Spis treści

1. FUNKCJA LINIOWA

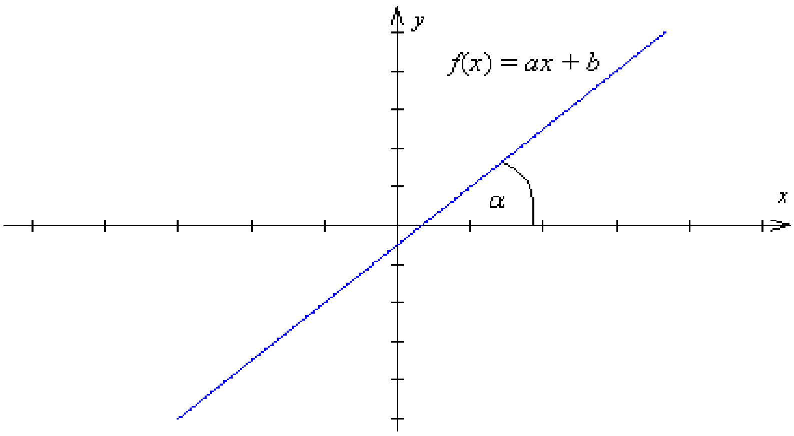
Temat: WZÓR I WYKRES FUNKCJI LINIOWEJ

Funkcję f określoną wzorem $f(x)=ax+b$, gdy $x\in R$ oraz $a,b\in R$ nazywamy **funkcją liniową.**

Wykresem funkcji liniowej jest prosta o równaniu $y=ax+b$

a – współczynnik kierunkowy prostej,

b – wyraz wolny



Zadanie 1. Wskaż, które z podanych wzorów są wzorami funkcji liniowej:

a) $f(x)=-x+3$ b) $f(x)=\sqrt{3x-1}$ c) $f(x)=\frac{8}{x}$

d) $f(x)=\frac{x+5}{2}$ e) $f(x)=7{,}2$ $f)$ $f(x)=-5-3x$

Zadanie 2. Oblicz wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2, gdy:

a) $f(x)=\frac{1}{3}x-3,\quad x_1=0, x_2=3$ b) $f(x)=4-2x,\quad x_1=2, x_2=5$

c) $f(x)=\pi x+5,\quad x_1=0, x_2=-3$ d) $f(x)=\sqrt{2}x-1,\quad x_1=\sqrt{2}, x_2=2$

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji *f:*

$a)$ $f(x)=-2x+2$ $b)$ $f(x)=3x+4$ $c)$ $f(x)=\frac{1}{2}x+1$

$d)$ $f(x)=-x$ $e)$ $f(x)=\frac{x}{4}$ $f)$ $f(x)=2$

Zadanie 4. Sprawdź czy punkt $A=(-1,1)$ należy do wykresu funkcji, gdy jest nim prosta określona równaniem:

$a)$ $2x+y+1=0$ b) $x+y=0$ c) $y=-\frac{1}{2}x+1.$

Zadanie 5. Dana jest funkcja liniowa $f(x)=2x-4.$

a) Podaj współrzędne dowolnego punktu należącego do jej wykresu.

b) Sprawdź, czy punkt $P = (-7;\ -18)$ należy do wykresu funkcji f.

Zadanie 6. Sprawdź czy punkt $A = (-1, 1)$ należy do wykresu funkcji, gdy jest nim prosta określona równaniem $5x - y + 6 = 0$.

Zadanie 7. Wykonaj wykres funkcji $y = -2x + 1$ określonej na zbiorze liczb całkowitych.

Zadanie 8. Dla jakich wartości parametru *m* wykres funkcji $y = mx + 2$ przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

Zadanie 9. Dla jakich wartości parametru *n* wykres funkcji $y = 2x + n$ przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

Temat: INTERPRETACJA WSPÓŁCZYNNIKÓW LICZBOWYCH WE WZORZE FUNKCJI LINIOWEJ

Jeśli wykres funkcji liniowej określonej wzorem $y = ax + b$ tworzy z osia x kąt ostry α , to $a = tg\alpha$.

- kąt α jest ostry, gdy a > 0
- kąt α jest rozwarty, gdy a < 0
- kąt $\alpha = 0^\circ$, gdy a = 0

Punkt przecięcia wykresu funkcji liniowej osią y – (0, b)

Monotoniczność funkcji liniowej:

Funkcja liniowa określona wzorem jest $f(x) = ax + b$

- **rosnąca**, gdy a > 0
- **malejąca**, gdy a < 0,
- **stała**, gdy a = 0.

Wzajemne położenie dwóch prostych:

$k: y = a_1 x + b_1 \quad i \quad l: y = a_2 x + b_2$

- proste k i l są równoległe, gdy $a_1 = a_2$
- proste k i l są prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1 \quad \left(a_2 = -\frac{1}{a_1}\right)$
- proste k i l przecinają się pod innym kątem niż kąt prosty, gdy żaden z powyższych warunków nie zachodzi

Zadanie 1. Wykorzystując interpretację współczynników liczbowych , sporządź wykres funkcji określonej wzorem:

$a)\quad f(x)=3x+2$ $\qquad b)\quad f(x)=-2x+1$

$c)\quad f(x)=4x-2$ $\qquad d)\quad f(x)=-5x-3$

Zadanie 2. Określ, czy funkcja jest rosnąca, malejąca czy stała, gdy:

$a)\ f(x)=2x-3$ $\qquad b)\ f(x)=-3x-3$ $\qquad$ c) $f(x)=\frac{1}{2}x-3$

$d)\ f(x)=4-x$ $\qquad e)\ f(x)=-3$ $\qquad e)\ f(x)=5$

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których funkcja liniowa:

$a)\ f(x)=(m+1)x+2$ jest rosnąca $\qquad$ b) $f(x)=(2m-3)x+1$ jest rosnąca

$c)\ g(x)=(7-3m)x+2m-1$ jest malejąca d) $f(x)=(4-5m)x-3$ jest malejąca

$e)\ h(x)=\frac{2m-1}{4m+2}x-11m+3$ jest stała $\qquad$ f) $f(x)=\dfrac{5m-1}{m+3}x+8$ jest stała

Zadanie 4. Wskaż pary prostych równoległych:

$k: y=5x+2,$ $\qquad l: y=2x-4,$ $\qquad m: y=1{,}5x+2$

$n: y=5x-11,$ $\qquad o: y=\dfrac{3}{2}x-1,$ $\qquad p: y=2x+1.$

Zadanie 5. Wskaż pary prostych prostopadłych:

$k: y=3x+2,$ $\qquad l: y=0{,}5x-4,$ $\qquad m: y=-2x+6,$

$n: y=-\dfrac{1}{3}x+1,$ $\qquad o: y=-0{,}2x-3,$ $\qquad p: y=5x+7$

Zadanie 6. Określ miarę kąta α , jaki tworzy z osią x wykres funkcji określonej wzorem:

$a)\ f(x)=x-3$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{3}x+4$

$c)\ f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ $\qquad d)\ f(x)=-\sqrt{3}x-2$

Zadanie 7. Prosta *k* określona jest równaniem $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+33.$

a) Podaj miarę kąta nachylenia prostej *k* do osi OX.

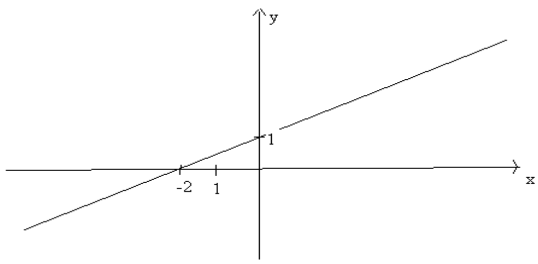
b) Czy prosta o równaniu $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-55$ jest równoległa do prostej *k* ?

c) Czy prosta o równaniu $y=-\sqrt{3}x-22$ jest prostopadła do prostej *k* ?

