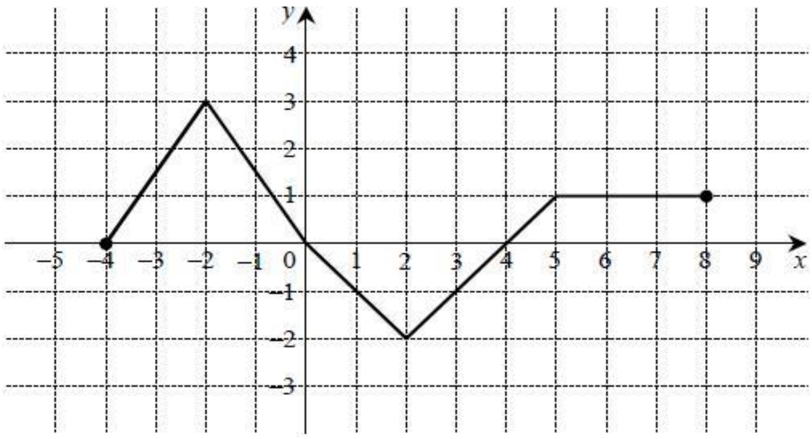
a) $g(x) = f(x-2)$



b) $g(x) = f(x) + 1$



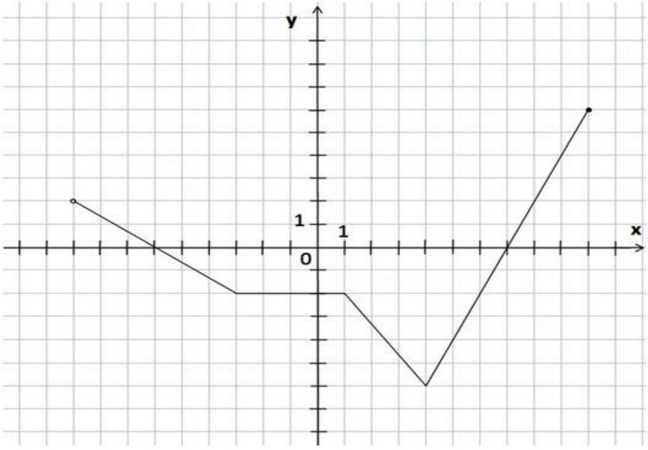
c) $g(x) = f(x+1) - 2$

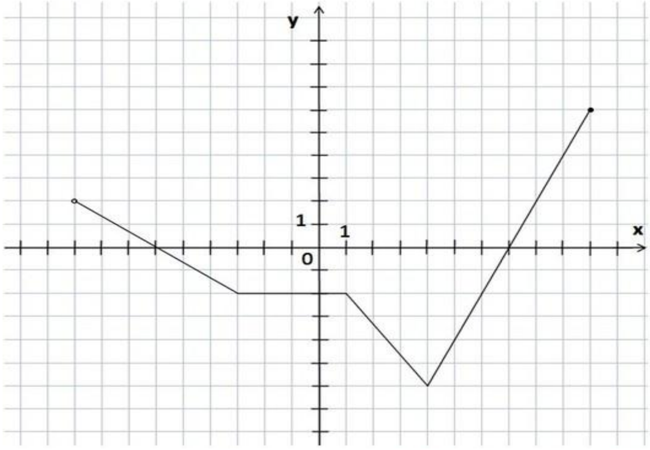


Zadanie 3. Dana jest funkcja *f*. Dokonaj przesunięcia wykresu funkcji o wektor $\vec{u}$:

a) $\vec{u} = [-2, 0]$

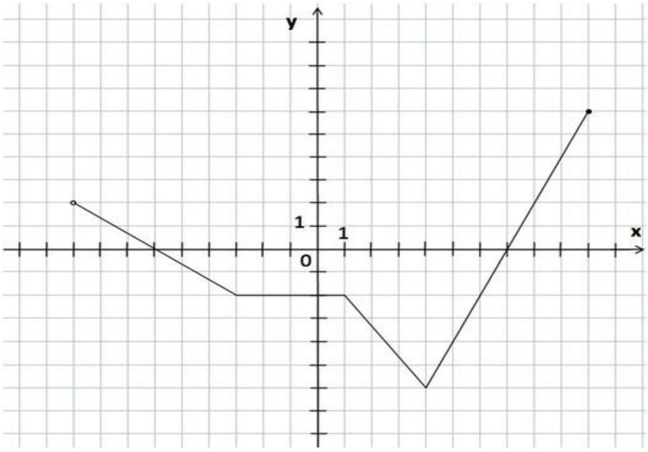
b) $\vec{u} = [0, 3]$

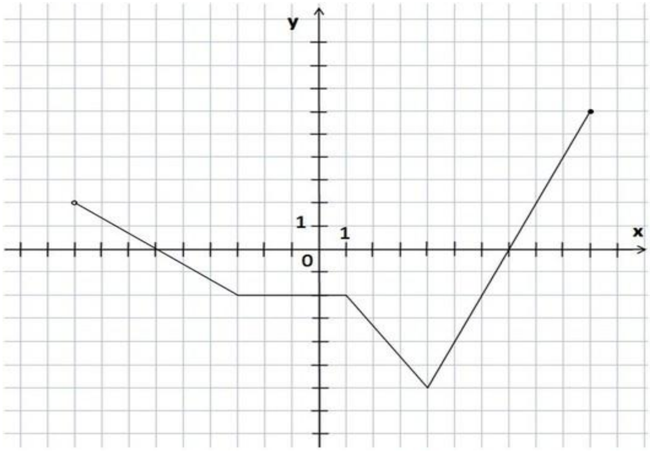




c) $\vec{u} = [1, -2]$

d) $\vec{u} = [-1, 2]$





Zadanie 4. Napisz wzór funkcji g ,której wykres powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $\vec{w}$.

a) $f(x) = |x|, \quad \vec{w} = [-2, -3]$ $\qquad g(x) = |x+2| - 3$

b) $f(x) = |x|, \quad \vec{w} = [3, 1]$ $\qquad g(x) =$ ....

c) $f(x) = 2x - 4, \quad \vec{w} = [-4, 0]$ $\qquad g(x) =$ ....

d) $f(x) = -3x + 1, \quad \vec{w} = [0, 5]$ $\qquad g(x) =$ ....

e) $f(x) = x^2, \quad \vec{w} = [-5, 7]$ $\qquad g(x) =$ ....

f) $f(x) = -3x^2, \vec{w} = [4, -6]$ $\qquad g(x) =$ ....

g) $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad \vec{w} = [1, -2]$ $\qquad g(x) =$ ....

h) $f(x) = 6^x, \quad \vec{w} = [-2, 9]$ $\qquad g(x) =$ ....

i) $f(x) = \sqrt{x}, \quad \vec{w} = [5, 3]$ $\qquad g(x) =$ ....

Zadanie 5. Określ, o jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $f(x)=2x^2$, $g(x)=2(x+3)^2-1$, $\vec{w}=[......,........]$

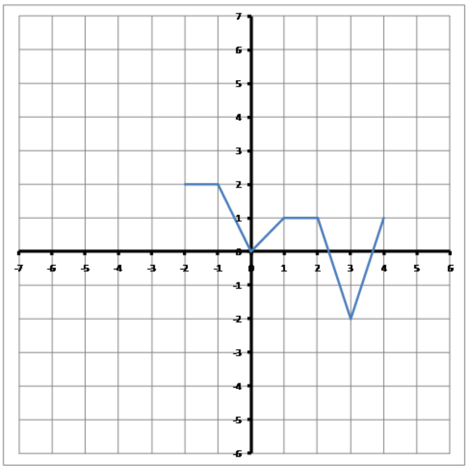
b) $f(x)=\dfrac{5}{x}$, $g(x)=\dfrac{5}{x-1}+7$, $\vec{w}=[......,........]$

c) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$ $\vec{w}=[.......,.......]$

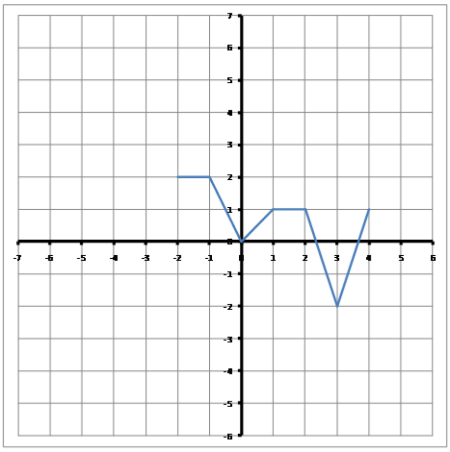
d) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|-4$ $\vec{w}=[.......,.......]$

Zadanie 6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*. Narysuj wykresy funkcji *g* jeśli:

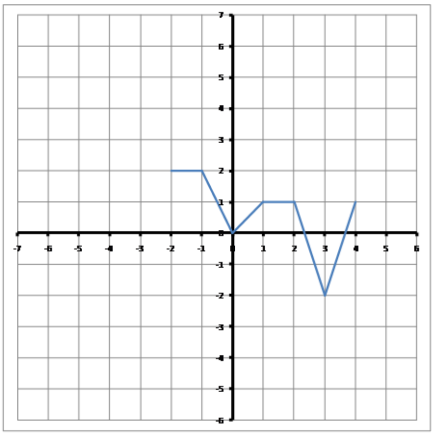
$g(x)=f(x+3)$



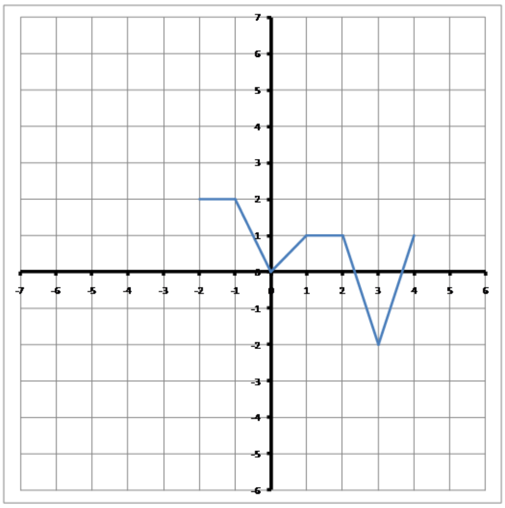
$g(x)=f(x)-1$



$g(x)=f(x-1)+2$



$g(x)=f(x+2)-3$



Zadanie 7. Określ o ile jednostek i wzdłuż której osi należy przesunąć wykres funkcji *f* aby otrzymać wykres funkcji *g*

a) $g(x)=f(x-2)$

b) $g(x)=f(x+3)$

c) $g(x)=f(x-1)+2$

d) $g(x) = f(x) - 4$

e) $g(x) = f(x - \sqrt{3})$

Zadanie 8. Opisz przesunięcie, w wyniku którego z wykresu funkcji *f* otrzymasz wykres funkcji *g*

a) $f(x) = |x|, g(x) = |x+2|$

b) $f(x) = x^2, g(x) = (x-4)^2$

c) $f(x) = \frac{5}{x}, g(x) = \frac{5}{x-2}$

d) $f(x) = |x|, g(x) = |x-5| + 1$

e) $f(x) = x^2, g(x) = (x+1)^2 - 17$

f) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{x} - 7$

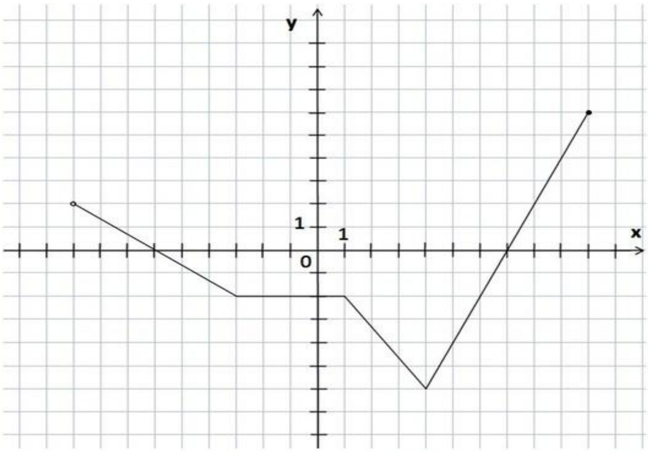
ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

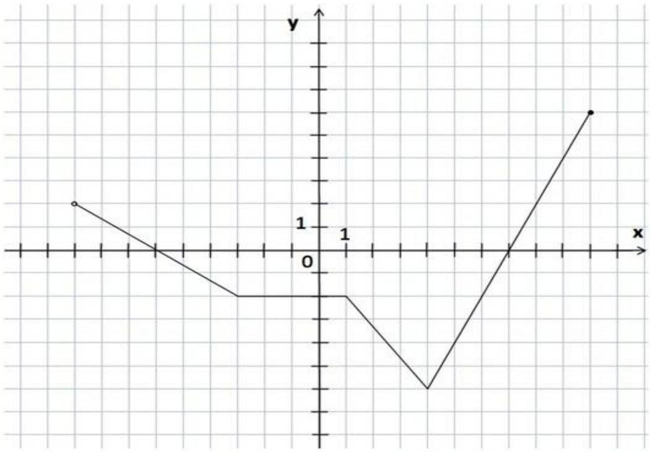
T: Przekształcenia wykresu funkcji.

Zadanie 1.Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj na tym samym rysunku wykres wskazanej funkcji.

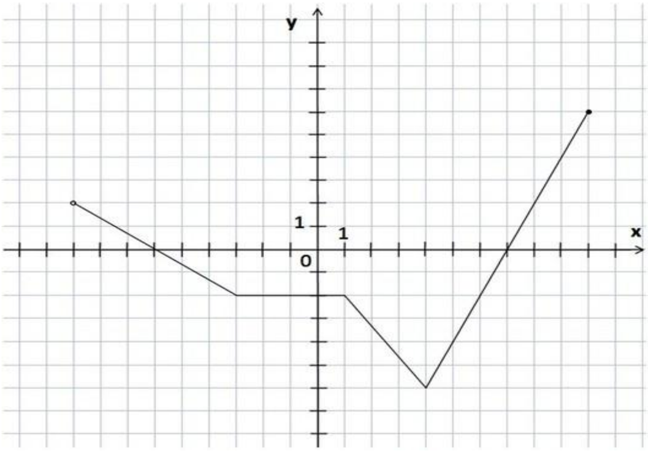
a) $y = -f(x)$



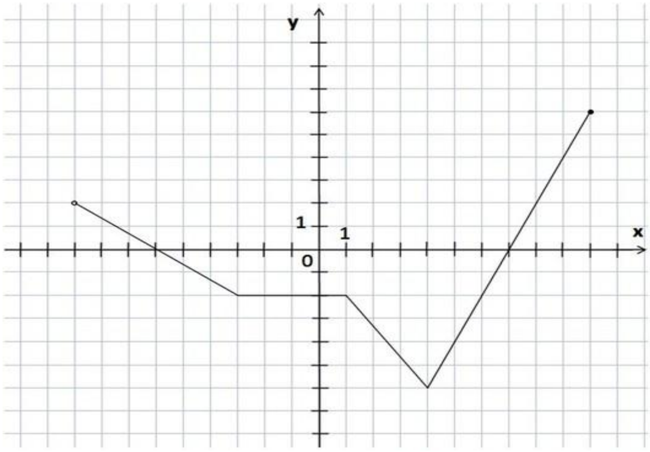
b) $y = f(-x)$



c) $y = 2 \cdot f(x)$

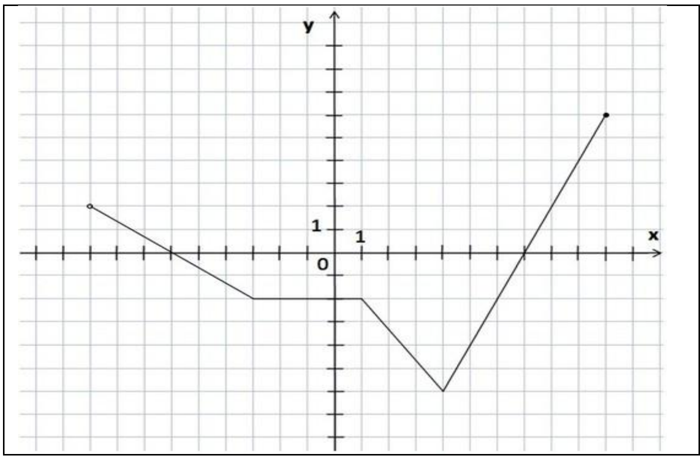


d) $y = f(2 \cdot x)$

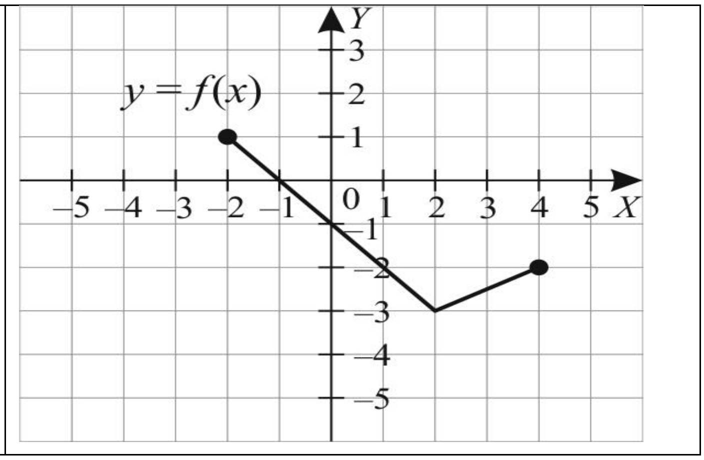


Zadanie 2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$

a)