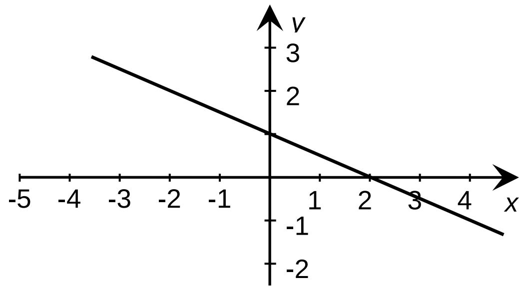
d) Podaj współrzędne punktu wspólnego prostej *k* i osi OY.

Zadanie 8. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i oblicz miarę kąta, jaki tworzy z osią x wykres funkcji liniowej f.

a)



b)



Temat: MIEJSCE ZEROWE I ZNAK FUNKCJI LINIOWEJ

Zadanie 1. Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

a) $f(x) = 12x + 4$

b) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 5$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x$

d) $f(x) = \sqrt{2}x + 4$

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$. Naszkicuj jej wykres. Na podstawie wykresu odpowiedz na następujące pytania:

a) Jakie miejsce zerowe ma ta funkcja?

b) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 3?

c) Jaka jest wartość tej funkcji dla argumentu $x = -3$?

d) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie?

e) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?

Zadanie 3. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -8x - 2$ przyjmuje wartości ujemne ?

Zadanie 4. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 4x - 3$ przyjmuje wartości dodatnie?

Zadanie 5. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ przyjmuje wartości niedodatnie?

Zadanie 6. Wyznacz a wiedząc, że liczba 0,3 jest miejscem zerowym funkcji $h(x) = ax + 7$.

Zadanie 7. Punkt $M = (2; -6)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = ax + 4$. Znajdź miejsce zerowe funkcji f.

Zadanie 8. Miejscem zerowym funkcji $f(x) = -2x + b$ jest liczba 1,5. Oblicz wartość współczynnika *b*.

Zadanie 9. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 2x + b$. Wyznacz te wartości współczynnika b, dla których miejsce zerowe funkcji f jest większe od $3\frac{1}{2}$.

Zadanie 10. Dla ilu liczb całkowitych dodatnich funkcja $g(x) = 0{,}2x - 7{,}4$ przyjmuje ujemne wartości?

Zadanie 11. Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = -2x + 7$ są większe od wartości funkcji $g(x) = 3x - 7$?

Zadanie 12. Punkt M = (1; 3) należy do wykresu funkcji $f(x) = ax - 2$. Znajdź miejsce zerowe funkcji *f*.

Zadanie 13. Dana jest funkcja o wzorze $f(x)$ = (1 – 2a)x + 3, x∈R.

a) Wyznacz a tak, aby miejscem zerowym funkcji była liczba 2.

b) Wyznacz wszystkie wartości a , dla których funkcja jest rosnąca w zbiorze R.

Temat: WYZNACZANIE WZORU FUNKCJI LINIOWEJ

Zadanie 1. Wyznacz a wiedząc, że funkcja $f(x) = ax + 4$ dla argumentu 3 przyjmuje wartość 8.

Zadanie 2. Wyznacz b, wiedząc, że punkt $P = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji

$g(x) = \dfrac{1}{3}x + b$.

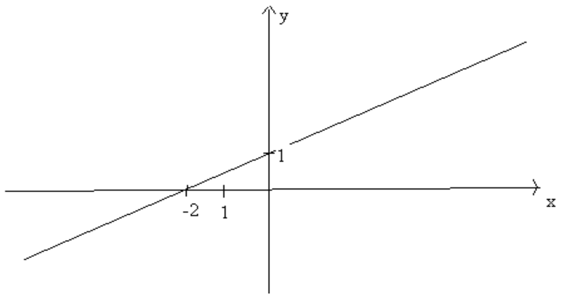
Zadanie 3. Napisz wzór funkcji liniowej której wykres przechodzi przez punkty:

$a)\ A = (0, 2)\ \ i\ \ B = (1, 7)$ $\qquad b)\ A = (0, -2)\ i\ \ B = (1, 4)$

$c)\ A = (3, 1)\ i\ \ B = (-2, 5)$ $\qquad d)\ A = (4, -2)\ i\ \ B = (-1, 3)$

Zadanie 4. Do wykresu funkcji liniowej należą punkty $A = (0,4)\ i\ B = (2, 0)$ Napisz jej wzór. Sprawdź czy dla argumentu x = $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ wartość funkcji f jest równa 3-$\sqrt{3}$.

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej f. Napisz wzór tej funkcji oraz rozwiąż nierówność $2 \cdot f(x) - 8 \geq 0$



Zadanie 6. Znajdź wzór funkcji liniowej f, której wykres przechodzi przez punkt A i jest równoległy do wykresu funkcji g, gdy:

a) $A = (4{,}3)\ \ i\ \ g(x) = 3x + 7.$

b) $A = (-2{,}5)\ \ i\ \ g(x) = 2x - 3$

c) $A = (2, -1)\ i\ \ g(x) = \frac{1}{2}x + 4$

d) $A = (3, 1)\ i\ \ g(x) = -5$

Zadanie 7. Znajdź wzór funkcji liniowej f, której wykres przechodzi przez punkt A i jest prostopadły do wykresu funkcji g , gdy:

a) A = (2, -5) i $g(x) = 2x - 3$

b) A = (1, 2) i $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

c) $A = (1, -2)\ i\ \ g(x) = 2x + 4$

Zadanie 8. Napisz wzór funkcji liniowej której wykres przechodzi przez punkt A oraz jest nachylony do osi OX pod kątem α, jeśli:

a) $\alpha = 30°$ oraz $A = (\sqrt{3}; 2)$

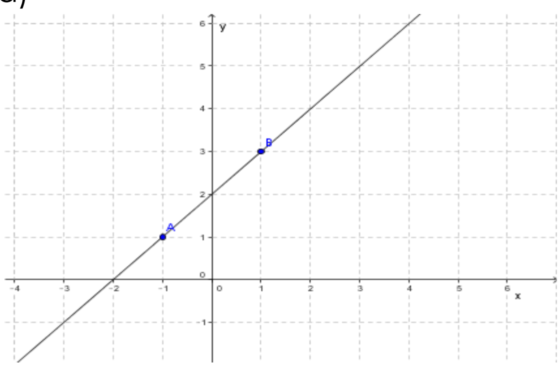
b) $\alpha = 120°$ oraz $A = (-1; 1)$

c) $\alpha = 45°$ oraz $A = (3\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$

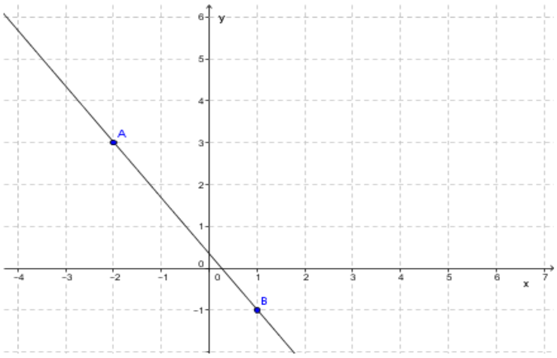
d) $\alpha = 150°$ oraz $A = (3\sqrt{3}; -3)$

Zadanie 9. Zapisz wzór funkcji liniowej, której wykres przedstawiony jest na rysunku.

a)



b)



Zadanie 10. Znajdź wzór funkcji liniowej f wiedząc, że:

a) jej wykres przecina oś OY w punkcie o rzędnej 4, a 2 jest miejscem zerowym funkcji f;

b) jej wykres przechodzi przez punkty $A = (1; 2)$ i $B = (5; 6)$;

c) jej wykres przechodzi przez punkt C = (4;-3) i jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = 3x + 7$;

d) jej wykres jest nachylony do osi OX pod kątem 60° i przechodzi przez punkt $D = (1; 3)$;

e) f nie przyjmuje wartości dodatnich i $f(22) = -3$;

f) jej wykres przechodzi przez punkty $E = (12; 5)$ i jest prostopadły do wykresu funkcji $h(x) = 6x - 4$.