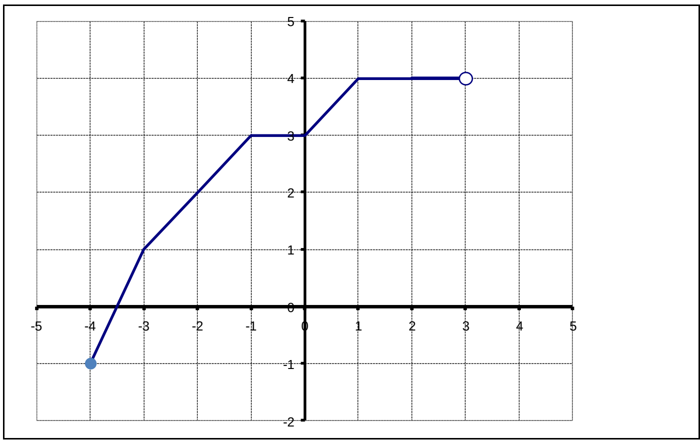


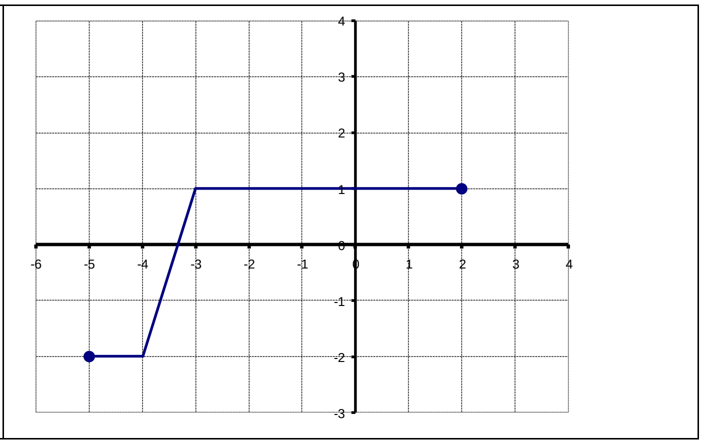
b)



c)

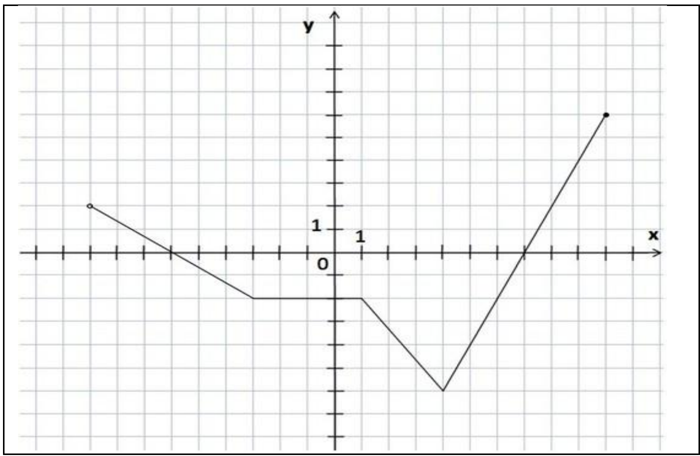
d)



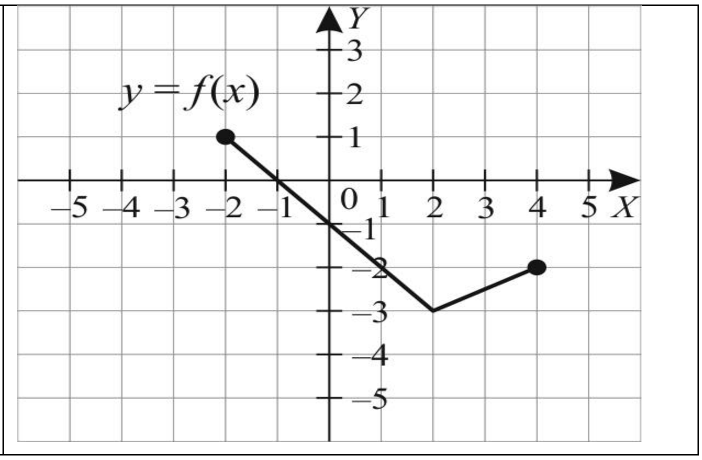


Zadanie 3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$

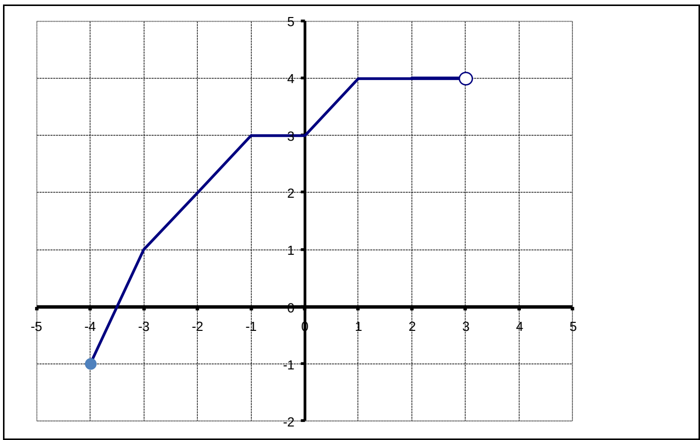
a)



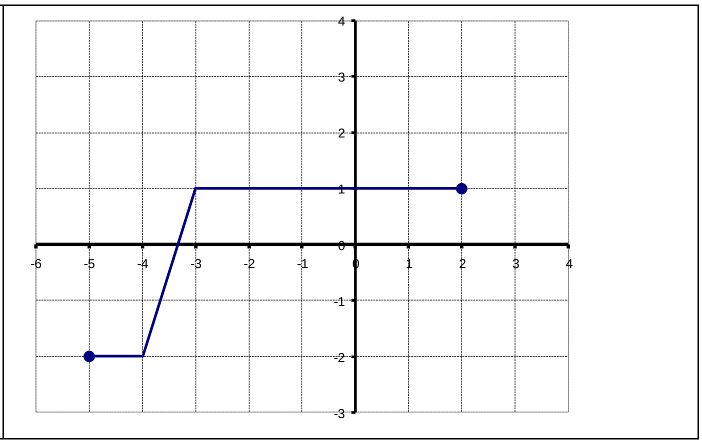
b)



c)



d)



Zadanie 4. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji liniowej $f(x) = 2x$, a następnie dokonując odpowiedniego przekształcenia narysuj w tym samum układzie wykres funkcji g.

a) $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$

d) $g(x) = f(\frac{1}{2} \cdot x)$

e) $g(x) = |f(x)|$

f) $g(x) = f(|x|)$

Zadanie 5. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji liniowej *f(x) = x - 1*, a następnie dokonując odpowiedniego przekształcenia narysuj w tym samum układzie wykres funkcji g .

a) $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = 3 \cdot f(x)$

d) $g(x) = f(3 \cdot x)$

e) $g(x) = |f(x)|$

f) $g(x) = f(|x|)$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Jeżeli wykres funkcji f przesuniemy wzdłuż osi OY o 7 jednostek do góry, to otrzymamy wykres funkcji h określonej wzorem:

A. $h(x) = f(x-7)$ B. $h(x) = f(x)+7$ C. $h(x) = f(x)-7$ D. $h(x) = f(x+7)$

Zadanie 2. Wykres funkcji $f(x) = x^3 - 4x - 4$ otrzymamy przesuwając wykres funkcji $g(x) = x^3 - 4x + 4$ wzdłuż osi OY o:

A. 4 jednostki do dołu B. 4 jednostki do góry

C. 8 jednostek do dołu D. 8 jednostek do góry

Zadanie 3. Przesuwając wykres funkcji g wzdłuż osi OX o 5 jednostek w prawo, otrzymano wykres funkcji f. Zatem funkcja f określona jest wzorem:

A. $f(x) = g(x-5)$ B. $f(x) = g(x)-5$ C. $f(x) = g(x+5)$ D. $f(x) = g(x)+5$

Zadanie 4. Wykres funkcji h otrzymano przesuwając wykres funkcji $g(x) = x^2$ wzdłuż osi OX o dwie jednostki w lewo. Zatem funkcja h określona jest wzorem:

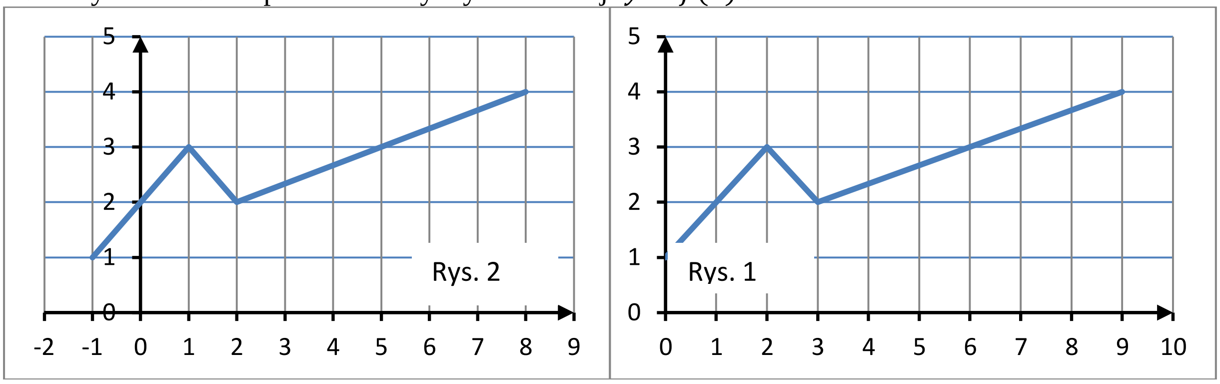
A. $h(x) = x^2 - 2$ B. $h(x) = x^2 + 2$ C. $h(x) = x^2 - 4x + 4$ D. $h(x) = x^2 + 4x + 4$

Zadanie 5. Wykres funkcji $y = 2(x-3)^2 + 5$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = 2x^2$ o:

A. 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w dół B. 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w górę

C. 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w dół D. 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w górę

Zadanie 6. Na rysunku 1. Jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.



Funkcja przedstawiona na rysunku 2 jest określona wzorem

A. $y = f(x-1)$ B. $y = f(x)-1$ C. $y = f(x+1)$ D. $y = f(x)+1$

Zadanie 7. Jeżeli wykres funkcji $y = 2x^2 - 1$ przesuniemy o trzy jednostki w prawo, to otrzymamy wykres funkcji o wzorze

A. $y = 2x^2 - 4$ B. $y = 2(x-3)^2 - 1$ C. $y = 2(x+3)^2 - 1$ D. $y = 2x^2 + 2$

Zadanie8. Zbiorem wartości funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -4, 0\rangle$. Wobec tego zbiorem wartości funkcji $y = f(x) - 4$ jest zbiór:

A. $\langle 0, 4\rangle$ B. $\langle -8, 0\rangle$ C. $\langle -4, 0\rangle$ D. $\langle -8, -4\rangle$.

Zadanie 9. Wykres funkcji f opisanej wzorem $f(x) = \sqrt{x} + 1$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY i otrzymano wykres funkcji g. Zatem:

A. $g(x) = -\sqrt{x} + 1$ B. $g(x) = \sqrt{-x} + 1$ C. $g(x) = -\sqrt{-x} + 1$ D. $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, o jaki należy przesunąć wykres funkcji f ,aby otrzymać wykres funkcji g, jeśli:

a) $g(x) = f(x-1)$

b) $g(x) = f(x) - 4$

c) $g(x) = f(x+2) + 4$

d) $g(x) = f(x-10) - 3$

Zadanie 2. Wykres funkcji f przesuń równolegle o wektor $\vec{u}$. Napisz wzór funkcji g, której wykres otrzymałeś, jeśli:

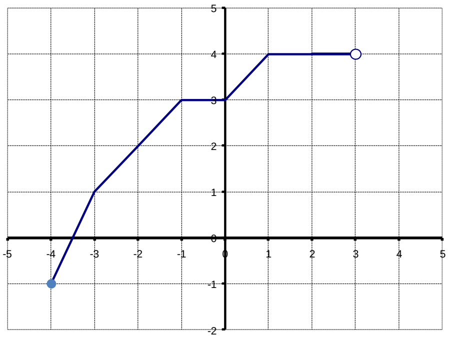
a) $f(x) = 2x - 4$ $\vec{u} = [-4,0]$

b) $f(x) = -3x + 1$ $\vec{u} = [0,5]$

c) $f(x) = 3|x| \quad \vec{u} = [3,-8]$
d) $f(x) = 2\sqrt{x} \quad \vec{u} = [-1,2]$
f) $f(x) = \frac{3}{x} \quad \vec{u} = [-3,0]$
g) $f(x) = x^2 \quad \vec{u} = [0,7]$

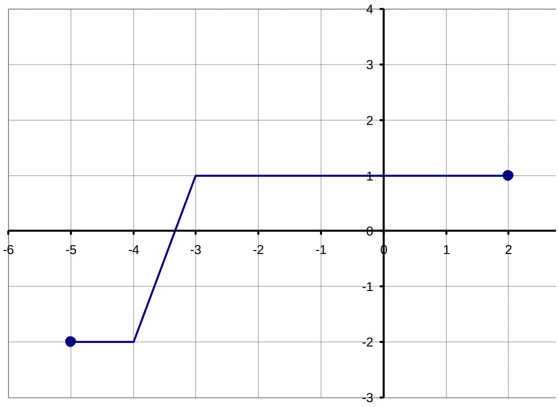
Zadanie 3. Na podstawie wykresu funkcji *f* opisanej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$, naszkicuj wykres funkcji *g*, gdzie $g(x) = \frac{1}{x+2} - 3$, a następnie:
a) podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji *g*;
b) oblicz miejsce zerowe funkcji *g*;
c) odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja *g* przyjmuje wartości ujemne.