Zadanie 11. Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 - b,\ \ x \in R$

a) Podaj miarę kąta nachylenia wykresu funkcji do osi OX.

b) Wyznacz wszystkie liczby b, dla których miejsce zerowe funkcji jest liczbą większą od $5\sqrt{3}$,

c) Napisz wzór funkcji liniowej g, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt A($-\sqrt{3}$, 1).

Zadanie 12. Wyznacz wzór funkcji liniowej f, która dla każdego x∈R spełnia warunek

a) $f(2x - 1) = -6x + 4$, b) $f(4x + 8) = 2x + 11$

Zadanie 13. Wyznacz a, wiedząc, że wykresy funkcji $f(x) = 3x - 3$ i $g(x) = (a - 3)x + 3$ nie mają punktów wspólnych.

Temat: FUNKCJA LINIOWA W ZASTOSOWANIACH

Zadanie 1. Magda i Ola podjęły wakacyjną pracę w dwóch różnych pizzeriach. Magda otrzymuje stałą dzienną stawkę w wysokości 26 zł oraz 80 gr za każdą dostarczoną klientowi pizzę. Ola podpisała umowę, która gwarantuje jej stałą stawkę dzienną w wysokości 14 zł oraz 1,10 zł za każdą dostarczona pizzę.

a) Zapisz wzór funkcji opisujący zarobki Magdy i wzór funkcji opisujący zarobki Oli w zależności od ilości dostarczonych pizz.
b) Która z dziewcząt wybrała korzystniejsze warunki pracy przy założeniu, że dzienna średnia liczba dostaw wynosi 30 pizz?
c) Przy jakiej liczbie dostaw dzienny zarobek obu dziewcząt będzie identyczny?

Zadanie 2. Koszt przejazdu taksówką składa się z opłaty wstępnej wynoszącej 6 zł oraz opłaty za każdy przejechany kilometr równej 1,80 zł.

a) Wyraź wzorem funkcję przyporządkowującą liczbie przejechanych kilometrów koszt przejazdu.
b) Ile zapłacimy za przejechanie taksówką 10 km?
c) Ile kilometrów przejechaliśmy, jeśli zapłaciliśmy 45,60 zł?
d) Czy 36 zł wystarczy na przejechanie 17 km?

Zadanie 3. Kolarz przejechał drogę długości 180 km ze stałą prędkością 45km/h. Napisz wzór funkcji, określający odległość kolarza od mety w zależności od czasu jazdy. Naszkicuj wykres tej funkcji.

Zadanie 4. Samochód zużywa średnio 6 litrów benzyny na 100 km.
W jego baku znajduje się 24 litry paliwa.
a) Napisz wzór funkcji opisującej liczbę litrów benzyny, jaka pozostała w baku w zależności od liczby przejechanych kilometrów. Wprowadź oznaczenia: x – liczba przejechanych kilometrów, y – liczba litrów paliwa.
b) Na ile kilometrów jazdy wystarczy paliwo znajdujące się w baku?

Zadanie 5. Jeden z pracowników pewnej firmy otrzymuje stałą pensję miesięczną za 168 przepracowanych godzin oraz dodatkowe wynagrodzenie za nadgodziny. Stawka za godzinę nadliczbową jest o 50% większa niż stawka za godzinę etatową.
W styczniu pracownik ten miał 8 nadgodzin i otrzymał razem 2700 zł.
a) Oblicz stawkę za godzinę nadliczbową oraz stawkę za godzinę etatową.
b) Napisz wzór funkcji wyrażającej wynagrodzenie pracownika w zależności od liczby przepracowanych godzin nadliczbowych.

Zadanie 6. Pompa w ciągu 8 godzin wypompowała 54 800 litrów wody.

a) Oblicz, ile litrów wody wypompuje ta pompa w ciągu godziny

b) Oblicz, ile litrów wody wypompuje ta pompa w ciągu 12,5 godzin

c) Napisz wzór określający liczbę litrów wypompowanej wody w ciągu x godzin przez pompę.

Zadanie 7. Zależność temperatury w skali Fahrenheita (°F) od temperatury Celsjusza (°C) wyraża wzór $y=\frac{9}{5}x+32$, gdzie y i x to odpowiednio temperatury w skali Fahrenheita i Celsjusza.

a) Oblicz, w jakiej temperaturze skali °F wrze woda, zakładając, że woda wrze w temperaturze 100°C.

b) Temperatura wody w basenie wynosi 68 °F; wyraź tę temperaturę w skali Celsjusza.

Temat: PRZYKŁADY FUNKCJI, KTÓRYCH WYKRESEM JEST SUMA ODCINKÓW LUB PÓŁPROSTYCH

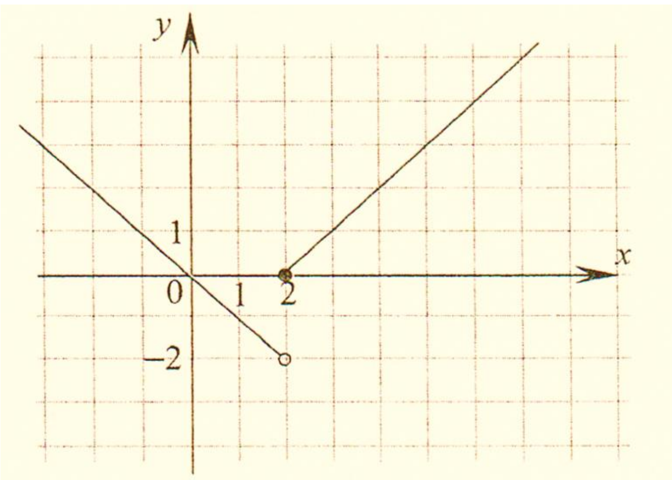
Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji *f* i odczytaj z wykresu jej miejsca zerowe.

a) $f(x)=\begin{cases}-x+3 & dla \quad x<0\\ x & dla \quad x\geq 0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & dla \quad x<1\\ 3x-2 & dla \quad x\geq 1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}-2 & dla \quad x<3\\ -x+2 & dla \quad x\geq 3\end{cases}$

Zadanie 2. Poniżej zamieszczono fragment wykresu funkcji *f* określonej w zbiorze liczb rzeczywistych. Zapisz wzór funkcji *f*.



Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x-2 \ \ dla\, x \geq 3 \\ -\frac{1}{3}x \ \ dla\, x < 3. \end{cases}$

a) Oblicz miejsce zerowe funkcji.
b) Oblicz $f(5)$.

Zadanie 4. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & dla \quad x \in (-\infty, -1) \\ -x+2 & dla \quad x \in < -1, +\infty) \end{cases}$

a) Oblicz miejsca zerowe funkcji.
b) Oblicz współrzędne punktu w którym wykres przecina oś OY.