Zadanie 4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f* . Naszkicuj wykres funkcji:



$a)\ g(x) = -f(x)$
$b)\ g(x) = f(-x)$
$c)\ g(x) = -2f(x)$
$d)\ g(x) = |f(x)|$
$e)\ g(x) = f(|x|)$
$f)\ g(x) = f(x-2) - 1$

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f* . Naszkicuj wykres funkcji:



$a)\ g(x) = -f(x)$
$b)\ g(x) = f(-x)$
$c)\ g(x) = \frac{1}{2} f(x)$
$d)\ g(x) = |f(x)|$
$e)\ g(x) = f(|x|)$
$f)\ g(x) = f(x-) + 2$

Zadanie 6. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji liniowej $f(x) = -4x$, a następnie dokonując odpowiedniego przekształcenia narysuj w tym samum układzie wykres funkcji g, jeśli:
a) $g(x) = -f(x)$
b) $g(x) = f(-x)$
c) $g(x) = 3 \cdot f(x)$
d) $g(x) = f(3 \cdot x)$
e) $g(x) = |f(x)|$
f) $g(x) = f(|x|)$

Zadanie 7. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, a następnie dokonując odpowiedniego przekształcenia narysuj w tym samum układzie wykres funkcji g, jeśli:
a) $g(x) = \frac{1}{3} \cdot f(x)$
b) $g(x) = f(-\frac{3}{2} \cdot x)$
c) $g(x) = |f(x)|$

FUNKCJA KWADRATOWA

Funkcją kwadratową nazywamy funkcje określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$
(a , b, c – współczynniki liczbowe).
Wykresem funkcji kwadratowej jest krzywa zwana **parabolą**.
Postaci funkcji kwadratowej:

1. Postać ogólna: $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. Postać iloczynowa: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 - miejsca zerowe funkcji ($\Delta > 0$), lub $f(x) = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 - miejsce zerowe ($\Delta = 0$)
3. Postać kanoniczna: $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie p, q – współrzędne wierzchołka paraboli.

Współrzędne wierzchołka paraboli można wyznaczyć używając jednych z poniższych wzorów:

$p = \frac{-b}{2a}$ lub $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$q = \frac{-\Delta}{4a}$ $q = f(p)$

Aby narysować wykres funkcji kwadratowej danej w postaci ogólnej:

1. Wyznaczamy miejsca zerowe rozwiązując równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$
   Obliczamy Δ ze wzoru $\Delta = b^2 - 4ac$ oraz w zależności od jej wartości $x_1 \ i \ x_2$

Pamiętaj! Jeśli $\Delta > 0$ równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Jeśli $\Delta = 0$ równanie to ma jedno rozwiązanie $x = \frac{-b}{2a}$.

Jeśli $\Delta < 0$ równanie to nie posiada rozwiązań.

2. Obliczamy współrzędne wierzchołka W = (p, q) paraboli korzystając z podanych wyżej wzorów.
3. Wyznaczenie punktu przecięcia się wykresu z osi OY daje nam dokładniejszy wykres.

Aby narysować wykres funkcji kwadratowej danej w postaci kanonicznej:

1. Odczytujemy z postaci funkcji współrzędne wierzchołka W = (p, q) paraboli będącej jej wykresem.
2. Wyznaczamy miejsca zerowe rozwiązując równanie kwadratowe postaci $a(x - p)^2 + q = 0$
3. j.w.

lub

1. Rysujemy wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2$.
2. Przesuwamy powstałą parabolę o p jednostek względem osi OX i q jednostek względem osi OY.

Uwaga! Wykres narysowany druga metodą nie jest dokładny. Nie zawsze odczytamy z niego miejsca zerowe i współrzędne wierzchołka paraboli.

Aby narysować wykres funkcji kwadratowej danej w postaci iloczynowej:

1. Odczytujemy z postaci funkcji miejsca zerowe funkcji kwadratowej.
2. Wyznaczamy współrzędne wierzchołka W = (p, q) paraboli za pomocą podanych wyżej wzorów (łatwiej wykorzystać drugie z proponowanych wzorów).
3. j.w.

Zbiór wartości funkcji kwadratowej zależy od $a \ i \ q$. Dla $a > 0$, zbiorem wartości funkcji kwadratowej jest zbiór $Y_f = < q, +\infty)$. Dla $a < 0$, zbiorem wartości jest zbiór $Y_f = (-\infty, q >$.

Monotoniczność funkcji kwadratowej zależy od $a \ i \ p$:

1. Dla $a > 0$ funkcja kwadratowa maleje w przedziale $(-\infty, p >$, a rośnie w przedziale $< p, +\infty)$.
2. Dla $a < 0$ funkcja maleje w przedziale $< p, +\infty)$, a rośnie w przedziale $(-\infty, p >$.

Opis sposobu wyznaczania najmniejszej i największej wartości funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym <a,b>.

1. Obliczamy wartości danej funkcji na końcach przedziału $< a, b >$, tzn. $f(a) \ i \ f(b)$.
2. Wyznaczamy odciętą wierzchołka p i sprawdzamy, czy $p \in < a, b >$. Jeżeli $p \in < a, b >$, to obliczamy $q = f(p)$. Jeżeli $p \notin < a, b >$, to nie obliczamy q, tym samym wnioskując, że funkcja nie posiada w tym przedziale ekstremum lokalnego.
3. Porównujemy $f(a), f(b) \ i \ f(p)$ lub tylko $f(a) \ i \ f(b)$. Najmniejsza spośród nich odpowiada y_{MIN}, a największa - y_{MAX}.

Przypomnijmy!!!

Wzory Viete'a

Liczby $x_1 \ i \ x_2$ są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad i \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $a \neq 0$ i $\Delta > 0$ ma dwa pierwiastki x_1 i x_2:

- różnych znaków, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$
- jednakowych znaków, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$
- dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
- ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

T: Wykres i własności funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2$.

Zadanie 1. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdy

a) $a = 4, b = -3, c = 1$ $\qquad f(x) =$ ……………………………………

b) $a = -5, b = 0, c = 2$ $\qquad f(x) =$ ……………………………………

c) $a = 7, b = -4, c = 0$ $f(x) = ...$

d) $a = 4, b = 0, c = 0$ $f(x) = ...$

Zadanie 2. Uzupełnij tabelę wartości funkcji f dla podanych argumentów, a następnie naszkicuj jej wykres, jeśli:

a) $f(x) = 2x^2$

b) $f(x) = -3x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

Na podstawie powyższych wykresów uzupełnij tabelę własności funkcji $f(x) = ax^2$ w zależności od znaku współczynnika a .

Własności	*a >0*	*a < 0*
ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji f , są skierowane	w górę	
zbiór wartości funkcji f		
funkcja f maleje w przedziale		
funkcja f rośnie w przedziale		
największa wartość funkcji f	nie istnieje	
najmniejsza wartość funkcji f		

Zadanie 3. Punkt A należy do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = ax^2$. Oblicz współczynnik a , gdy:

a) A = (2, 8)

b) A = (3,-9)

Zadanie 4. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą dla $x \in <-1,1>$

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

b) $f(x) = -5x^2$

x	-1	0	1
$f(x)$			

wartość najmniejsza: …………………….

wartość największa: ………………………

wartość najmniejsza: ………………………..

wartość największa: …………………………

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = 2x^2$, a następnie przesuń go o wektor $\vec{u} = [1,-3]$. Zapisz wzór nowo powstałej funkcji g.

x	-1	0	1
$f(x)$			

$g(x) =$ ....

$a =$ .... $p =$ .... $q =$ ....

Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie omów jej własności:

a) $f(x) = x^2 - 4$

$D =$ ....

$Y_f =$ ....

liczba miejsc zerowych : ....

$f \uparrow$ *dla* $x \in$ ....

$f \downarrow$ *dla* $x \in$ ....

$y_{MIN} =$ .... $y_{MAX} =$ ....

$W = ($..........,...........$)$

równanie osi symetrii paraboli:............

b) $f(x) = -3(x-1)^2$

$D =$ ....

$Y_f =$ ....

liczba miejsc zerowych : ....

$f \uparrow$ *dla* $x \in$ ....

$f \downarrow$ *dla* $x \in$ ....

$y_{MIN} =$ .... $y_{MAX} =$ ....

$W = ($..........,...........$)$

równanie osi symetrii paraboli:............

c) $f(x) = -2(x+3)^2 + 4$

	$D =$ ……………………………………… $Y_f =$ ……………………………………… *liczba miejsc zerowych* : …………………… $f\uparrow$ *dla* $x \in$ …………………………………. $f\downarrow$ *dla* $x \in$ …………………………………. $y_{MIN} =$ ……………… $y_{MAX} =$ ………………… $W = ($………,………$)$ równanie osi symetrii paraboli:…………

Zadanie 3. Ze wzoru funkcji kwadratowej odczytaj współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem:

a) $f(x) = -3(x+4)^2 - 6$ $p =$ …………… $q =$ ………………

b) $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$ $p =$ …………… $q =$ ………………

c) $f(x) = 4x^2 + 2$ $p =$ …………… $q =$ ………………

d) $f(x) = -2(x+\sqrt{3})^2$ $p =$ …………… $q =$ ………………

Zadanie 4. Ustal, czy wykres funkcji f określonej wzorem postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$ ma punkty wspólne z osią x, gdy:

a) $f(x) = x^2 - 4$ ………… b) $f(x) = -2x^2 - 1$ ………………

c) $f(x) = (x-3)^2$ ………… d) $f(x) = (x-2)^2 + 3$ ………………

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T:Postać kanoniczna a postać ogólna funkcji kwadratowej.

Zadanie 1. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej. Odczytaj współrzędne wierzchołka funkcji kwadratowej.

a) $f(x)=(x-4)^2+2$

b) $f(x)=(x+1)^2-8$

c) $f(x)=2(x+2)^2+10$

d) $f(x)=-3(x-7)^2-1$

Zadanie 2. Zapisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.

a) $f(x)=x^2+8x-6$

$p=\frac{-b}{2a}=$ .... $\Delta=b^2-4ac=$ ....

$q=\frac{-\Delta}{4a}=$ .... $f(x)=a(x-p)^2+q=$ ....

b) $f(x)=x^2+6x+1$

....

....

c) $f(x)=2x^2-10x+12$

....

....

d) $f(x)=-2x^2+10x$

....

....

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem i omów wskazane własności:

a) $f(x)=x^2+5x+4$

$p=$ ....

$q=f(p)=$ ....

b) $f(x)=-2x^2+4x+6$

$p=$ ....

$q=f(p)=$ ....

$D =$ ....

$Y_f =$ ....

miejsca zerowe : ....

r – *nie osi symetrii* : ....

$f \uparrow$ ....

$f \downarrow$ ....

y_{MIN} ....

y_{MAX} ....

$D =$ ....

$Y_f =$ ....

miejsca zerowe : ....

r – *nie osi symetrii* : ....

$f \uparrow$ ....

$f \downarrow$ ....

y_{MIN} ....

y_{MAX} ....

Zadanie 4. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem. Omów wskazane własności:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

- współrzędne wierzchołka W paraboli,
- postać kanoniczna,
- równanie osi symetrii paraboli
- zbiór wartości
- ilość miejsc zerowych,

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

- współrzędne wierzchołka W paraboli,
- postać kanoniczna,
- równanie osi symetrii paraboli
- zbiór wartości
- ilość miejsc zerowych,

c) $f(x)=3x^2-12x$
• współrzędne wierzchołka W paraboli,

• postać kanoniczna,

• równanie osi symetrii paraboli

• zbiór wartości

• ilość miejsc zerowych,

d) $f(x)=4x^2+8x+1$
• współrzędne wierzchołka W paraboli,

• postać kanoniczna,

• równanie osi symetrii paraboli

• zbiór wartości

• ilość miejsc zerowych,

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Miejsca zerowe funkcji kwadratowej i jej postać iloczynowa.

Zadanie 1. Sprawdź, czy liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$

$f(2) =$ ....

b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

$f(2) =$ ....

c) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

$f(2) =$ ....

d) $f(x) = (x-3)^2 - 1$

$f(2) =$ ....

Zadanie 2. Podaj miejsca zerowe funkcji f :

a) $f(x) = -2(x-1)(x+4)$

$x_1 =$ .... $x_2 =$ ....

b) $f(x) = \frac{1}{3}(x-5)(x+2)$

....

c) $f(x) = 2x(x+6)$

....

d) $f(x) = 5(x+3)^2$

....

Zadanie 3. Określ liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej f , gdy:

a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 5$

$\Delta = b^2 - 4ac =$ ....

....

....

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac =$ ....

....

....

c) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$\Delta = b^2 - 4ac =$ ....

....

....

d) $f(x) = -3x^2 + 6x$

$\Delta = b^2 - 4ac =$ ....

....

....

Zadanie 4. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f i zapisz ją w postaci iloczynowej (o ile istnieje):

a) $f(x) = x^2 - 10x + 21$

b) $f(x) = 6x^2 + x - 1$

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+2x+4$

d) $f(x)=x^2+\sqrt{2}x+4$

Zadanie 5. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f.

a) $f(x)=2(x-1)(x+5)$

$x_1=$ .... $x_2=$ ....

$p=\frac{x_1+x_2}{2}=$ ....

$q=f(p)=$ ....

$W=(.....,........)$

b) $f(x)=-2(x+1)(x+3)$

....

....

....

....

Zadanie 6. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych i wyznacz jej wierzchołek. Naszkicuj tę parabolę

a) $f(x)=-x^2-4x-3$

$\Delta=$ ....

....

$x_1=$ ....

$x_2=$ ....

$f(x)=$ ....

$f(0)=$ ....

$p=\frac{x_1+x_2}{2}=$ ....

$q=f(p)=$ ....

b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$

$\Delta=$ ....

....

$x_1=$ ....

$x_2=$ ....

$f(x)=$ ....

$f(0)=$ ....

$p=\frac{x_1+x_2}{2}=$ ....

$q=f(p)=$ ....

Zadanie 7. Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli x_1 i x_2 są jego pierwiastkami.

a) $x_1 = -1, x_2 = 4$

b) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$

b = …………………….. c = ………………..

b = ……………….. c = ………………………

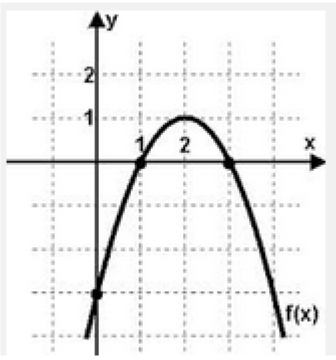
Zadanie 8. Największa wartość funkcji $f(x) = a(x-3)(x+5)$ jest równa 5. Wyznacz współczynnik a oraz współrzędne wierzchołka paraboli.

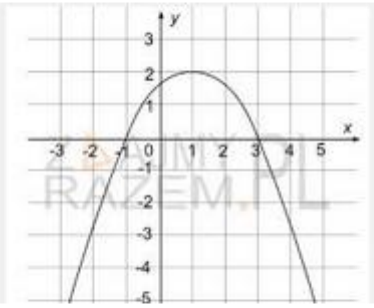
ZADANIE DOMOWE ☺

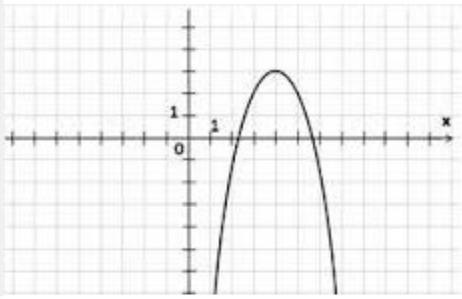
Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Wartość najmniejsza i największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Zadanie 1. Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w przedziale <1, 4>.







Wartości:

• najmniejsza…………….

• największa……………..

Wartości:

• najmniejsza…………….

• największa……………..

Wartości:

• najmniejsza…………….

• największa……………..

Zadanie 2. Narysuj wykres funkcji $f(x) = -(x-1)(x-4)$, określ jej wierzchołek i odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i największą funkcji w przedziale <0, 3>

Zadanie 2. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3, \ <0, 3>$.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1 \in <0, 3>$$

$q = f(p) = ...$

$f(0) = ...$

$f(3) = ...$

$y_{MIN} = ... y_{MAX} = ...$

b) $f(x) = -3x^2 - 6x - 2, \quad <1, 2>$

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{-6} = -1 \notin <1, 2>.$$

$f(1) = ...$

$f(2) = ...$

$y_{MIN} = ... y_{MAX} = ...$

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+2x+1, \quad <-6, 2>$

d) $f(x)=\frac{2}{3}x^2-x, \quad <-3, 0>$

Zadanie 3. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji f w przedziale <-1, 4>.

a) $f(x)=2x^2-12x-1$

b) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+3$

Zadanie 4. Oblicz najmniejszą y_{MIN} i największą y_{MAX} wartość funkcji kwadratowej f w podanym przedziale

a) $f(x)=3(x+3)(x-1), \quad <-2, 0>$

b) $f(x)=5(x+3)(x+5), \quad <-1, 0>$

c) $f(x) = 2(x-2)^2 + 4, \quad <0, 3>$

d) $f(x) = (x+3)^2 - 3, \quad <-2, 2>$

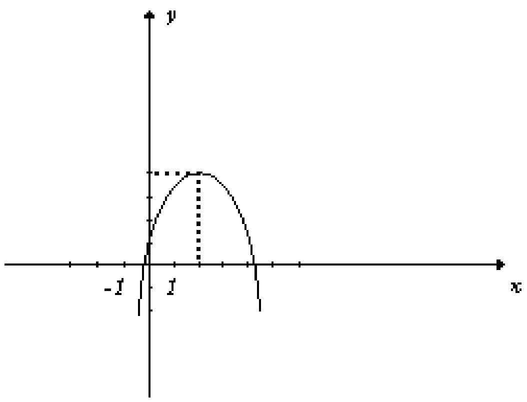
ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej.

Zadanie 1. Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby -1 i 7, a zbiorem jej wartości jest zbiór $(-\infty, 4>$

Zadanie 2. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej określ jej wzór.



Zadanie 3. Największą wartość funkcji kwadratowej f jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji. Zapisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

Zadanie 4. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej , wiedząc, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie W = (2, 1) oraz, że liczba 3 jest miejscem zerowym tej funkcji. Wyznacz drugie miejsce zerowe.

Zadanie 5. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c.$ Do wykresu tej funkcji należy punkt A = (-1, -13), a jej wartość największa jest równa 2 dla x = 4. Wyznacz współczynniki a, b *i* c .

Zadanie 6. Napisz wzór funkcji kwadratowej f , o której wiadomo, że:

a) ma największą wartość równą 8 dla argumentu równego -1, a jej wykres przechodzi przez punkt P = (-3, -4).

b) $f(5) = 0$ i przedział $< 2, +\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest malejąca, a przedział $(-\infty, 5 >$ jest jej zbiorem wartości.

c) $f(0) = 0$ i przedział $(-\infty, -2 >$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest malejąca, a jej wykres z prostą o równaniu y = -4 ma jeden punkt wspólny.

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Przekształcanie wykresów funkcji kwadratowej.

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji *f*, a następnie przesuń go o wektor $\vec{u}$, gdy:

a) $f(x) = x^2 + 6x, \quad \vec{u} = [-2,1]$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+4)(x-2), \quad \vec{u} = [3, 2]$

c) $f(x) = (x-1)^2 - 4, \quad \vec{u} = [2,-3]$

Zadanie 2. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=-3x^2+x-4$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$

b) $g(x)=f(-x)$

c) $g(x)=f(x-1)+2$

d) $g(x)=|f(x)|$

e) $g(x)=-5f(x)$

f) $g(x)=f(3x)$

Zadanie 3. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2(x-3)^2+1$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$

b) $g(x)=f(-x)$

c) $g(x) = f(x+3) - 1$

d) $g(x) = | f(x) |$

e) $g(x) = -\frac{1}{2} f(x)$

f) $g(x) = f(3x)$

Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji f :

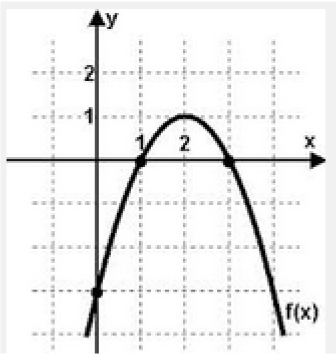
a) $f(x) = | x^2 - 3 |$ b) $f(x) = | (x-2)^2 - 5 |$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Nierówności kwadratowe.

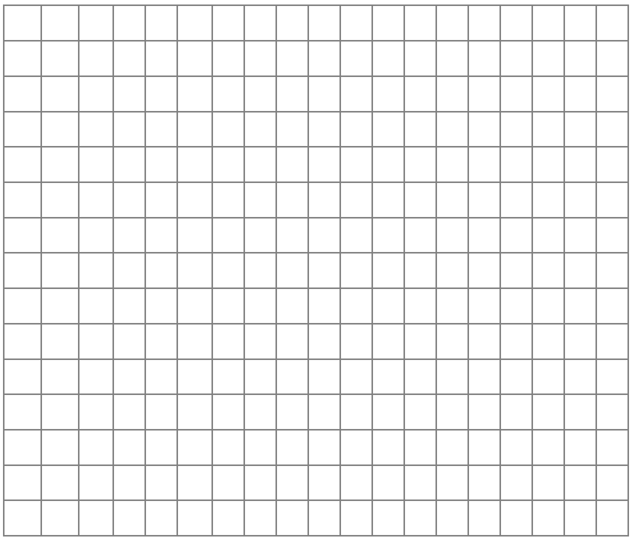
Zadanie 1.Na rysunku przedstawiony jest szkic wykresu funkcji f. Podaj rozwiązanie nierówności zapisanej pod rysunkiem.



f(x)<0……………………………………….*f(x)≤0*…………………………….………………….

f(x)>0……………………………………….*f(x)≥0*……………………………………..……

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $2x^2+7x-4=0$ i naszkicuj parabolę $y=2x^2+7x-4$.



$2x^2+7x-4=0$

$\Delta=$ ……………………………………………………

$x_1=$ ……………………………………………………

$x_2=$

Podaj zbiory rozwiązań nierówności

$2x^2+7x-4<0$……………………………………

$2x^2+7x-4\le 0$……………………………………

$2x^2+7x-4>0$……………………………………

$2x^2+7x-4\ge 0$……………………………………

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność:

a) $3x^2+2x-1\le 0$

b) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

c) $-x^2 + 4x + 1 \geq 0$

d) $-x^2 + \frac{1}{2}x + 3 < 0$

e) $x^2 + 5x - 5 < 0$

f) $-x^2 + 2x + 7 \leq 0$

g) $-3x^2 < 0$

h) $\frac{1}{2}x^2 \geq 0$

i) $3x - x^2 \leq 3 - 3x^2$

j) $-x(2 - x) > 1 - x^2$

k) $(x+6)(x-2)<0$

l) $(x+3)^2 \leq 0$

Zadanie 4. Rozwiąż nierówność:
a) $(2x+1)^2+(x-3)^2<10$

b) $3x-(1-x)^2 \geq (x-2)(x+2)$

c) $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})^2 > \frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$

d) $2-x^2 \le (2-x)^2$

Zadanie 5. Podaj wszystkie liczby naturalne, które spełniają nierówność $x^2-6x+5<0$.

Zadanie 6. Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem:

a) $y=\sqrt{-x^2+16}$

b) $y = \sqrt{(x+1)(x+2)}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$

d) $y = \dfrac{-5}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach.

Zadanie 1. Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne używając jednej zmiennej x
a) iloczyn dwóch liczb różniących się o 4

b) suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych

c) suma kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych

d) iloczyn dwóch liczb, które w sumie dają 100

e) suma kwadratów dwóch liczb, których suma wynosi 20

Zadanie 2. Oblicz, ile boków ma wielokąt, w którym liczba przekątnych wynosi 405

Zadanie 3. Liczbę 40 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których iloczyn jest największy.

Zadanie 4. Część uczniów klasy liczącej 25 osób zachorowała i nie mogła przyjść do szkoły. Każdy zdrowy uczeń wysłał do chorego kolegi esemesa z pozdrowieniami. Napisz wzór funkcji, która liczbie uczniów chorych przyporządkowuje liczbę wysłanych wiadomości. Określ liczbę uczniów chorych jeśli wysłano 100 wiadomości.

Zadanie 5.W pewnej miejscowości liczbę przyjęć chorych do szpitala w czasie trwania 10 dni epidemii określa wzór $E(n) = -2n^2 + 24n$.

a) Oblicz ilu chorych przyjęto do szpitala w pierwszym dniu trwania epidemii, a ilu w dziesiątym dniu.

b) W którym dniu epidemii przyjęto najwięcej pacjentów i ilu ich było?

c) Przez ile dni przyjmowano do szpitala chorych ze względu na panującą epidemię?

Zadanie 6. Prostokątna działka o powierzchni 700 m^2 ma jeden bok o 3m dłuższy od drugiego. Oblicz ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki, jeżeli na jednym z boków należy pozostawić miejsce na wstawienie furtki o szerokości 2m.

Zadanie 7. Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ogródek?

Zadanie 8. Dla jakich liczb x, y iloczyn przyjmuje najmniejszą wartość, jeżeli różnica x – y jest równa 4?

Zadanie 9.Liczbę 36 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których iloczyn jest największy.

Zadanie 10. Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8cm. Ile najwięcej może być równe pole takiego trójkąta?

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Układy dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest kwadratowe

Zadanie 1. Wykonaj ilustrację graficzną układu równań i podaj liczbę jego rozwiązań:

a) $\begin{cases} y = -x^2 + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 + x + 3 \\ y = 3x - 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = x^2 + 4x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - 1 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 1 \\ y = 2x^2 - 8x + 8 \end{cases}$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Funkcja kwadratowa z parametrem.

Zadanie 1. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 3x^2 - 9x + c$, gdzie c $\in R$. Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c, dla których
a) funkcja f nie ma miejsc zerowych,

b) jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 2,

c) wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f należy do prostej o równaniu y = x.

Zadanie 2. Oblicz wartość parametru m, dla którego osią symetrii paraboli o równaniu
$y = (m-1)x^2 - 2(m+3)x + m - 3$ jest prosta x = 3?

Zadanie 3.Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji określonych wzorem $f(x) = -x^2 + 4x$ i $g(x) = x + m$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

Zadanie 4. Dla jakiej wartości parametru m funkcja kwadratowa $f(x) = 4x^2 - (2m+1)x + 1$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2mx + 4m + 5$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1)$ i malejąca w przedziale $(1, +\infty)$.

Zadanie 6. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = mx^2 + mx - 1$. Wyznacz te wartości parametru *m*, dla których:
a) funkcja *f* przyjmuje tylko wartości ujemne

b) zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 0>$

Zadanie 7. Znajdź te wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = x^2 + mx + 9$ ma dwa miejsca zerowe większe od 2.

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Równania i nierówności kwadratowe z parametrem.

Zadanie 1. Zbadaj liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m.

a) $x^2 + x + m = 0$

b) $mx^2 + 2x + 1 = 0$

c) $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$

d) $x^2 + (m-1)x + m - 4 = 0$

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru m równanie $2x^2 - mx - m + 6 = 0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - mx + 3m - 5 = 0$ ma dwa pierwiastki jednakowych znaków?

Zadanie 4 Dla jakich wartości parametru a zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych?

a) $x^2 + ax + 5 \geq 0$

b) $(a-2)x^2+2x+a-2\leq 0$

c) $-x^2+(a+2)x-3<0$

d) $(a+1)x^2+2ax+a>0$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: **Powtórzenie wiadomości – funkcja kwadratowa.**

Zadanie 1. Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = 2x^2 + 24x - 12$ jest punkt:

A. (-12, -12) B. (-8, -90) C. (-6,-84) D. (-4, -76)

Zadanie 2. Funkcja $f(x) = x^2 - 9$ najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu:

A. -9 B. -3 C. 0 D. 9

Zadanie 3. Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = 7(x+6)^2 + 5$ jest równa:

A. -6 B. -5 C. 5 D. 6

Zadanie 4.Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3(x-3)^2$ jest przedział:

A. $< -3, +\infty)$ B. $< 0, +\infty)$ C. $< 3, +\infty)$ D. $< 27, +\infty)$

Zadanie 5. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -x^2 + 8x - 1$ jest przedział:

A. $(-\infty, 4 >$ B. $(-\infty, 15 >$ C. $(-\infty, 22 >$ D. $(-\infty, 60 >$

Zadanie 6.Funkcja $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$ jest rosnąca w przedziale:

A. $(-\infty, 3 >$ B. $(-\infty, 4 >$ C. $< 3, +\infty)$ D. $< 4, +\infty)$

Zadanie 7. Osią symetrii wykresu funkcji $g(x) = -2x^2 + 20x + 5$ jest prosta o równaniu:

A. y = 5 B. x = 5 C. y = -5 D. x = -5

Zadanie 8.Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 3x + c$ przechodzi przez punkt P = (-1, 3). Wtedy c ma wartość:

A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

Zadanie 9. Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ przyjmuje wartości dodatnie, gdy

A. $x \in R$ B. $x \in (1, 2)$ C. $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ D. $x \in (-1, 0)$

Zadanie 10. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $x^2 > 9x$

A. $(-\infty, 9)$ B. $(0, 9)$ C. (-3, 3) D. $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$

Zadanie 11.Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 - x - 3$.

a) Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem

b) Wyznacz miejsca zerowe.

c) Sporządź wykres funkcji f i omów jej własności

$D =$ ....

$Y_f =$ ....

r – nie osi symetrii : ....

$f \uparrow$ ....

$f \downarrow$ ....

$y_{MIN} =$ .... $y_{MAX} =$ ....

$f(x) > 0$...

$f(x) < 0$...

Zadanie 12. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -3(x+3)(x-2)$.

a) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

b) Znajdź te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 12.

c) Podaj przedziały monotoniczności funkcji.

Zadanie 13. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Wyznacz wartość najmniejsza i największą funkcji w zbiorze <0, 3>

Zadanie 14. Liczbę 40 przedstaw w postaci sumy dwóch składników, tak aby ich iloczyn był największy.

Zadanie 15. Rozwiąż nierówność $(x-3)^2 + 7 > 4(x-2)$

Zadanie 16. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby 2 i (-3). Zapisz wzór funkcji w postaci ogólnej wiedząc, że punkt P = (1, 3) należy do jej wykresu.

BAZA ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -2(x+3)^2 - 5$. Równanie prostej, która jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f to:

A. x = 3 B. x = 5 C. x = -3 D. x = -5

Zadanie 2.Wskaż funkcję kwadratową, której zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 3>$.

A. $f(x) = -(x-2)^2 + 3$

B. $f(x) = (2-x)^2 + 3$

C. $f(x) = -(x+2)^2 - 3$

D. $f(x) = (2-x)^2 - 3$

Zadanie 3.Zbiorem wartości funkcji kwadratowej jest przedział $(-\infty, 2>$. Funkcja ma wzór:

A. $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ B. $f(x) = x^2 + 2$

C. $f(x) = (x+1)^2 - 2$ D. $f(x) = -(x+2)^2$

Zadanie 4. Wykres funkcji $g(x) = 2(x-3)^2 + 5$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = 2x^2$ o:

A. 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w dół

B. 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w górę

C. 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w dół

D. 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w górę

Zadanie 5. Przesuwając wykres funkcji $f(x) = x^2$ o dwie jednostki w prawo otrzymujemy wykres funkcji o wzorze:

A. $f(x) = x^2 + 2$ B. $f(x) = x^2 - 2$ C. $f(x) = (x+2)^2$ D. $f(x) = (x-2)^2$

Zadanie 6. Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = 3(x+1)^2 - 4$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:

A. y = 1 B. y = -1 C. y = -3 D. y = -5

Zadanie 7. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -2(x+3)^2 - 5$. Równanie prostej, która jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f to:

A. x = 3 B. x = 5 C. x = -3 D. x = -5

Zadanie 8. Punkt W = (-3, 2) jest wierzchołkiem wykresu funkcji kwadratowej. Wzorem tej funkcji może być:

A. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ B. $f(x) = 3(x+3)^2 + 2$

C. $f(x) = (x-3)^2 + 2$ D. $f(x) = -2(x+2)^2 - 3$

Zadanie 9 Współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$ wynoszą:

A. (1, -3) B. (-1, -3) C. (-1, 3) D. (1, 3)

Zadanie 10. Funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ ma miejsca zerowe -2 i 3. Wskaż poprawne wartości współczynników b i c.

A. b = -1, c = -6 B. b = -2, c = -3 C. b = 1, c = 6 D. b = 2, c = -3

Zadanie 11.Równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 4x - 11$ to:

A. x = -4 B. x = -2 C. x = 2 D. x = 4

Zadanie 12. Wskaż równanie paraboli, której osią symetrii jest prosta o równaniu x = 2.