Zadanie 5. Naszkicuj wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x \text{ dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ x-2 \text{ dla } x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

a) Oblicz miejsca zerowe funkcji *f* oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji *f* i osi *OY*.

b) Wyznacz algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości nieujemne.

c) Oblicz wartość funkcji *f* dla argumentu 6.

Zadanie 6. Napisz wzór funkcji f z użyciem klamry, gdy:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = |x-5|$
c) $f(x) = |x+2|$ d) $f(x) = |x+3| + x$

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – FUNKCJA LINIOWA

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ naszkicować wykres funkcji liniowej,
- ✓ obliczyć wartość funkcji dla podanego argumentu,
- ✓ wskazać argument, dla którego funkcja przyjmuje podaną wartość,
- ✓ określać na podstawie współczynników liczbowych funkcji liniowej: punkt przecięcia, wykresu funkcji liniowej z osią OY, monotoniczność funkcji, kąt nachylenia wykresu, funkcji do osi OX, wzajemne położenie wykresów funkcji liniowej na płaszczyźnie,
- ✓ obliczać miejsca zerowe funkcji liniowej,
- ✓ wyznaczać argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie oraz nieujemne,
- ✓ wyznaczać wzór funkcji liniowej, gdy podane są następujące informacje:
    - dwa punkty należące do wykresu funkcji liniowej,
    - kąt nachylenia prostej do osi OX oraz punkt, który do niej należy,

- wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy (prostopadły) do wykresu szukanej funkcji oraz punkt, który do niego należy,

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Punkt $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{3}x + b$. Wobec tego:

A. $b = \frac{1}{12}$ B. $b = \frac{1}{6}$ C. $b = \frac{1}{3}$ D. $b = \frac{5}{12}$

Zadanie 2. Prosta o współczynniku kierunkowym $a = 2$ przechodząca przez punkt P=(0,-5) ma postać:

A. $y = -2x + 5$ B.$y = 2x - 5$ C.$y = 2x + 5$ D.$y = 2x$

Zadanie 3. Funkcja $f(x) = ax + 4$ dla argumentu 3 przyjmuje wartość 8. Wobec tego:

A. $a = -\frac{8}{3}$ B. $a = -\frac{4}{3}$ C. $a = \frac{4}{3}$ D. $a = \frac{8}{3}$

Zadanie 4. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 3x + 2$. Jej wykresem jest prosta równoległa do wykresu funkcji h określonej wzorem:

A. $h(x) = -3x - 2$ B.$h(x) = 3x - 2$ C.$h(x) = 2x + 3$ D.$h(x) = 2x - 3$

Zadanie 5. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x - 7$:

A. $y = -2x - 7$ B. $y = -\frac{1}{2}x - 7$ C. $y = \frac{1}{2}x + 2$ D. $y = 2x - 1$

Zadanie 6. Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = -4x + 5$?

A. $y = 4x + 3$ B. $y = \frac{1}{4}x + 5$ C. $y = -\frac{1}{4}x + 2$ D. $y = -4x + 2$

Zadanie 7. Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = (m - 1)x - 2$ jest rosnąca, gdy:

A. $m < 0$ B. $m = 1$ C. $m > 0$ D. $m > 1$

Zadanie 8. Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = \left(m + \sqrt{3}\right)x - \sqrt{3}$ jest malejąca, gdy:

A.$m < -\sqrt{3}$ B. $m = \sqrt{3}$ C. $m > \sqrt{3}$ D. $m = 0$

Zadanie 9. Punkt przecięcia się wykresów funkcji liniowych określonych wzorami $y = 2x + 4$ i $y = 3$ leży w układzie współrzędnych w ćwiartce:

A. Pierwszej B. drugiej C. trzeciej D. czwartej

Zadanie 10. Dla jakiej wartości k wykres funkcji $y = 3x + 5 - k$ przecina oś y w punkcie (0,7):

A. $k = 2$ B. $k = 12$ C. $k = -2$ D. $k = 5$

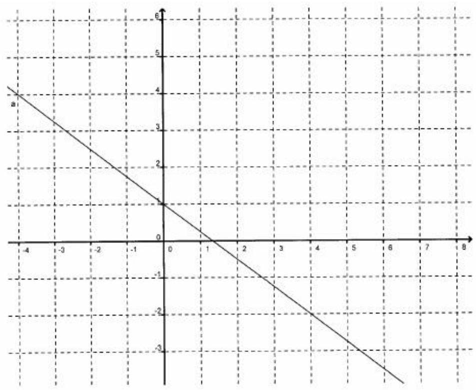
Zadanie 11. Funkcja na rysunku poniżej jest określona wzorem:

A. $f(x) = -\frac{4}{3}x + 1$

B. $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$

C. $f(x) = -3x + 1$

D. D. $f(x) = -4x + 1$



Zadanie 12. Wykresem funkcji $f(x) = \frac{6-2x}{3}$ jest prosta, która przecina oś *OX* w punkcie:

A. $(0, 2)$ B. $(2, 0)$ C. $(0, 3)$ D. $(3, 0)$

Zadanie 13. Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba:

A. $-2\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Zadnie 14. Miejscem zerowym funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{5}(x - \sqrt{2})$ jest liczba:

A. $-\sqrt{5}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{7}$

Zadanie 15. Funkcja liniowa g określona wzorem $g(x) = (m + 5)x - 4$ nie ma miejsc zerowych dla m równego:

A.-5 B. -4 C. 4 D. 5

Zadanie 16. Funkcja liniowa określona wzorem $y = -2x + 8$ przyjmuje wartości ujemne, gdy:

A. $x < 4$ B. $m > 4$ C. $x > -4$ D. $x < -4$

Zadanie 17. Funkcja liniowa: $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ przyjmuje wartości ujemne dla:

A. $x < 6$ B. $x > 6$ C. $x > -6$ D. $x < -6$

Zadanie 18. Do wykresu funkcji liniowej *f* należą punkty *A* = (2, 3) i *B* = (-2, 5).

Funkcja *f* ma wzór:

A. $f(x) = \frac{1}{2}x + 6$ B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ C. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ D. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

Zadanie 19. Prosta $y = ax + b$, dla $a < 0$ i $b > 0$ przechodzi przez ćwiartki:

A. I, II, III B. II, III, IV C. I, III, IV D. I, II, IV

Zadanie 20. Prosta o równaniu y = -2x + *(3m + 3)* przecina w układzie współrzędnych oś OY w punkcie *(0; 2)*. Wtedy:

A. $m = -\frac{2}{3}$ B. $m = -\frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = \frac{5}{3}$

Zadanie 21. Znajdź wzór funkcji liniowej *f*, której wykres przechodzi przez punkt A= (-2,5) i jest prostopadły do wykresu funkcji $g(x) = 2x - 3$.

Zadanie 22. Znajdź wzór funkcji liniowej *f*, której wykres jest nachylony do osi OX pod kątem 60° i przechodzi przez punkt D = (1,3).

Zadanie 23. Funkcja *f* określona jest wzorem $f(x) = 5x + 3$.

a) Podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji *f* z osią OY.

b) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości większe od 6.

Zadanie 24. Wykres funkcji $f(x) = 2x + 27$ i prosta o równaniu $y = x + 17$ przecinają się w punkcie K. Wyznacz współrzędne punktu K.

2. RÓWNANIA KWADRATOWE

Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ nazywamy **równaniem kwadratowym** lub trójmianem kwadratowym.

W zależności od wartości współczynników a, b, c równania kwadratowe dzielimy na zupełne i niezupełne.

Równania kwadratowe zupełne to takie, w których wszystkie współczynniki a, b, c są różne od zera. **Równanie kwadratowe niezupełne** to takie, w których współczynnik $a \neq 0$, ale przynajmniej jeden ze współczynników b, c jest równy zero.