A. $y = x^2 - 8x + 16$ B. $y = x^2 + 2$ C. $y = x^2 - 2$ D. $y = x^2 - 4x + 4$

Zadanie 13. Funkcja f określona wzorem $f(x)=-\frac{1}{2}mx^2+2x-2$, gdzie $m\neq 0$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy:

A. m = -1 B. m = 1 C. m = -2 D. m = $\frac{1}{2}$

Zadanie 14. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=-2x^2+12x+1$ jest:

A. $(-\infty,19>$ B. $(-\infty,1>$ C. R D. $<1,+\infty)$

Zadanie 15. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=x^2-6x+11$ jest:

A. $(-\infty,2>$ B. $(-\infty,3>$ C. $<3,+\infty)$ D. $<2,+\infty)$

Zadanie 16. Wykres funkcji $f(x)=2(x-1)^2-4$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:

A. y = -5 B. y = -4 C. y = 1 D. y = -1

Zadanie 17. Prosta o równaniu y = a ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=-x^2+6x-10$. Wynika stąd, że

A. a = 3 B. a = 0 C. a = -1 D. a = -3

Zadanie 18. Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x)=x^2+4x-3$ w przedziale <0, 3> jest równa:

A. -7 B. – 4 C. – 3 D. -2

Zadanie 19. Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x)=-2x^2+8x+2$, gdzie $x\in<-1,4>$ jest równa:

A. f (-1) B. f (2) C. f (3) D. f (4)

Zadanie 20. Funkcja $f(x)=x^2-4x$ jest rosnąca w przedziale:

A. $<0,\infty)$ B. $<2,\infty)$ C. $(-\infty,0>$ D. $(-\infty,2>$

Zadanie 21. Dana jest funkcja $f(x)=(m^2+4)x^2+mx+3.$ Wówczas:

A. dla m = - 2 funkcja osiąga swoją wartość największą
B. dla m = 0 funkcja ma dwa miejsca zerowe
C. dla m = - 2 funkcja jest liniowa
D. dla m = 0 funkcja nie ma miejsc zerowych

Zadanie 22. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x)=-x^2-4x$. Punkt P = (-2, b) należy do wykresu funkcji. Wynika stąd, że:

A. b = -4 B. b = -12 C. b = 4 D. b = 16

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1.Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą dla $x\in<-1,1>$.

a) $f(x)=4x^2$ b) $f(x)=-\frac{1}{5}x^2$ c) $f(x)=-2x^2$

Zadanie 2. Wykres funkcji g powstaje poprzez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie wykres funkcji g. Podaj wzór funkcji g.

a) $f(x)=-2x^2,\quad \vec{u}=[0,4]$ b) $f(x)=3x^2,\quad \vec{u}=[-3,0]$

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2,\quad \vec{u}=[4,1]$ d) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2,\quad \vec{u}=[-3,3]$

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem:

a) $f(x)=(x+1)^2-2$ b) $f(x)=-2x^2+4$ c) $f(x)=5(x+1)^2$

Odczytaj z wykresu:

• zbiór wartości funkcji

• najmniejszą albo największą wartość funkcji (o ile istnieje)
• równanie prostej będącej osią symetrii wykresu funkcji f

Zadanie 4. Ustal, czy wykres funkcji f określonej wzorem postaci $f(x)=a(x-p)^2+q$ ma punkty wspólne z osią x, gdy:
a) $f(x)=4x^2-8$ b) $f(x)=-(x+3)^2-1$ c) $f(x)=4(x-3)^2-5$ d) $f(x)=2(x+4)^2+1$

Zadanie 5. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej:
a) $y=\frac{1}{2}(x+4)^2-3$ b) $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+16$ c) $y=8(x-\frac{1}{4})^2-\frac{3}{2}$

Zadanie 6. Zapisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.
a) $f(x)=x^2-x-9$ b) $f(x)=x^2-5x+5$
c) $f(x)=x^2-x+\frac{1}{4}$ d) $f(x)=x^2+7x+12{,}25$

Zadanie 7. Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem:
a) $f(x)=x^2+2x+1$ b) $f(x)=-4x^2+16$ c) $f(x)=-x^2+2x$
d) $f(x)=-x^2+2x+1$ e) $f(x)=-x^2+2$ f) $f(x)=-2x^2+4x+6$
Wskaż: • dziedzinę i zbiór wartości funkcji
• równanie osi symetrii paraboli
• wartość największą lub najmniejszą funkcji (jeśli istnieje)
• zapisz funkcję w postaci kanonicznej

Zadanie 8. Podaj miejsca zerowe funkcji f:
a) $f(x)=-(x-4)(x+2)$ b) $f(x)=4(x+6)(x+3)$
c) $f(x)=x(x+\frac{1}{4})$ d) $f(x)=\frac{1}{5}x(x-2)$

Zadanie 9. Zapisz funkcję f w postaci iloczynowej (o ile istnieje)
a) $f(x)=x^2-4x+4$ b) $f(x)=-3x^2+9x$ c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$
d) $f(x)=x^2+x+1$ e) $f(x)=2x^2+2x$

Zadanie 10. Wyznacz współrzędne wierzchołka W oraz punkty przecięcia się wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Naszkicuj jej wykres, gdy:
a) $f(x)=3(x-2)(x+4)$ b) $f(x)=-\frac{1}{3}x(x-2)$

Zadanie 11. Oblicz wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej w podanym przedziale:
a) $f(x)=x^2+3x,\quad <1,9>$ b) $f(x)=x^2-3x+1,\quad <0,4>$
c) $f(x)=-2(x-2)^2+1,\quad <-2,0>$ d) $f(x)=-(x+3)(x-1),\quad <-1,2>$

Zadanie 12. Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x)=x^2-6x+1$ w przedziale $<0, 1>$.

Zadanie 13.Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby -1 i 7, a zbiorem jej wartości jest zbiór $<-1,+\infty)$

Zadanie 14. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c.$ Do wykresu tej funkcji należy punkt A = (3, 14), a jej miejscami zerowymi są liczby 2 i -4. Wyznacz współczynniki a, b, c.

Zadanie 15. Wyznacz współczynniki a i b we wzorze funkcji $f(x)=ax^2+bx+4,$ tak aby do wykresu funkcji należały punkty (1, 3) i (-1, 9).

Zadanie 16. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, o której wiadomo, że:
a) ma najmniejszą wartość równą -10 dla argumentu równego 3, a jej wykres przechodzi przez punkt P = (2, -8).
b) $f(1)=1$ i przedział $<4,+\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest rosnąca, a przedział $<-8,+\infty)$ jest jej zbiorem wartości.

Zadanie 17. Zadanie 2. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2(x-3)(x+4)$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$ b) $g(x)=f(-x)$

c) $g(x)=f(x+3)-1$ d) $g(x)=|f(x)|$

e) $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$ f) $g(x)=f(3x)$

Zadanie 18. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x)=|x^2+1|$ b) $f(x)=|(x+3)^2-1|$ c) $f(x)=-|x^2-4|$

Zadanie 19. Rozwiąż nierówność:

$a)\ x^2+6x+9>0$ $f)\ (4-x)(x-5)>0$

$b)\ -x^2+10x-25\le 0$ $g)\ 4x^2-8x\le 0$

$c)\ 25z^2-60z+36<0$ $h)\ x^2-2x>3$

$d)\ 2z^2-8x+8>0$ $i)\ 3x^2\le 0$

$e)\ -3(x+2)(x-4)\ge 0$ $j)\ -y^2+8y<15$

Zadanie 20. Rozwiąż nierówność:

$a)\ -5\ge (x-2)^2$ $d)\ (x-1)(x+1)+(x-2)^2<x(x-4$

$b)\ x(x-3)-4(5-x)\ge 0$ $e)\ 2(2-x)<-x(x-3)$

$c)\ 2(x-1)^2-(x-2)^2\ge 2$ $f)\ (x+4)(x-4)>4(x-1)^2$

Zadanie 21. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność $12x^2-6x\ge 0$

Zadanie 22. Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $-2x^2+8>0$

Zadanie 23. Zależność między kosztem całkowitym produkcji K a liczbą x wyprodukowanych detali określona jest wzorem $K(x)=0{,}01x^2-4x+500$, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią. Ile detali należy produkować, aby koszt całkowity produkcji był najmniejszy?

Zadanie 24.Liczbę 40 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, aby ich iloczyn był największy.

Zadanie 25.Oblicz wymiary prostokątnej działki o polu powierzchni 288 m^2, jeśli jeden jej bok jest:

a) dwukrotnie dłuższy od drugiego,

b) o 2 metry dłuższy od drugiego.

Zadanie 26. Wyznacz najmniejszą wartość sumy kwadratów dwóch takich liczb x, y, jeśli spełniają one warunek:

a) x + y = 6 b) y – x = 4 c) 3x + y = 1

Zadanie 27. Wykonaj ilustrację graficzną układu równań i podaj jego liczbę rozwiązań:

a) $\begin{cases} y=-x^2-4x \\ y=\frac{2}{3}x+4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=-x^2+1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=x^2-4 \\ x^2-4x+4+y=0 \end{cases}$

Zadanie 28. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x^2+y=4 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy=10 \\ x+y=-7 \end{cases}$

Zadanie 29. Funkcja kwadratowa $f(x)=mx^2+6x-4$ ma jedno miejsce zerowe. Wyznacz wartość parametru m oraz znajdź argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość największą.

Zadanie 30. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^2+2x+c$

a) Wyznacz te wartości współczynnika c, dla których wykres funkcji f przecina os OX w dwóch punktach.

b) Wyznacz te wartości współczynnika c, dla których najmniejsza wartość funkcji f jest równa 3.

Zadanie 31. W zależności od wartości parametru m określ liczbę pierwiastków równania:

$a)\ x^2 + mx + 8 = 0$

$b)\ x^2 - (m-5)x + 4 = 0$

$c)\ (m-1)x^2 + 2x + 3 = 0$

$d)\ (m+2)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0$

$e)\ (m^2 - 1)x^2 + 2(m-1)x + 2 = 0$

Zadanie 32. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m+5)x + 2m + 7 = 0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

Zadanie 33. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2(m-2)x - 4m = 0$ ma dwa pierwiastki jednakowych znaków?

Zadanie 34. Określ, dla jakich wartości parametru m zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem rozwiązań nierówności.

$a)\ x^2 + 2x + m > 0$

$b)\ x^2 - mx + 3 > 0$

$c)\ mx^2 + 4mx \le 0$

$d)\ (m-1)x^2 + 4 < 0$

$e)\ mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$

$f)\ (5-m)x^2 - 2(1-m)x + 2(1-m < 0)$

WIELOMIANY

Wielomianem (funkcją wielomianową **)** stopnia n jednej zmiennej $x \in R$ nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \text{ ,}$$

gdzie $n \in N, \quad a_n \neq 0 \quad i \quad a_0, a_1, ..., a_n \in R.$

n – stopień wielomianu, czyli st.[W(x)] = n

$a_0, a_1, ..., a_n$ - współczynniki liczbowe wielomianu, gdzie $a_n \neq 0$

a_0 - wyraz wolny wielomianu.

Dwa niezerowe wielomiany jednej zmiennej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej.

Wykonując dzielenie wielomianu W przez wielomian P, gdzie $P \neq 0$, otrzymujemy wielomian Q oraz resztę R. Możemy wówczas wielomian W zapisać w postaci

$$W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$$

Twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian

Reszta z dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian x – r jest równa liczbie W(r),czyli
R(x) = W(r)

Pierwiastkiem wielomianu W(x) (miejscem zerowym) nazywamy liczbę rzeczywista r, taką, że W(r) = 0.

Twierdzenie Bezouta

Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu W(x) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W(x) jest podzielny przez dwumian x – r.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu

Jeżeli liczba całkowita r, taka, że r$\neq$ 0, jest pierwiastkiem wielomianu W określonego wzorem
$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych , gdzie $a_0 \neq 0 \; i \; n \geq 1$ to liczba **r jest dzielnikiem wyrazu wolnego** a_0 .

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu

Jeżeli wielomian W o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny różny od 0 w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, to licznik tego ułamka jest podzielnikiem wyrazu wolnego, a mianownik podzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej.

Jeżeli liczby $x_1, x_2, ..., x_n$ są pierwiastkami wielomianu W(x) co najmniej drugiego stopnia, to wielomian ten można przedstawić w postaci

$$W(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) \cdot P(x) \text{ ,}$$

gdzie $a \neq 0$ i P(x) jest wielomianem.

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek.

Uwaga: Liczbę r nazywamy **k -krotnym pierwiastkiem** wielomianu W(x) stopnia n, gdy wielomian W(x) jest podzielny przez $(x - r)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - r)^{k+1}$, np.

• W(x) = $(x - 1)^2$, to wielomian W ma jeden pierwiastek równy 1. Liczbę 1 nazywamy **dwukrotnym (podwójnym) pierwiastkiem wielomianu W.**

• W(x) = $5x^2(x - 2)^3$, to wielomian W ma dwa pierwiastki, są to liczby 0 i 2. Liczba 0 jest **dwukrotnym pierwiastkiem** wielomianu W, a liczba 2 **trzykrotnym**.

Rozłożyć wielomian na czynniki oznacza zapisać go w postaci iloczynu wielomianów niższych stopni.

Najczęściej stosowane metody rozkładu wielomianu na czynniki:

- wzory skróconego mnożenia
- wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias
- postać iloczynowa funkcji kwadratowej (dla wielomianu stopnia drugiego)
- grupowanie

- dzielenie wielomianu

T: Stopień i współczynniki wielomianu.

Zadanie 1. Ustal, czy funkcja jest jednomianem. Jeśli tak, to podaj jego stopień.

a) $y=-\frac{1}{3}x^5$ tak, 5 b) $y=3x^{-1}$ ………………….

c) $y=\sqrt{10}x^3$ …………… d) $y=7\sqrt{x}$ …………………

e) $y=0,6x^{11}$ …………… f) $y=x^2\cdot x$ …………………

Zadanie 2. Uporządkuj wielomian w, określ jego stopień oraz wskaż wartości współczynników.

a) $w(x)=x-x^4+x^3+2x^5-6=$ ……………………………………………..

$st(w)=$…... $a_5=$….., $a_4=$……, $a_3=$….., $a_2=$….., $a_1=$….., $a_0=$…….

b) $w(x)=7-3x^2+5x-3x^4=$ ………………………………………………..

$st(w)=$…... $a_4=$……, $a_3=$….., $a_2=$….., $a_1=$….., $a_0=$…….

c) $w(x)=2x^2-3+x^3=$……………………………………………………….

$st(w)=$…… $a_3=$….., $a_2=$….., $a_1=$….., $a_0=$…….

Zadanie 3. Napisz wzór wielomianu trzeciego stopnia o podanych współczynnikach.

a) $a_0=-5,\ a_1=4,\ a_2=-3,\ a_3=2$ $w(x)=2x^3-3x^2+4x-5$

b) $a_0=-\frac{1}{2},\ a_1=0,\ a_2=\frac{3}{4},\ a_3=-3$ ……………………………………….

c) $a_0=a_2=0,\ a_1=a_3=-5$ ……………………………………….

Zadanie 4. Oblicz wartości wielomianu $w(x)=x^3-3x^2+7x-5$ dla $x=3$ oraz dla $x=-3$.

$w(3)=3^3-3\cdot3^2+7\cdot3-5=$ ………………………………………………………………………

$w(-3)=$ ……………………………………………………………………………………………

Zadanie 5. Oblicz wartości wielomianu $w(x)=x^5-x^4+x^2-3x+5$ dla $x=\frac{1}{2}$ i dla $x=-\frac{1}{2}$.

$w\left(\frac{1}{2}\right) =$ …………………………………………………………………………………………..

$w\left(-\frac{1}{2}\right) =$ …………………………………………………………………………………………

Zadanie 6. Wyznacz wyraz wolny a_0 wielomianu $w(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + a_0$, jeśli:

a) $w(1) = 5$

………………………………………………

………………………………………………

……………………………………………..

b) $w(-1) = -3$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

c) $w(2) = 3$

………………………………………………

………………………………………………

……………………………………………..

d) $w(-2) = -40$

…………………………………………………

…………………………………………………

…………………………………………………

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Suma, różnica i iloczyn wielomianów.

Zadanie 1. Dane są wielomiany: $W(x)=2x^3+3x-7$ i $P(x)=-5x^3-3x+2$. Wykonaj działania:

a) $W(x)+P(x)=$ ………………………………………………………………………………………..…..…

……

b) $W(x)-P(x)=$ ……………………………………………………………………………………………..

……

c) $5W(x)-2P(x)=$ ……………………………………………………………………………………….

……

d) $P(x)\cdot(x+2)$ =………………………………………………………………………………………………

…….

Zadanie 2. Wykonaj działania na wielomianach uporządkuj je

$W(x)=x^3+2x-4$

$P(x)=-4x^2-7x+1$

$R(x)=x+2$

$R(x)-W(x)=$

$(x+2)\cdot W(x)=$

$x\cdot P(x)+R(x)=$

$6P(x)+2R(x)=$

$W(x)\cdot R(x)=$

$x^7 \cdot R(x) =$

$R(x) - W(x) =$

$W(x) - 4R(x) =$

$x \cdot W(x) - x^2 \cdot R(x) =$

$R(x) \cdot R(x) =$

$-W(x) \cdot x - P(x) =$

Zadanie 3. Dane są wielomiany: $W(x) = 2x^2 - 3$, $P(x) = x^3 + x - 2$. Wykonaj działania i uporządkuj wielomiany:

a) $3P(x) - 2W(x) =$

b) $W(x) \cdot P(x)$

c) (x - 1)*W(x)* + (3x - 2)*P(x)* =

Zadanie 4. Dane są wielomiany: $W(x) = 3x^3 + 2$, $Q(x) = 2x^2 - 3$, $R(x) = 3x + 2$. Uporządkuj wielomian: $9 \cdot Q^2 - 4 \cdot W \cdot R$. Określ jego stopień.

Zadanie 5. Dane są wielomiany: $W(x) = 2x^2 + 3$, $Q(x) = 3x - 2$, $R(x) = 3x^3 - 2$. Uporządkuj wielomian: $4 \cdot Q \cdot R - 9 \cdot W^2$. Określ jego stopień.

Zadanie 6. Dane są wielomiany: $W(x) = ax^3 + 3x^2 - (b + 4)x + c$ oraz $Q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 5x$. Dla jakich wartości parametrów a, b, c wielomiany $W(x)$ i $Q(x)$ są równe?

Zadanie 7. Dane są wielomiany: $W(x) = x^3 + 2x - 4$ oraz $Q(x) = ax^3 + bx^2 + (c - a)x + d + b$. Dla jakich wartości parametrów a, b, c wielomiany $W(x)$ i $Q(x)$ są równe?

Zadanie 8. Dane są wielomiany $W(x) = x^2 + x - 1$, $Q(x) = ax + b$, $P(x) = x^3 + 4x + 6x^2 - 5$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby $W(x) \cdot Q(x) = P(x)$.

Zadanie 9. Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d wielomiany $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ i $Q(x)=3(x-2)^2-5(x-2x^3)$ są równe?

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Dzielenie wielomianów.

Zadanie 1. Wykonaj dzielenie wielomianów. Podaj iloraz i resztę.

a) $\left(x^4-3x^3-x^2+2x+6\right):\left(x-2\right)$

$$\begin{array}{l}
\quad x^3-x^2-3x-4 \\
\hline
(x^4-3x^3-x^2+2x+6):(x-2) \\
\underline{-x^4+2x^3} \\
\qquad -x^3-x^2+2x+6 \\
\qquad \underline{x^3-2x^2} \\
\qquad\quad -3x^2+2x+6 \\
\qquad\quad \underline{3x^2-6x} \\
\qquad\qquad -4x+6 \\
\qquad\qquad \underline{4x-8} \\
\qquad\qquad\quad -2
\end{array}$$

Iloraz: x^3-x^2-3x-4 Reszta: -2

b) $\left(x^3+x-2\right):\left(x-1\right)$

Iloraz:……………………… Reszta: …………….

c) $\left(x^3+2x^2-3x-10\right):\left(x-2\right)$

Iloraz:…………………… Reszta: ……………

d) $\left(x^3-1\right):\left(x-1\right)$

Iloraz:…………………….. Reszta: ……………

Zadanie 2**.** Wykonaj dzielenie wielomianów:

$$\left(x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 7x - 3\right):\left(x^2 - x + 3\right).$$

Zadanie 3.Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$

a) $w(x) = x^3 - 5x + 4,\ q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 6x^3 + x^2 - x + 4,\ q(x) = 3x - 1$

Zadanie 4. Oblicz resztę z dzielenia wielomianów, nie wykonując dzielenia

a) $\left(3x^4+x^2+1\right):\left(x+2\right)$

b) $\left(x^3-5x^2+8x-2\right):\left(x-5\right)$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Pierwiastki wielomianu.

Zadanie 1. Sprawdź, która z liczb -1, 0, 2 jest pierwiastkiem wielomianu w, gdy $w(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

………

………

………

………

Zadanie 2. Sprawdź, korzystając z twierdzenia Bezouta, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q.

a) $w(x) = 3x^2 - 7x + 2, \quad q(x) = x - 2$

Należy sprawdzić, czy $w(2) = 0$.

$w(2) =$ ………………………………………

b) $w(x) = 5x^4 - 3x^3 + x - 2, \quad q(x) = x - 1$

………

………

c) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, \quad q(x) = x + 3$

………

………

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia Bezouta sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u.

$a)$ $w(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

$u(x) = (x+1)(x-2)$

Należy sprawdzić, czy $w(-1) = w(2) = 0$.

$b)$ $w(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 15$

$u(x) = x^2 - 9$

c) $w(x) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1$

$u(x) = (3x-1)(x-1)$

Zadanie 4.Dla jakich wartości parametru k wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

a) $w(x) = x^3 + kx^2 - x - 2, \quad q(x) = x - 2$

Należy sprawdzić, dla jakich wartości parametru k zachodzi równość $w(2) = 0$

$w(2) = 8 + 4k - 2 - 2 = 4k + 4$

$4k + 4 = 0$

$k = -1$

b) $w(x) = kx^3 - 6x^2 + k^2 x, \quad q(x) = x - 1$

c) $w(x) = x^3 + 3x^2 + k^2 x, \quad q(x) = x + 2$

Zadanie 5. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Przedstaw wielomian w w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopni niższych niż stopień wielomianu w.

a) $w(x) = 2x^3 + 6x^2 - 9x - 4, \quad a = -4$

b) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1, \quad a = \frac{1}{2}$

c) $w(x) = 6x^3 - 19x^2 + x + 6, \quad a = 3$

Zadanie 6. Oblicz wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu w.

a) $w(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$

dzielniki wyrazu wolnego:…………………………………….

$w(-1) =$ ....

$w(\quad) =$ ....

$w(\quad) =$ ....

$w(\quad) =$ ....

Pierwiastki całkowite:………………………………………..

b) $w(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

dzielniki wyrazu wolnego:…………………………………….

$w(-1) =$ ....

$w(\quad) =$ ....

$w(\quad) =$ ....

$w(\quad) =$ ....

$w(\quad) =$ ....

$w(\quad) =$ ....

Pierwiastki całkowite:………………………………………..

Zadanie 7. Oblicz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu w, gdy:

a) $w(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$

b) $w(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

c) $w(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 2$

Zadanie 8. Podaj pierwiastki wielomianu w i określ jego stopień

a) $w(x) = 3(x-3)(x+2)(4-x)$ ………………………………………………………

b) $w(x) = (x-\sqrt{2})(x+3)(x+1)$ ………………………………………………………

c) $w(x) = -4x(3+x)(5-x)(x-7)$………………………………………………………………

d) $w(x) = 3x(x-5)(x+\sqrt{3})$ ……………………………………………………….

Zadanie 9. Podaj pierwiastki wielomianu w oraz określ krotność każdego z nich. Określ stopień wielomianu.

a) $w(x) = x^5(x+3)^5(x-2)^2$

b) $w(x) = 6x(x+2)^2(x-2)^4$

c) $w(x)=x^3(x-2)^2(x+5)^4$

d) $w(x)=(x+3)^2(x-9)^2$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Rozkład wielomianu na czynniki.

Zadanie 1.Stosując wzory skróconego mnożenia rozłóż wielomian w na czynniki:

a) $w(x) = 25x^2 - \frac{1}{4} =$ ....

b) $w(x) = 4 - 16x^2 =$ ....

c) $w(x) = 16x^4 - 1 =$ ....

d) $w(x) = 9x^2 - 12x + 4 =$ ....

e) $w(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} =$ ....

f) $w(x) = x^3 + 27 =$ ....

g) $w(x) = 8x^3 - 1 =$ ....

h) $w(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 =$ ....

Zadanie 2. Rozłóż wielomian na czynniki wyłączając przed nawias wspólny czynnik:

a) $w(x) = 6x^2 + 3x = 3x(\qquad\qquad\qquad)$

b) $w(x) = 12x^5 - 15x^4 = 3x^4(\qquad\qquad\qquad)$

c) $w(x) = 10x^3 - 5x^4 =$ ....

d) $w(x) = -8x^7 + 2x^6 =$ ....

e) $w(x) = x^2(x-3) + 4(x-3) =$ ....

f) $w(x) = 2x(x+5) - 3(x+5) =$ ....

g) $w(x) = (2x+3)(x-5) + 4(x-5) =$ ....

Zadanie 3. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynu, jeśli jest to możliwe:

a) $w(x) = x^2 - x - 30$

Chcemy przedstawić wielomian w w postaci $w(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami wielomianu w.
Wyznaczamy więc jego pierwiastki.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 121 \qquad \sqrt{\Delta} = 11$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-11}{2} = -5 \qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+11}{2} = 6$

Zatem $w(x) = (x+5)(x-6)$.

b) $w(x) = 2x^2 + 3x - 5$

………

………

……

………

……..

c) $w(x) = 3x^2 - 3x + 1$

………

………

……

………

………

d) $w(x) = 9x^2 + 12x + 4$

………

………

……

………

Zadanie 4. Rozłóż wielomian na czynniki, grupując jego wyrazy:

a) $w(x) = \underline{x^3 + 2x^2} + \underline{3x + 6} = x^2(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x^2+3)$

czynnik $x^2 + 3$ jest nierozkładalny

$b)$ $w(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 =$ ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$c)$ $w(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 10$

………

……

$d)\ w(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2 =$ ……………………………………………………………………………

……

$e)\ w(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 8x =$ ………………………………………………………………………………

……

Zadanie5. Rozłóż wielomian na czynniki:

$a)\ W(x) = x^2 - 1 =$

$b)\ W(x) = x^2 - 36 =$

$c)\ W(x) = x^4 - 625 =$

$d)\ W(x) = 81x^4 - 25 =$

$e)\ W(x) = 100x^4 - 4 =$

$f)\ W(x) = 5x^4 + 20x^2$

$g)\ W(x) = x^2(2x-1) + 2x - 1$

$h)\ W(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$i)\ W(x) = x^3 - 10x^2 + 9x =$

$j)\ W(x) = 36x^4 - 1 =$

$k)\ W(x) = 2x^4 - 8x^2$

$l)\ W(x) = 25x^2(x+2) - (x+2)$

$m)\ W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15$

$n)\ W(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$

o) $W(x)=x^5+17x^3$

p) $W(x)=x^2(x-1)-4(x-1)$

r) $W(x)=x^3-x^2+x-1$

s) $W(x)=x^3+5x^2+4x$

t) $W(x)=x^3-1$

u) $W(x)=x^6+27x^3$

w) $W(x)=x^2(x+3)+x+3$

x) $W(x)=x^3+2x^2-9x-18$

y) $W(x)=x^3+x^2-20x$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Równania wielomianowe.

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

a) $(x-3)(2x+4)(x-5)=0$

$$x-3=0 \quad \text{lub} \quad 2x+4=0 \quad \text{lub} \quad x-5=0$$

$$2x=-4$$

$$x=3 \quad \text{lub} \quad x=-2 \quad \text{lub} \quad x=5$$

b) $5(3-2x)(x+3)(-2x+1)=0$

c) $2x^2(x+7)(2x+8)=0$

d) $(x^2-1)(x+3)^3(2x-6)=0$

e) $(x^2-16)(x^2-2x+1)=0$

Zadanie 2. Rozwiąż równania:

a) $4x^3 - 12x^2 = 0$

$4x^2(x-3) = 0$

$4x^2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 3 = 0$

$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 3$

b) $5x^4 + x^2 = 0$

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

…………………………………………………………………

c) $3x^4 + 6x^2 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 = 0$

Zadanie 3. Rozwiąż równania:

a) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$

$x(x^2 - 5x + 4) = 0$

$x = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 \quad \sqrt{\Delta} = 3$

$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

zatem $x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 1 \quad \text{lub} \quad x = 4$

b) $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$

c) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 = 0$

d) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2 = 0$

Zadanie 4. Rozwiąż równania, odpowiednio grupując wyrazy.

a) $x^3 - 4x^2 + 5x - 20 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

c) $2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = 0$

d) $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$

Zadanie 5. Rozwiąż równania:

a) $3x^4 + 6x^3 = 3x^2$

b) $4x^5 - x = 0$

c) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$

d) $x^4 + 3x^3 = 3x^3 + x$

e) $6x^3 + 2x^2 = 3x + 1$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Nierówności wielomianowe.

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-2)(x+2)(x-5) \leq 0$

b) $(x-1)(x+2)(4-x) \leq 0$

c) $(x-2)(x^2-9) < 0$

$d)$ $(x+2)^2(x^2-1) > 0$

e) $x^3 - 5x^2 + 6x \geq 0$

f) $-2x^4 - 4x^3 + 6x^2 \leq 0$

g) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 < 0$

h) $2x^3 + 4x^2 - 16x \geq 0$

i) $-4x^4 + 4x^2 < 0$

j) $3x^3 - 6x^2 + 3x \geq 0$

k) $-x^3 + 6x^2 + 7x \geq 0$

l) $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 > 0$

m) $x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0$

T: Powtórzenie wiadomości - wielomiany.

Zadanie1.Wielomian $x^2(4x+5)-(x+1)(3x^2-1)$ jest równy wielomianowi:

A. $W(x)=2x^2+x+x^3+1$

B. $W(x)=x^3+2x^2+x+1$

C. $W(x)=x^3+x^2+2x+2$

D. $W(x)=x^3-x^2+2x-2$

Zadanie 2.Pierwiastkami wielomianu $W(x)=3(x+6)(x+1)(x-4)$ są liczby:

A. 6, 1, -4

B. -6, 1, -4

C. -6, -1, 4

D. -6, -1, - 4

Zadanie 3. Rozkładem wielomianu x^4-16 na czynniki jest rozkład:

A. $(x^2-4)(x^2+4)$

B. $(x+2)^2(x^2+4)$

C. $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

D. $(x+2)^2(x^2-4)$

Zadanie 4. Wielomian $W(x)=x^3-3x+2$ dzieli się bez reszty przez dwumian:

A. $x-1$

B. $x+3$

C. $x+2$

D. x - 3

Zadanie 5. Rozwiązaniami równania $x^3-4x^2-x+4=0$ są liczby:

A. 4, 1, -1

B. -2, 2, -1

C. 2, 4, -1

D. -2, 1, 4

Zadanie 6. Rozkładem wielomianu $W(x)=2x^3+4x^2+2x$ na czynniki jest rozkład:

A. $2x(x+1)^2$

B. $-2x(x+1)(x-1)$

C. $2(x+1)x(x+1)$

D. $2x(x-1)^2$

Zadanie 7.Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)=x^3+2x^2-13x+10$ przez dwumian $Q(x)=x-2$ i podaj wynik dzielenia.