Temat: RÓWNANIA KWADRATOWE NIEZUPEŁNE

Równanie kwadratowe niezupełne ($a \neq 0$)

• Równanie postaci $ax^2 = 0$ posiada jeden pierwiastek $x = 0$,

• Równanie postaci $ax^2 + bx = 0$ posiada dwa pierwiastki

$x_1 = 0$, $\quad x_2 = \frac{-b}{a}$

• Równanie postaci $ax^2 + c = 0$:

- nie ma rozwiązania gdy $a \cdot c > 0$

- posiada dwa pierwiastki gdy $a \cdot c < 0$

$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $\quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

Zadanie 1. Napisz równanie kwadratowe w postaci $ax^2 + bx + c = 0$. Określ, czy jest to równanie zupełne, czy niezupełne, gdy:

a) $a = \sqrt{3}, \quad b = 0, \quad c = -2$ b) $a = 1, \quad b = -\sqrt{5}, \quad c = 2$

c) $a = -2, \quad b = 1, \quad c = 0$ d) $a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{4}, \quad c = \frac{1}{8}$

e) $a = -3, \quad b = 0, \quad c = 1$ f) $a = \frac{1}{3}, \quad b = -2, \quad c = 0$

Zadanie 2. Sprawdź, która z liczb: -1, 0, 1 jest pierwiastkiem równania kwadratowego:

a) $x^2 - 1 = 0$ b) $2x^2 - 5x = 0$

c) $2x^2 - x - 3 = 0$ d) $3x^2 = 0$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie:

a) $-5x^2 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 = 0$ c) $x^2 - 16 = 0$

d) $3x^2 - 12 = 0$ e) $2x^2 - 6x = 0$ f) $-3x^2 + 12x = 0$

g) $4x^2 - 100 = 0$ h) $-4x^2 + 49 = 0$ i) $4x^2 - 9x = 0$
j) $-2x^2 - 14 = 0$ k) $7x^2 + x = 0$ l) $2x^2 - 16 = 0$
m) $4x^2 = 8x$ n) $2x^2 + 50 = 0$ o) $9x^2 - 36 = 5x^2$

Zadanie 4. Uporządkuj i rozwiąż równania:

a) $x(x+7) = 2x(x-3)$ b) $(x-1)^2 = 26 - 2x$
c) $(x+1)^2 = 2x + 10$ d) $(x-3)^2 = 2(x^2 - 3x)$
e) $(2+5x)^2 = 19x + (x-4)(x+5)$ f) $2(x-1)^2 = x + 2$

Temat: RÓWNANIA KWADRATOWE ZUPEŁNE

Liczba rozwiązań równania kwadratowego zależy od wartości wyróżnika

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

W zależności od wyróżnika Δ:

- równanie kwadratowe posiada **dwa** rozwiązania dla $\Delta > 0$.
- równanie kwadratowe posiada **jedno** rozwiązanie dla $\Delta = 0$,
- równanie kwadratowe **nie posiada** rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych dla $\Delta < 0$,

Dla $\Delta > 0$ otrzymamy dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Dla $\Delta = 0$ jedynym rozwiązaniem jest $x = \frac{-b}{2a}$

Zadanie 1. Określ liczbę pierwiastków równania:

a) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $-4x^2 + 2x - 1 = 0$ c) $x^2 - 4x + 4 = 0$
d) $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ e) $-2x^2 - 4x - 4 = 0$ f) $x^2 - 7x + 6 = 0$
g) $3x^2 + 5x + 6 = 0$ h) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0$ i) $x^2 - x + 2 = 0$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $x^2 + 3x = 28$ c) $2x^2 + 7x - 4 = 0$
d) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = 0$ e) $2x^2 - x + 5 = 0$ f) $x^2 - 10x + 25 = 0$
g) $x^2 - 6x - 7 = 0$ h) $x^2 - 4x + 25 = 0$ i) $-2x^2 + x + 3 = 0$
j) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ k) $x^2 + 5x + 8 = 0$ l) $-x^2 - 20x - 75 = 0$
m) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ n) $\frac{1}{6}x^2 - 1\frac{1}{3}x = -2$ o) $x^2 - 5x = 6$

Zadanie 3. Rozwiąż równania:

a) $5x(x-3)+4(x+4)=31-7x^2$

b) $(3x+2)(x-1)-13=2x(2-x)$

c) $(y-2)^2=y-5$

d) $(3x-5)^2=(8x+3)^2$

e) $36-(4x+2)^2=0$

f) $9-(2x+3)^2=0$

g) $(x+3)^2+6(x+3)=16$

h) $(3y-1)^2=4y(2y-1)$

i) $(x-2)^2-9=0$

j) $(x-1)^2-4=0$

k) $(x-3)^2=8-4x$

l) $\frac{x(x+4)}{2}=\frac{x(x-8)}{4}$

Zadanie 4. Rozwiąż równanie dokonując podstawienia:

a) $9\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2-6\cdot\frac{x}{2}-9=0$

b) $4\cdot\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{x-1}{3}\right)-15=0$

c) $\left(\frac{x-7}{3}\right)^2-10\cdot\left(\frac{x-7}{3}\right)-24=0$

d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{2}\right)+15=0$

Temat: ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ PROWADZĄCYCH DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ KWADRATOWYCH

Zadanie 1. Wyznacz dwie liczby, z których jedna jest mniejsza od drugiej o 4, a ich iloczyn jest równy 5.

Zadanie 2. Wyznacz dwie kolejne liczby naturalne, których iloczyn jest równy 30.

Zadanie 3. Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 117. Wyznacz je, jeśli jedna jest o 4 mniejsza od drugiej.

Zadanie 4. Wiedząc, że liczba przekątnych wielokąta wypukłego o n bokach określona jest wzorem $\frac{n(n-3)}{2}$, ustal liczbę boków wielokąta wypukłego, który ma 1710 przekątnych.

Zadanie 5. Boki prostokąta są kolejnymi liczbami naturalnymi. Oblicz jego obwód, jeśli pole trójkąta wynosi $156cm^2$.

Zadanie 6. Oblicz długości boków prostokąta, którego jeden z boków jest większy od drugiego o 1cm, a przekątna prostokąta ma długość 5cm.

Zadanie 7. Oblicz długości boków prostokąta, którego obwód jest równy 12cm, a pole 5cm^2.

Zadanie 8. Suma kwadratów trzech kolejnych nieparzystych liczb naturalnych jest równa 251. Znajdź te liczby.

Zadanie 9. Wiedząc, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 29 znajdź te liczby.

Zadanie 10. Wiedząc, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest równa 244 znajdź te liczby.

Zadanie 11. Wiedząc, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest równa 290, znajdź te liczby.

Zadanie 12. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego, wiedząc, że są one kolejnymi:
a) liczbami naturalnymi.
b) parzystymi liczbami naturalnymi.

Temat: SUMA I ILOCZYN PIERWIASTKÓW RÓWNANIA KWADRATOWEGO

Wzory Viete'a

Liczby x_1 *i* x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad i \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $a \neq 0$ *i* $\Delta > 0$ ma dwa pierwiastki x_1 *i* x_2:

- różnych znaków, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$
- jednakowych znaków, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$
- dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
- ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Zadanie 1. Sprawdź, czy równanie ma dwa pierwiastki. Jeśli tak, to stosując wzory Viete'a wyznacz ich sumę i iloczyn.

a) $2x^2+5x+1=0$ b) $3x^2-2x-3=0$

c) $7x^2-14x-2=0$ d) $-2x^2+3x+1=0$

e) $x^2+7x+2=0$ f) $3x^2-5x-4=0$

Zadanie 2. Sprawdź, czy równanie ma dwa pierwiastki. Jeśli tak, to stosując wzory Viete'a, oblicz wartości wskazanych wyrażeń:

1) $x_1+x_2=$ 2) $x_1 \cdot x_2=$

3) $2x_1x_2-(x_1+x_2)=$ 4) ${x_1}^2+{x_2}^2=$

a) $x^2-7x+10=0$ b) $x^2-11x+24=0$ c) $x^2+15x+44=0$

d) $x^2+12x-85=0$ e) $-x^2+15x+100=0$ f) $x^2-3x-40=0$

Zadanie 3. Co można powiedzieć o znakach liczb x_1 i x_2?