Zadanie 8. Uporządkuj wielomian $W(x) = x^2(x-2) - (x+3)(2x^2 - 1)$ i podaj jego stopień

Zadanie 9. Dane są wielomiany: $W(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 1$ i $P(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$. Oblicz: $P(x) - 2W(x)$ oraz $P(x) \cdot W(x)$

Zadanie 10. Rozłóż wielomiany na czynniki:

$W(x) = (3x^2 + 1)(x-1) - (3x^2 + 1)(2x+5)$

$W(x) = 25x^2 - 4$

$W(x) = 9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$

$W(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 9$

$W(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x$

Zadanie 11. Rozwiąż równania i nierówności:

a) $x^3-7x^2 - 3x + 21 = 0$

b) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

c) $(x - 1)(x + 1)^2(x - 2)^3 > 0$

d) $3x^3+6x^2+7x+14 \leq 0$

BAZA ZADAŃ - WIELOMIANY

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x.$ Wielomian W(x) + P(x) jest równy:

A. $5x^2 + 12x - 3$ C. $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$

B. $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$ D. $4x^3 + 12x^2 - 3$

Zadanie 2.Stopień iloczynu wielomianów W i G, gdy W(x) = $3x^2 - 2x$ i G(x) = $2x^2 + 3x$ jest równy:

A.6 B. 5 C. 4 D. 3

Zadanie 3.Jeżeli x – y = -5 i x + y = 11, to wartość wyrażenia $x^2 - y^2$ jest równa

A. -96 B. -55 C. -16 D. 16

Zadanie 4. Liczby -3, 3, -1, 1 są pierwiastkami wielomianu:

$A. W(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$ $B. W(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

$C. W(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$ $D. W(x) = (x^2 + 9)(x^2 - 1)$

Zadanie 5. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 - 3x + 2.$ Parametr m jest równy.

A.2 B. -2 C. 1 D. -1

Zadanie 6. Liczba pierwiastków wielomianu P(x) określonego wzorem $P(x) = (x - 5)(x + 3)(x^2 - 2x + 2)$ jest równa:

A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

Zadanie 7. Wielomian W(x) = $x^3 - 6x^2 + 9x$ można zapiać w postaci:

$A. W(x) = x(x + 3)^2$ $B. W(x) = x(x - 3)^2$

$C. W(x) = x(x - 3)(x + 3)$ $D. W(x) = (x^2 - 3)^2$

Zadanie 8. Wielomian W = $x^4 - 8x^2 + 16$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

A. $(x^2 + 4)^2$ B. $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$ C. $(x \ + 2)^4$ D. $(x - 2)^2(x + 2)^2$

Zadanie 9. Wyrażenie $27x^3 + y^3$ jest równe iloczynowi:

A. $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$ B. $(3x + y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

C. $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$ D. $(3x - y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

Zadanie 10. Wskaż wielomian, którego nie można rozłożyć na czynniki:

$A. W(x) = 6 - x^3$ $B. A(x) = x(x - 1) + 2(x - 1)$

$C. P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ $D. K(x) = x^2 + 4$

Zadanie 11**.** Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 9.$ Wartość tego wielomianu dla x = $-\sqrt{2}$ jest równa:

A. $-7\sqrt{2} - 13$ B. $-3\sqrt{2} - 5$ C. $-7\sqrt{2} - 5$ D. $-3\sqrt{2} - 13$

Zadanie 12. Po rozłożeniu wyrażenia $4x^3y^2 - 8xy + 12x^2y^3$ na czynniki otrzymamy:

A. $4xy(x^2y - 2 + 3xy^2)$ B. $4x^3y^2(x - 2 + 3y)$ C. $4xy(x^2y + 2 + 3xy^2)$

D. $4x^2y^2(x - 2 + 3y)$

Zadanie 13. Jeżeli $2a = -1$, to wartość wyrażenia $(4 - 4a)^2$ jest równa:

A. 2 B. 4 C. 6 D.36

Zadanie 14. Wyrażenie $x(x - 2y) + 3(xy - y^2)$ jest równe:

A. $x^2 + xy - y^2$ B. $x^2 + xy - 3y^2$ C. $x^2 - 2y + 3xy - y^2$ D.$x^2 - 5xy - 3y^2$

Zadanie 15. Jeżeli $x^2 + 7x + 15 = (x + 5)(x + 2) + a$, to liczba a jest równa:

A. -10 B. -5 C. 5 D. 10

Zadanie 16. Wyrażenie 3(x - 2) – 4x(2 - x) można zapisać w postaci:

A. 12x(x - 2) B. (3 + 4x)(2 - x) C. (3 + 4x)(x - 2) D. (4x - 3)(x - 2)

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1. Oblicz współczynnik a wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = x^2 - ax + 3,\ w(2) = 1$

b) $w(x) = x^3 - ax^2 - 4x,\ w(3) = 6$

c) $w(x) = ax^5 - 6x + 4,\ w(-2) = 0$

Zadanie 2. Oblicz współczynniki $p\ i\ q$ wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = 2x^3 - px^2 + q,\ w(0) = 3,\ w(-1) = 4,$

b) $w(x) = -x^4 + px^3 - qx + 10,\ w(2) = 30,\ w(5) = 0$.

Zadanie 3.Dane są wielomiany: $W(x) = 5x^2 + 4$, $Q(x) = 2x^3 + 5x^2$, $R(x) = x^6 - 3x + 2$. Oblicz:

a) W^3

b) $10R - W \cdot Q$

Podaj odpowiedź w postaci uporządkowanego wielomianu. Określ jego stopień.

Zadanie 4.Dane są wielomiany: $W(x) = 5 + 4x^2$, $Q(x) = 3x^2 - 6x^3$, $R(x) = x^5 - 7x^2 + 8$. Oblicz:

a) W^3

b) $2R - 3W \cdot Q$

Podaj odpowiedź w postaci uporządkowanego wielomianu. Określ jego stopień.

Zadanie 5. Dane są wielomiany: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $W(x) = x^2 + x - 1$, $Q(x) = x - 1$. Uporządkuj wielomiany:

a) $W(x) - 2P(x) + Q(x)$

b) $W(x) \cdot Q(x)$

c) $(Q(x))^2 - P(x)$.

Zadanie 6.Dane są wielomiany: $W(x) = 6x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, $Q(x) = 3x^2 + x$, $P(x) = 3 - 2x$. Uporządkuj wielomian: $Q \cdot P - W$.

Zadanie 7.Dla jakich wartości parametrów a , b , c , d wielomiany $W(x) = 2x(2x-1)^2 - (4x-3)$ i $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ są równe?

Zadanie 8.Dla jakich wartości parametrów a , b , c wielomiany $W(x) = 5x^2(x+4) - 3(x-1)$ i $Q(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c$ są równe?

Zadanie 9.Dane są wielomiany: $W(x) = 2x^3 + ax^2 + (b-4)x - c$ oraz $Q(x) = 2x^3 + 5x + 8$. Dla jakich wartości parametrów a , b , c wielomiany $W(x)$ i $Q(x)$ są równe?

Zadanie 10. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ były równe, jeśli $W(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 7$, $P(x) = 2x^3 + (b-a)x^2 + (2a+3b)x - 7$.

Zadanie 11. Wykonaj dzielenie wielomianów. Podaj iloraz i resztę.

a) $(2x^2 - 3x + 4) : (x - 3)$

b) $(12x^2 - x - 6) : (3x - 1)$

c) $(x^3 + 2x^2 - 9x - 4) : (x - 3)$

d) $(12x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 6) : (2x^2 - 1)$

Zadanie 12.Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$:

$a)\ w(x) = x^3 + 3x^2 - x + 5, \quad q(x) = x - 2$

$b)\ w(x) = 2x^3 + 4x^2 + x, \quad q(x) = x + 3$

$c)\ w(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2x, \ q(x) = x^2 - 2x$

Zadanie 13.Nie wykonując dzielenia podaj resztę z dzielenia: $x^5 - 4x^3 - 3x^2 - 2x - 5$ przez $x + 1$.

Zadanie 14. Sprawdź, czy wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ nie wykonując dzielenia.

Zadanie 15. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w. Przedstaw wielomian w w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopni niższych niż stopień wielomianu w.

$a)\ w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2, \quad a = -2$

$b)\ w(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12, \quad a = 2$

$c)\ w(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12, \quad a = \frac{3}{2}$

Zadanie 16. Dla jakich wartości parametru k wielomian określony wzorem $W(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x + k$ jest podzielny przez dwumian $(x + 2)$?

Zadanie 17.Dla jakich wartości parametru k wielomian $w(x) = 2x^2 - kx - 1$ jest podzielny przez dwumian $q(x) = 2x - 1$?

Zadanie 18. Oblicz wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu w.

a) $w(x) = x^3 - x^2 - 7x + 3$

b) $w(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

c) $w(x) = 2x^3 + 5x^2 - 11x + 4$

d) $w(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

Zadanie 19.Oblicz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu w, gdy:

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$

b) $w(x) = x^3 - x^2 - 8x - 4$

c) $w(x) = 4x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

d) $w(x) = 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2$

Zadanie 20. Podaj pierwiastki wielomianu. Określ ich krotność.

a) $w(x) = (x + 4)^2 (x - 1)$

b) $w(x) = 3x(2x + 8)^3 (x + 3)^2$

c) $w(x) = -4x^3 (5x - 1)^2 (x + 2)$

d) $w(x) = (x^2 + 4)(x + 5)(x - 2)^4$

Zadanie 21. Rozłóż wielomiany na czynniki:

a) $64x^2 - 9$

b) $64x^4 - 9x^2$

c) $81x^4 - 36$

d) $8x^3 + 1$

e) $-5x^6 + 4x^5 - 10x^4 + 8x^3$

f) $3x^3 - 4x^2 - 6x + 8$

g) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

h) $5x^6 - 10x^5 + 4x^4 - 8x^3$

i) $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

j) $2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 20x^2$

Zadanie 22. Rozwiąż równanie:

a) $(3 - 2x)(x^2 - 3x + 2) = 0$

b) $\left(x^2+1\right)\left(3x+2\right)=0$

c) $\left(5x-2\right)\left(4-x^2\right)=0$

d) $\left(x^2+3x\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2+4x+4\right)=0$

e) $x^3-x=0$

f) $2x^2-9x+7=0$

g) $x^4-13x^2+36=0$

h) $2x^3-5x^2-8x+20=0$

i) $x^3+5x^2-x-5=0$

j) $x^3-7x^2-4x+28=0$

k) $x^3-5x^2-x+5=0$

l) $x^3-3x^2+4x-12=0$

m) $x^3+2x^2=16x+32$

Zadanie 23. Rozwiąż nierówność:

a) $(x - 3)(x+ 2)(x - 5) < 0$

b) $(x + 4)(2 - x)(x - 3) > 0$

c) $(x^2 - 1)(x + 1) \leq 0$

d) $x(x - 1)(x - 5)(x + 2) \geq 0$

e) $(x^2-1)(x^2-3x + 2)< 0$

f) $(x^2- x - 6)(x^2+2x - 3)\leq 0$

g) $(x^2-9)(x^2-5x+4) > 0$

h) $x^3-x^2> x-1$

i) $x^3+2x^2-x-2 > 0$

j) $x^3-3x^2+3x-9 \leq 0$

k) $2x^3-x^2-2x+1 \geq 0$

WYRAŻENIA WYMIERNE

Wyrażeniem wymiernym nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{W}{P}$, gdzie W i P są wielomianami jednej zmiennej lub wielu zmiennych, a wielomian P nie jest wielomianem zerowym.

Wyrażenie wymierne ma sens liczbowy dla tych wartości zmiennych, dla których wielomian występujący w mianowniku tego wyrażenia ma wartości różne od zera.

Zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jest określona wartość liczbowa tego wyrażenia jest **dziedziną wyrażenia wymiernego.**

Dwa wyrażenia wymierne nazywamy równymi, jeśli mają równe dziedziny i przyjmują takie same wartości dla jednakowych wartości zmiennych.

T: Wyrażenie wymierne i jego dziedzina.

Zadanie 1. Dla podanych wartości zmiennych, oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{3x-1}{x^2+2x}$ $dla\ x = -3$

b) $\frac{4y-xy}{x+2y}$ $dla\ x = -1\ i\ y = 5$

c) $\frac{(x-5)^3}{(x+7)^2}$ $dla\ x = -7$

d) $\frac{2x+\sqrt{1-2x+x^2}}{x-1}$ $dla\ x = 3$

Zadanie 2. Określ dziedzinę wyrażenia wymiernego

a) $\frac{5x^2}{4-x}$

b) $\frac{x}{x+5}$

c) $\frac{3}{2-5x}$

$4-x \neq 0$

$x \neq 4$

zatem $D = R \setminus \{4\}$

d) $\frac{5-2x}{x^2-6x}$ e) $\frac{x^2-1}{x^2+2x}$ f) $\frac{2x+3}{x^2-9}$

$x^2-6x \neq 0$

$x(x-6) \neq 0$

zatem $D = R \setminus \{0,6\}$

g) $\frac{x^2+x+3}{x^2(3x-5)}$ h) $\frac{5+x-6x^2}{2x^2-7x-4}$

i) $\frac{x^2}{x^2+x-6}$ j) $\frac{4x}{x^2+64}$

k) $\frac{4x^2-1}{x^3-27}$ l) $\frac{3x-7}{64+x^3}$

m) $\frac{x^3+2x-1}{x^3+4x}$

n) $\frac{2x^2-3x+5}{x^3+2x^2-4x-8}$

o) $\frac{4-x^2}{x^3-2x^2+9x-18}$

Zadanie3. Skreśl liczby, które nie należą do dziedziny wyrażenia wymiernego. Zaznacz liczby, dla których wyrażenie przyjmuje wartość 0.

a) $\frac{x^2-x}{x-1}$, -1, 0, 1

b) $\frac{x}{x^2-1}$, -1, 0, 1

c) $\frac{x^2+x}{x^2}$, -1, 0, 1

d) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$, -1, 0, 1

e) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$, -1, 0, 1

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Skracanie i rozszerzanie wyrażeń wymiernych.

Zadanie 1. Ustal dziedzinę i skróć wyrażenie:

a) $\frac{4x^2}{x^2-x}$

$x^2 - x \neq 0 \; czyli..................$

$zatem \; D = ...$

$$\frac{4x^2}{x^2-x} = \frac{4x^2}{x(x-1)} = \frac{4x}{x-1}$$

b) $\frac{2x^2-4x}{x-2}$

c) $\frac{2x^3-32x}{3x^2+12x}$

d) $\frac{4x^2-100}{x^2-10x+25}$

e) $\frac{4x^2-12x}{x^2-9}$

f) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

g) $\frac{7x^2-7x}{5x^2-25x}$

h) $\frac{x^2+4x+4}{x^3+2x^2-5x-10}$

Zadanie 2. Rozszerz wyrażenie, mnożąc licznik i mianownik przez wyrażenie podane obok. Określ dziedzinę otrzymanego wyrażenia.

a) $\frac{x+3}{x-3}$, $4x$

b) $\frac{x-5}{x+2}$, $x-1$

c) $\frac{x^2}{1-x}$, $x+1$

Zadanie 3. Sprowadź do wspólnego mianownika wyrażenia:

a) $\frac{8x}{x-1}$ i $\frac{2x-9}{3x-3}$

b) $\frac{x+13}{(x-6)(x+5)}$ i $\frac{3x-6}{x+5}$

c) $\frac{4}{x^2}$ i $\frac{5x}{x^2+7x}$

d) $\frac{6x}{x^2+x-2}$ i $\frac{3}{x^2+5x+6}$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych.

Zadanie 1. Określ dziedzinę i wykonaj mnożenie. Wynik przedstaw w najprostszej postaci

a) $\frac{x^2-25}{x^2+6x}\cdot\frac{x+6}{2x-10}$ $\quad x^2+6x\neq 0$ *oraz* $2x-10\neq 0$ *zatem* $D=R\setminus\{-6,0,5\}$

$$\frac{x^2-25}{x^2+6x}\cdot\frac{x+6}{2x-10}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x+6)}\cdot\frac{x+6}{2(x-5)}=\frac{x+5}{2x}$$

b) $\frac{5}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{x-3}$

c) $\frac{12}{3x^2-4x}\cdot\frac{x}{18x+6}$

d) $\frac{3x^2+3x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{6x}$

e) $\frac{x^2-25}{x^2+6x}\cdot\frac{x^2+12x+36}{x^2-3x-10}$

Zadanie 2. Określ dziedzinę i wykonaj działania:

a) $\frac{x+3}{x^2-16}:\frac{2x^2+6x}{x+4}$ W celu określenia dziedziny, zakładamy, że mianowniki oraz licznik drugiego wyrażenia są różne od 0 $x^2-16\neq 0$ $x+4\neq 0$ $2x^2+6x\neq 0$. Zatem $D=R\setminus\{-4,-3,0,4\}$

$$\frac{x+3}{(x-4)(x+4)}:\frac{2x(x+3)}{x+4}=\frac{x+3}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{x+4}{2x(x+3)}=\frac{1}{2x(x-4)}=\frac{1}{2x^2-8x}$$

b) $\frac{x-1}{2x+10}:\frac{2x-2}{x^2+5x}$

c) $\frac{x+2}{3x^2+15x}:\frac{x^2-4}{x+5}$

d) $\frac{2x^2-18}{x}:(x+3)$

e) $\frac{x-4}{x^2-x}:\frac{x^2-16}{x}$

f) $\frac{2x+1}{x^2+2x-3} : \frac{2x^2-7x-4}{x^2-x-12}$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych.
Zadanie 1. Wykonaj dodawanie. Wynik podaj w najprostszej postaci

a) $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-3}{1-x}=\frac{(x-2)(1-x)}{(x-1)(1-x)}+\frac{(x-3)(x-1)}{(1-x)(x-1)}=\frac{x-x^2-2+2x+x^2-x-3x+3}{x-x^2-1+x}=\frac{-x+1}{-x^2+2x-1}$

$D=R\setminus\{1\}$

b) $\frac{2x}{x+1}+\frac{x-1}{3-x}$

c) $\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}$

d) $\frac{3}{x^2-1}+4$

e) $\frac{2}{3(x-4)}+\frac{x}{x^2-2x-8}$

f) $\frac{2x}{x^2-3x}+\frac{4-x}{x^2-6x+9}$

g) $\frac{x+2}{x^2-x-6}+\frac{x+1}{x^2+7x+10}$

Zadanie 2. Wykonaj odejmowanie. Wynik podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{x}-\frac{3}{3x-2}$

b) $\frac{5}{x-4}-\frac{2}{x}$

c) $\frac{10x^2-5x}{4x^2-9}-\frac{5x}{2x+3}$

d) $\frac{4}{x^2-6x}-\frac{2}{x^2+6x}$

Zadanie 3. Wykonaj działania. Wynik podaj w najprostszej postaci. Nie zapomnij o dziedzinie.

a) $\frac{4x}{x-1} - \frac{x+3}{x} + 5$

b) $\frac{2+x}{x} + \frac{3x-1}{x-3} - 2$

c) $\frac{3-x}{x+1} - \frac{7}{x} + 6 =$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Równania wymierne.

Zadanie 1. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+3}{x-5} = 0$

b) $\frac{x^2-6x}{x-7} = 0$

c) $\frac{6x-3}{x+3} = 3$

d) $\frac{x-5}{4-x} = -\frac{3}{4}$

e) $\frac{x}{x-5} = \frac{3}{2x}$

f) $\frac{x}{2x-1} + \frac{-4}{x+3} = 0$

g) $\frac{4x+11}{2x+3} = \frac{x+5}{x+1}$

h) $\frac{24}{x^2-9} - \frac{2}{3-x} + 4 = 0$

Zadanie 2. Określ liczbę pierwiastków równania

a) $\frac{x^2+x}{x^2-1}=0$

b) $\frac{2+x}{x^2+4}=0$

c) $\frac{4x+20}{x^2-25}=0$

d) $\frac{x(x^2-16)(x+3)}{x^3-9x}=0$

Zadanie 3. Licznik pewnego ułamka jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeżeli licznik tego ułamka zwiększymy o 4, a mianownik o 7, to wartość ułamka się nie zmieni. Wyznacz ten ułamek.

Zadanie 4. Mama Piotrka jest o 7 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy do wieku taty wynosi 6:7. Ile lat ma mama, a ile tata Piotrka?

Zadanie 5. Szkoła zamówiła seans filmowy dla uczniów klas trzecich. Koszt seansu wyniósł 1650zł. Ponieważ do kina nie przyszło 15 uczniów, pozostali musieli dopłacić po 1 zł za bilet. Jaka była planowana, a jaka rzeczywista cena biletów?

Zadanie 6. Pan Andrzej przeczytał książkę liczącą 720 stron, przy czym każdego dnia czytał taką samą liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej to przeczytałby tę książkę o 15 dni wcześniej. Ile dni czytał tę książkę?

Zadanie 7. Odległość między miastami A i B wynosi 540km. Pociąg ekspresowy pokonuje tę trasę w czasie o 3 godziny krótszym niż pociąg osobowy. Szybkość ekspresu jest większa od szybkości pociągu osobowego o 30km/h. Oblicz średnie prędkości obu pociągów

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Nierówności wymierne.

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{3x-5}{3+2x} < 0$

b) $\frac{x^2-2x}{x-2} > 0$

c) $\frac{2x-6}{x^2-7x} \leq 0$

d) $\frac{x-9}{x^2-10x-11} \leq 0$

e) $\frac{3-4x}{x+7} - 3 < 0$

f) $\frac{2-9x}{5+x} + 5 \geq 0$

g) $\frac{5}{2x} - \frac{7}{4x+3} \leq 0$

h) $\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{4x+3} \geq 0$

i) $\frac{-2}{(x+4)^2} - \frac{3}{x+4} < 0$

j) $\frac{1}{5-2x} > \frac{x}{(5-2x)^2}$

ZADANIE DOMOWE ☺

Wykonaj zadania numer …………………………………..

T: Powtórzenie wiadomości – wyrażenia wymierne.

Zadanie 1. Wykonaj działania

a) $\frac{x-4}{x+3}+\frac{x-1}{x+4}=$

b) $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x}=$

c) $\frac{x}{6-x}:\frac{x^2+x}{x^2-36}=$

d) $\frac{x}{x^2+5x}\cdot\frac{x^2-25}{x+2}=$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{-x-4}{x+2}=2$

b) $\frac{3}{2x+1}=\frac{7}{5x-1}$

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{x-4}{5x-10}\leq 0$

b) $\frac{-2x+9}{x-6}\geq -2$

Zadanie 4. Licznik pewnego ułamka jest równy 7. Jeśli mianownik tego ułamka zwiększymy o 12, a licznik o 14, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

Zadanie 5. Tytus jest o 8 lat starszy od Tymoteusza. Stosunek wieku Tytusa i Tymoteusza jest równy 3:2. Ile lat ma każdy z nich?

BAZA ZADAŃ – WYRAŻENIA WYMIERNE

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{3x^2-2}{x^2-16}$ jest zbiór:

A. R\ {16} B. R\{-4, 4} C. {-4, 4} D. R\{4}

Zadanie 2. Dla jakich wartości x wyrażenie $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}$ nie ma sensu liczbowego?

A. x = 2, x = -3 B. x = -2, x = 3 C. x = 2, x = 3 D. x = -2, x = -3

Zadanie 3. Wartość wyrażenia $\frac{2x^2-1}{3x^2-x-2}$ + $\frac{x}{2x-1}$ dla x = -1 wynosi:

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $1\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

Zadanie 4. Dla $x \neq 3$ i $x \neq -1$ wyrażenie $\frac{(x^2-9)(x-1)}{(x-3)(x^2-2x+1)}$ po skróceniu jest równe:

A. $\frac{x-3}{x-1}$ B. $\frac{x+3}{x+1}$ C. $\frac{x-3}{x+1}$ D. $\frac{x+3}{x-1}$

Zadanie 5. Rozszerzeniem wyrażenia $\frac{2x-1}{x+3}$ dla $x \neq -3$ jest wyrażenie:

A. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$ B. $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-9}$ C. $\frac{2x^2-7x+3}{x^2+9}$ D. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2+9}$

Zadanie 6. Rozwiązaniem równania $\frac{x^2-3}{2x-4}=0$ jest:

A. 2 i 3 B. $\sqrt{3}\ i -\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}\ i\ 2$ D. $\sqrt{3}\ i\ 2$

Zadanie 7. Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{x-3}{(5+x)(x+2)} = 0$

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Zadanie 8. Rozwiązaniem równania $\frac{4x}{2-x}$=3 jest liczba:

A.$\frac{5}{6}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{7}{6}$

Zadanie 9. Podaj liczbę rozwiązań równania $\frac{x^3-9x}{x^2+2x-3} = 0$:

A.0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 10. Rozwiązaniem równania $\frac{(x^2-4)(x^2-16)}{x-4} = 0$ **nie jest** liczba:

A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

Zadanie 11. Wyrażenie $\frac{8x-12x^2}{4x^2}, x \neq 0$ po uproszczeniu ma postać:

A.2-3x B. $\frac{2-12x}{x}$ C. $\frac{2-3x}{4x}$ D. $\frac{2-3x}{x}$

Zadanie 12. Rozwiązaniem równania $\frac{(x-2)(x+6)}{x^2-36} = 0$ jest:

A. 2 i -6 B . -6 C. 2 D. -6 i 6

Zadanie 13. Wartość wyrażenia $\frac{a^2-2ab}{a}$ dla $a = -\frac{1}{2}$ i b = 3 jest równa:

A. -5,5 B. -7,5 C. 7,5 D. -6,5

Zadanie 14. Rozwiązaniem równania $\frac{2x-3}{x} = \frac{x+1}{x}$ jest liczba

A. 4 B. -1 C. $\frac{3}{2}$ D. 0

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1. Dla podanych wartości zmiennych, oblicz wartość wyrażenia**:**

a) $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ $\quad dla\ x=-2$

b) $\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}$ $\quad dla\ \ x=4$

c) $\frac{x^3+4x}{x^2}$ $\quad dla\ \ x=\sqrt{2}.$

Zadanie 2. Spośród liczb: $-4,-2,-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2},2,4$ wypisz liczby nienależące do dziedziny danego wyrażenia wymiernego:

a) $\frac{5x^2+2x-7}{4x^3-64x}$

b) $\frac{11x^2+7x-9}{8x^4-16x^2}$

c) $\frac{6x^4-5x^2+x}{-2x^3+4x^2-2x}$

Zadanie 3. Określ dziedzinę wyrażenia wymiernego:

a) $\frac{5x^2}{4-x}$ b) $\frac{-7x^2+x}{(x+2)^2}$ c) $\frac{x^2-4}{x(x^2+1)}$ d) $\frac{x^3-1}{(x-2)(8-x)}$

e) $\frac{x^3+x^2}{x^3+9x^2}$ f) $\frac{x^2-4}{x^2+1}$ g) $\frac{4-x^2}{x^3+2x^2-4x-8}$ h) $\frac{x^2-1}{x^2+2x}$

i) $\frac{x^2+3x}{x^2-4}$ j) $\frac{x^2}{x^2+x-6}$ k) $\frac{2x+1}{x(x-2)(x+3)}$ l) $\frac{x^2-2}{x^3+5x^2+6x}$

m) $\frac{2-x}{(x+3)(x^2+4x+4)}$ n) $\frac{x^2-25}{x+5}$ o) $\frac{x^3-4x^2-2x+8}{9-x^2}$

Zadanie 4. Ustal dziedzinę i skróć wyrażenie:

a) $\frac{5x^2}{6x^3}$ b) $\frac{5x^3-3x^2}{4x^2}$ c) $\frac{4x-4}{5x-5}$ d) $\frac{x^2+2x-15}{2x^2-50}$

e) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$ f) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ g) $\frac{(x+1)^2(x-3)^2}{(x^2-9)(x^2-1)}$

Zadanie 5. Sprowadź do wspólnego mianownika wyrażenia:

a) $x\ \ i\ \ \frac{2x}{x-4}$

b) $x-4\ \ i\ \ \frac{6}{x-4}$

Zadanie 6. Określ dziedzinę i wykonaj mnożenie. Wynik przedstaw w najprostszej postaci

a) $\frac{3x}{4x-2}\cdot\frac{2x-1}{9x^2}$

b) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4x-5}\cdot\frac{x^2-6x+5}{x+2}$

c) $\frac{x^3+5x^2}{10x-5}\cdot\frac{15x-10}{2x^4}$

d) $\frac{2x-10}{x^2+x-6}\cdot\frac{x^2+2x-3}{10x^2-2x^3}$

Zadanie 7. Określ dziedzinę i wykonaj działania:

a) $\frac{x+3}{x^2-16}:\frac{2x^2+6x}{x+4}$ b) $\frac{x-2}{x^2-x}:\frac{x^2-4}{x}$ c) $3(x-6):\frac{x-6}{5}$

d) $\frac{x}{-3x+2}:\frac{x-5}{5x^2+x-4}$ e) $\frac{x^3-8}{6-2x}:\frac{x^2-2x}{x-3}$

Zadanie 8. Wykonaj dodawanie. Wynik podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{2x}{x+5}+2$ b) $\frac{4x^3}{x^2-4}+x$ c) $\frac{3}{x}+\frac{5}{2x-3}$

d) $\frac{x+2}{4x-x^2}+\frac{x-2}{x}$ e) $\frac{3}{x^2-2x}+\frac{4}{x^2+2x}$ f) $\frac{4x^2+1}{(x+1)(x-3)}+\frac{1-5x}{x-3}$

Zadanie 9. Wykonaj odejmowanie. Wynik podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{6x^3-4x}{3x^2-2x+5}-2x$

b) $\frac{4}{x-2}-\frac{5}{x+2}$

c) $\frac{3x+5}{x^2+2}-\frac{4}{x-2}$

d) $\frac{-3x}{5x-1}-\frac{x^4-6x^3}{10x^3-2x^2}$

Zadanie 10. Wykonaj działania. Wynik podaj w najprostszej postaci. Nie zapomnij o dziedzinie.

a) $\left(5+\frac{2}{x}\right)\cdot x^3$

b) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-3}\right):\frac{2x^2+6x}{x^2-9}$

c) $\left(\frac{x+1}{x}+\frac{x^2+x}{2}\right):\frac{x^2-1}{6x}$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-4}:\frac{x-3}{x+2}-\frac{1-x}{x-2}$

Zadanie 11. Rozwiąż równania

a) $\frac{3}{x}=4$ b) $-\frac{6}{x}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{4-x}{x+5}=2$ d) $\frac{2x-5}{x-4}=x$

e) $\frac{2x-9}{x-3}=x+3$ f) $\frac{-x+5}{x}=\frac{x}{7-x}$ g) $\frac{1}{x+4}-\frac{2}{x+1}=0$ h) $\frac{x}{x+2}=2-\frac{3}{x-1}$

Zadanie 12. Jakub ma 13 lat, a Weronika 9. Za ile lat stosunek wieku Jakuba do Weroniki wyniesie 4:3?

Zadanie 13. Licznik pewnego ułamka jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeżeli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka dwukrotnie wzrośnie. Wyznacz ten ułamek.

Zadanie 14. Koszt wynajmu autokaru wynosi 1440zł. Na wycieczkę pojechało o 3 uczniów mniej niż zaplanowano, co spowodowało wzrost opłaty dla każdego uczestnika o 2 zł. Ile osób pojechało na wycieczkę i jaki był koszt wycieczki dla każdego uczestnika?

Zadanie 15. Kierowca pomyślał, że odległość 208km może przejechać z pewną stałą prędkością v w czasie t. Gdyby jechał z prędkością o 13km/h większą, to tę samą trasę pokonałby w czasie o 0,8 godziny krótszym. O jakiej stałej prędkości pomyślał kierowca?

Zadanie 16. Kolarz pokonuje trasę 60km ze stałą prędkością. Gdyby jechał z prędkością o 1 km większą, to tę samą trasę pokonałby w czasie o 6 minut krótszym. Oblicz prędkość jazdy kolarza.

Zadanie 17. W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Zadanie 18. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{3}{x}<0$ b) $\frac{x-5}{x+3}>0$ c) $\frac{2x-6}{x^2-7x}\leq 0$ d) $\frac{x^2-4}{(x-2)(x-1)}\geq 0$

e) $\frac{(x+1)^2}{x^2-6x+9}<0$ f) $\frac{2x^2-x-3}{x^2+2x+3}<0$ g) $\frac{x^2-2x+6}{-x^2+x+2}>0$ h) $\frac{7}{x}>1$

i) $\frac{1-3x}{2-3x}\leq 2$ j) $\frac{5x}{4+x}>-1$ k) $\frac{6x+5}{3-2x}-4\geq 0$ l) $x+\frac{1}{x}\geq 0$

m) $\frac{5}{x}\leq\frac{x}{5}$ n) $\frac{1}{x-2}<\frac{7}{8x}$ o) $\frac{-5}{6x-2}\leq\frac{6}{3-5x}$ p) $\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\geq 0$