$\boxed{x_1 \cdot x_2<0} \longrightarrow$ x_1, x_2 mają różne znaki

$\boxed{x_1 \cdot x_2>0} \longrightarrow$ ....

$\boxed{\begin{matrix} x_1 \cdot x_2>0 \\ x_1+x_2>0 \end{matrix}} \longrightarrow$ ....

$\boxed{\begin{matrix} x_1 \cdot x_2>0 \\ x_1+x_2<0 \end{matrix}} \longrightarrow$ ....

Zadanie 4. Wiedząc, że równanie ma dwa pierwiastki, określ (nie obliczając ich), czy są to liczby dodatnie, czy liczby ujemne, czy liczby różnych znaków.

a) $x^2+19x+34=0$ b) $2x^2-10x+12=0$

c) $\frac{1}{4}x^2-5x+1=0$ d) $-\sqrt{3}x^2+x-1=0$

e) $3x^2+13x-10=0$ f) $-2x^2+x-\sqrt{7}=0$

Temat: RÓWNANIA KWADRATOWE Z PARAMETREM

Zadanie 1. Oblicz wartości parametru m, dla których równanie **nie ma rozwiązania**:

a) $3x^2+2x-m=0$ b) $x^2+4x-3m+2=0$

c) $3x^2-14x+m-2=0$ d) $2x^2-11x+m+2=0$

Zadanie 2. Oblicz wartości parametru m, dla których równanie **ma jeden pierwiastek**:

a) $x^2-(m+1)x+1=0$ b) $2x^2-mx+m^2+m=0$

c) $x^2-x-m=0$ d) $x^2+(m-3)x+m-3=0$

Zadanie 3. Oblicz wartości parametru m, dla których równanie **ma dwa różne pierwiastki**:

a) $x^2+2x+3-m=0$ b) $2x^2+5x+6m-1=0$

c) $-3x^2+4x-2m+1=0$ d) $x^2+2mx+1=0$

Zadanie 4. Określ, dla jakich wartości parametru p równanie **ma dwa różne pierwiastki jednakowych znaków:**

a) $x^2+2x-144p=0$ b) $\frac{1}{2}x^2-7x-5+2p=0$

c) $0{,}1x^2+3x+6-7p=0$ d) $-x^2+2mx+m^2-1=0$

Zadanie 5. Określ, dla jakich wartości parametru m równanie ma **dwa różne pierwiastki dodatnie**:

a) $2x^2-x-3m+1=0$ b) $\frac{1}{4}x^2-3x+m+2=0$

c) $0{,}4x^2-x+m-1=0$ d) $2x^2+(2-m)x+m=0$

Zadanie 6. Określ, dla jakich wartości parametru m równanie ma **dwa różne pierwiastki ujemne**:

a) $3x^2+2x+m+5=0$ b) $x^2+5x+m+4=0$

c) $x^2+x-m=0$ d) $(m^2-4)x^2-2mx-2=0$

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI - RÓWNANIA KWADRATOWE

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ wskazać wśród równań kwadratowych równania niezupełne i zupełne,
- ✓ rozwiązać równanie kwadratowe niezupełne,
- ✓ określić liczbę rozwiązań równania kwadratowego zupełnego,
- ✓ wyznaczyć rozwiązania równania kwadratowego zupełnego,
- ✓ obliczyć sumę i iloczyn rozwiązań równania kwadratowego korzystając ze wzorów Viete'a,
- ✓ wykorzystywać równania kwadratowe do rozwiązywania zadań tekstowych,
- ✓ wyznaczyć wartość parametru, dla którego rozwiązania równania kwadratowego spełniają wskazany warunek.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Liczba $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem równania:

A. $x^2-2=0$ B. $\frac{1}{2}x^2-2=0$ C. $x^2+\sqrt{2}x=0$ D. $x^2-\sqrt{2}=0$

Zadanie 2. Dwa pierwiastki ma równanie:

A. $x^2+4=0$ B. $x^2-6x+9=0$ C. $(2x-1)^2=0$ D. $4x^2=3x$

Zadanie 3. Mniejszym z rozwiązań równania $x^2+5x+6=0$ jest liczba:

A. -6 B. -3 C. 2 D. 1

Zadanie 4. Rozwiązaniem równania $2x^2-8=0$ jest:

A. 1, -1 B. 2, -2 C. 4, -4 D. 8, -8

Zadanie 5. Które z równań ma dokładnie jeden pierwiastek?

A. $x^2+5x-6=0$ B. $x^2+5x+7=0$ C. $x^2+7=0$ D. $x^2+4x+4=0$

Zadanie 6. Równanie $x^2-4x+c=0$ nie ma pierwiastków, gdy:

A. c = 4 B. $c\in(-\infty,4>$ C. $c\in(4,+\infty)$ D. $c\in<4,+\infty)$

Zadanie 7. Równanie $x^2+bx+4=0$ ma jedno rozwiązanie, gdy:

A. b = -2 B. b = 2 C. b = 2 lub b = -2 D. b = 4 lub b = -4

Zadanie 8. Wyróżnik Δ jest równy 0 dla równania:

A. $x^2-25=0$ B. $x^2+25=0$ C. $25x^2+1=0$ D. $x^2+10x+25=0$

Zadanie 9. Pierwiastkami równania $\sqrt{2}x^2=2\sqrt{2}x$ są liczby:

A. $0\ i\ \sqrt{2}$ B. $0\ i\ -\sqrt{2}$ C. $0\ i\ -2$ D. $0\ i\ 2$

Zadanie 10. Równanie $ax^2+2x+3=0$ ma dwa pierwiastki, gdy:

A. $a=\frac{6}{12}$ B. $a=\frac{5}{12}$ C. $a=\frac{4}{12}$ D. $a=\frac{3}{12}$

Zadanie 11. Suma pierwiastków równania $x^2-3x-10=0$ jest równa:

A. -7 B. -3 C.3 D. 7

Zadanie 12. Rozwiąż równania:

a) $9x^2=16$ b) $5+6x(x-1)-3=2$

c) $-6x^2-7x+5=0$ d) $(y-2)^2=y-5$

e) $8y^2 - (3y-1)^2 = 4y$

f) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 5\left(\frac{x+1}{x}\right) - 6 = 0$

g) $-x^4 + 5x^2 = -36$

Zadanie 13. Dla jakich wartości parametru m równanie $3x^2 - 14x + m - 2 = 0$ **nie ma rozwiązania?**

Zadanie 14. Dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{1}{4}x^2 + x + 3m = 0$ **ma dwa pierwiastki ujemne?**

Zadanie 15. Wybieg dla owiec jest prostokątem o wymiarach 8m x 16m. Hodowca owiec zamierza tak powiększyć powierzchnię wybiegu , zwiększając długość boków o tę samą liczbę metrów, aby jego powierzchnia zwiększyła się trzykrotnie. Oblicz, o ile metrów hodowca powinien powiększyć wymiary wybiegu.

3. FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

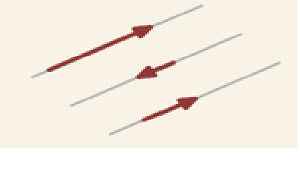
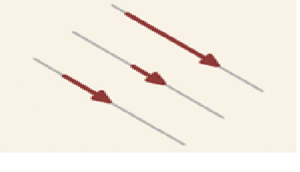
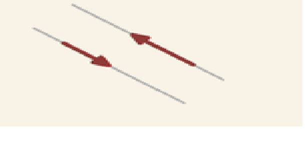
Temat: POJĘCIE WEKTORA

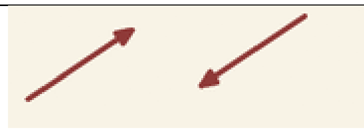
Wektorem zaczepionym (związanym) nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z tych punktów nazywamy początkiem wektora, a drugi punkt końcem wektora.

Wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$.

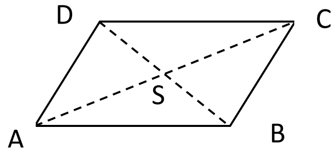
Wielkości charakteryzujące wektor:

- kierunek wektora (zależy od prostej wyznaczonej przez ten wektor),
- zwrot wektora (zależy od strony na którą wektor wskazuje),
- długość wektora.

Wektory o takich samych kierunkach	**Wektory o takich samych kierunkach i zwrotach**	**Wektory o takich samych kierunkach ale przeciwnych zwrotach**
		

Dwa wektory są **równe**, gdy mają ten sam kierunek, zwrot i tę samą długość	
Wektory **przeciwne** to wektory o takiej samej długości i kierunku, ale przeciwnym zwrocie.	

Zadanie 1. Każda para spośród punktów *A*, *B*, *C*, *D*, *S* (rysunek obok) określa pewien wektor. Wiedząc, że czworokąt *ABCD* jest równoległobokiem, wypisz wszystkie wektory:



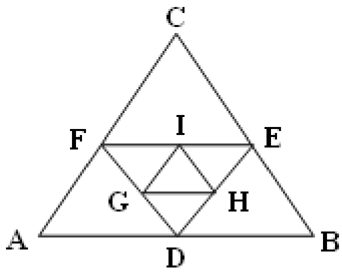
a) o tym samym kierunku co wektor $\overrightarrow{BD}$

b) o tym samym zwrocie co wektor $\overrightarrow{SA}$

c) przeciwne do wektora $\overrightarrow{SD}$

d) równe wektorowi $\overrightarrow{AD}$

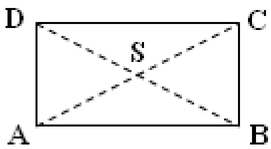
Zadanie 2. W trójkąt równoboczny *ABC* (rysunek obok) wpisano, łącząc środki jego boków, trójkąt *EFD*, a w niego, łącząc środki boków trójkąta *EFD*, trójkąt *GHI*. Każda para spośród punktów *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I* określa pewien wektor. Podaj:



a) trzy wektory o tym samym kierunku co wektor $\overrightarrow{AB}$

b) wszystkie wektory o tym samym zwrocie co wektor $\overrightarrow{AB}$

Zadanie 3. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* są kolejnymi wierzchołkami prostokąta, który nie jest kwadratem, a punkt *S* jest punktem przecięcia się jego przekątnych. Wypisz wszystkie wektory:



a) równe wektorowi $\overrightarrow{AB}$

b) przeciwne do wektora $\overrightarrow{AB}$,

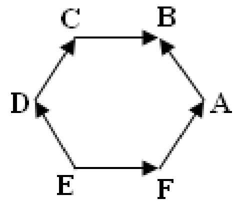
c) mające tę samą długość co wektor $\overrightarrow{AC}$.

Zadanie 4. Zaznacz na płaszczyźnie trzy dowolne punkty *A*, *B*, *C*, nie leżące na jednej prostej, a następnie narysuj wektor:

a) równy wektorowi $\overrightarrow{AC}$, który jest zaczepiony w punkcie *B*,

b) przeciwny do wektora $\overrightarrow{AB}$, który jest zaczepiony w punkcie *C*,

c) równy wektorowi $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$, który jest zaczepiony w punkcie C,



Zadanie 5. Spośród wektorów zaznaczonych na sześciokącie foremnym obok wypisz pary wektorów:

a) równych, b) przeciwnych.

Temat: JEDNOKŁADNOŚĆ. FIGURY JEDNOKŁADNE A FIGURY PODOBNE.

Jednokładność o środku O i skali k $(k \neq 0)$ przyporządkowuje każdemu punktowi P płaszczyzny taki punkt P', że $\overrightarrow{OP} = k \cdot \overrightarrow{OP'}$. Każda jednokładność jest podobieństwem o skali $|k|$.

Zadanie 1. Narysuj obraz punktu $P = (2,1)$ w jednokładności o środku $O = (0,0)$ i skali k.
a) $k = 3$, b) $k = \frac{1}{2}$ c) $k = -1$

Zadanie 2. Znajdź obraz punktu A w jednokładności o środku $O = (0,0)$ i skali k:
a) A = (-4,2), $k = 2$, c) A = (-1,-4), $k = -3$,
b) A = (6,-2), $k = \frac{1}{2}$, d) A = (9,-3), $k = -\frac{2}{3}$.

Zadanie 3. Punkty: $A = (1,-1)$, $B = (3,-1)$, $C = (1,4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC. Narysuj obraz tego trójkąta w jednokładności o środku $D = (2,0)$ i skali k. Oblicz pole otrzymanego trójkąta.
a) $k = 2$ b) $k = -1$

Zadanie 4. Narysuj dowolny czworokąt i jego obraz w jednokładności w jednym z jego wierzchołków i skali k, gdy:
a) $k = 2$, b) $k = \frac{1}{2}$, c) $k = -1$.

Zadanie 5. Narysuj dowolny trójkąt ABC i w jego wnętrzu obierz dowolny punkt P. Narysuj obraz trójkąta ABC w jednokładności o środku w punkcie P i skali $k = \frac{1}{3}$.

Zadanie 6. Boki trójkąta mają długości: 2, 3, 4. Czy obrazem tego trójkąta w pewnej jednokładności może być trójkąt o bokach długości:
a) 4, 6, 8 b) 1, 2, 2
c) $1, \frac{3}{2}, 2$ d) 6, 9, 12?

Zadanie 7. Punkt B jest obrazem punktu A w jednokładności o środku w punkcie O i skali k. Oblicz skalę jednokładności k, gdy:
a) $|OA| = 3$ i $|AB| = 1$, b) $|OA| = 5$ i $|AB| = 4$,

Zadanie 8. Podaj skalę jednokładności, która kwadrat o boku 2cm przekształca w kwadrat:

a) o obwodzie 32cm

b) o polu 1 cm^2

Temat: WEKTORY NA PŁASZCZYŹŃIE KARTEZJAŃSKIEJ

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A=(x_A, y_A)$ i $B=(x_B, y_B)$

$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A]$

Współrzędne wektorów równych są równe, a współrzędne wektorów przeciwnych są liczbami przeciwnymi.

Długość wektora

	Współrzędne wektora	**Długość wektora**
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A]$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
$\overrightarrow{w}$	$\overrightarrow{w}=[p, q]$	$\lvert\overrightarrow{w}\rvert=\sqrt{p^2+q^2}$

Środek S wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B) ma współrzędne $x_S=\frac{x_A+x_B}{2}$, $y_S=\frac{y_A+y_B}{2}$.

Zadanie 1. Narysuj w układzie współrzędnych wektor $\overrightarrow{MN}$ oraz podaj jego współrzędne.

a) M = (5,2), N = (1,3)

b) M = (-3,2), N = (3,-2)

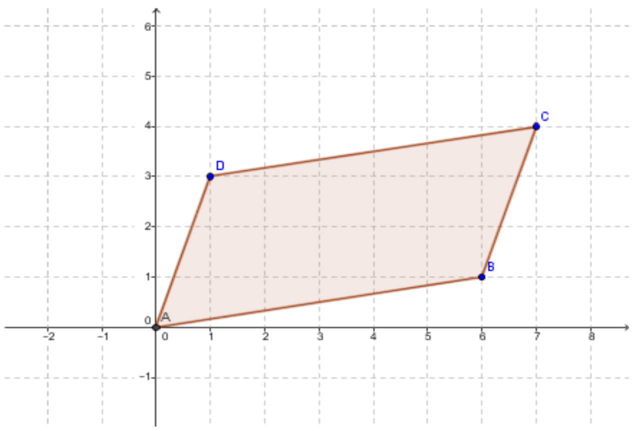
c) M = $(-\frac{1}{2}, 3)$, N = (6,-2)

d) M = (0,0), N = (2,-2).

e) M = (-2,1), N = (5,2)

f) M = (-3,-4), N = (-1,3)

Zadanie 2. Podaj współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$



Zadanie 3. Oblicz współrzędne punktu B, gdy:

a) A = (-3,6), $\overrightarrow{AB} = [-2{,}5]$ b) A = (-2,2), $\overrightarrow{AB} = [2,-2]$

c) A = (-2,2), $\overrightarrow{AB} = [-2{,}2]$ d) A = (3,-5), $\overrightarrow{AB} = [7,-7]$

e) A = (-3,6), $\overrightarrow{AB} = [-2{,}5]$ f) A = (-2,2), $\overrightarrow{AB} = [-2{,}2]$

Zadanie 4. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{LM}$.

a) L = (3,2), M = (1,3) b) L = (-3,-2), M = (3,-2)

c) L = $(-\frac{1}{4}, 3)$, M = $(\frac{3}{4}, -1)$ d) L = (0,0), M = (3,-4).

Zadanie 5. Oblicz długość wektora $\vec{u}$:

a) $\vec{u} = [2{,}1]$ b) $\vec{u} = [-3{,}4]$ c) $\vec{u} = [-5,-12]$

d) $\vec{u} = [3{,}3]$ e) $\vec{u} = [2,-3]$ f) $\vec{u} = [-5,-12]$

Zadanie 6. Oblicz współrzędne środka S wektora $\overrightarrow{KL}$.

a) K = (-5,2), L = (1,-3) b) K = (3,12), L = (-3,-5)

c) K = $(-\frac{1}{2}, 3)$, L = (6,-2) d) K = (0,0), L = (3,-6)

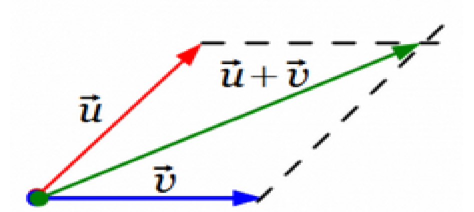
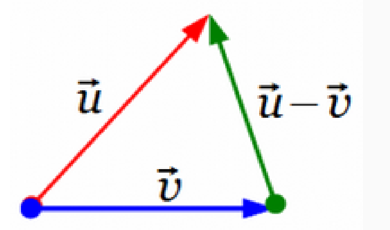
Zadanie 7. Oblicz współrzędne punktu B, jeżeli:

a) A = (4,2) oraz środek odcinka AB to S = (1,-1)

b) A = (-3,5) oraz środek odcinka AB to S = (0,0)

c) A = (2,7) oraz środek odcinka AB to S = (3,5).

Temat: DZIAŁANIA NA WEKTORACH NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest wektor, którego początek pokrywa się z punktem zaczepienia obu wektorów, a koniec znajduje się na przecięciu dorysowanych przerywaną linią boków równoległoboku	
Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest wektor, który łączy końce tych wektorów.	

Jeżeli $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$, to:

$\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$ $\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$ $k \cdot \vec{u} = [k \cdot a, k \cdot b]$

Zadanie 1. Wyznacz $\vec{u}+\vec{v}$ oraz $\vec{u}-\vec{v}$

a) $\vec{u}=[3,-2]$, $\vec{v}=[2,6]$
b) $\vec{u}=[1,-3]$, $\vec{v}=[5,2]$,
c) $\vec{u}=[2,-3]$, $\vec{v}=[-6,9]$
d) $\vec{u}=[3,-2]$, $\vec{v}=[-4,2]$,
e) $\vec{u}=\left[-5,-\frac{11}{2}\right]$, $\vec{v}=[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$,
f) $\vec{u}=\left[4,\frac{13}{2}\right]$, $\vec{v}=[-1,-\frac{1}{2}]$

Zadanie 2. Dany jest wektor $\vec{u}=[4,2]$. Wyznacz wektor:

a) $2\vec{u}$,
b) $\frac{1}{2}\vec{u}$,
c) $\frac{3}{2}\vec{u}$,
d) $-3\vec{u}$.

Zadanie 3. Dany jest wektor $\vec{u}=[-6,3]$. Wyznacz wektor:

a) $2\vec{u}$,
b) $\frac{1}{3}\vec{u}$,
c) $-3\vec{u}$,
d) $-\frac{2}{3}\vec{u}$.

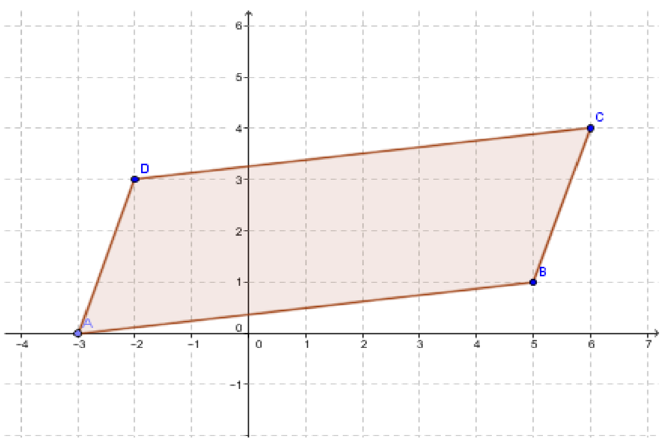
Zadanie 4. Dane są wektory $\vec{u}=[3,-4], \vec{v}=[-6,7], \vec{w}=[-2,-6]$. Oblicz:

a) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$
b) $\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$

Zadanie 5. Dane są wektory $\vec{u}=[2,-1]$, $\vec{v}=[-3,2]$. Wyznacz wektor:

a) $2\vec{u}+3\vec{v}$,
c) $3\vec{u}-\vec{v}$,
b) $-4\vec{u}+2\vec{v}$,
d) $\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$.

Zadanie 6. Na rysunku przedstawiono równoległobok ABCD.



a) Podaj współrzędne wektorów $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ i $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$

b) Sprawdź, czy $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$

c) Sprawdź, czy $\overrightarrow{DB}=\vec{u}-\vec{v}$

Zadanie 7. Wykonaj działania na wektorach $\vec{v}=[2,4]$ $\vec{u}=[-12,-1]$

a) $\vec{u}+\vec{v}$
b) $\vec{u}-\vec{v}$
c) $3\vec{u}-4\vec{v}$
d) $\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

Zadanie 8. Dane są wektory: $\vec{u} = [3, -4], \vec{v} = [-2{,}5], \vec{w} = [6{,}0]$. Znajdź wektor:

a) $2 \cdot \vec{u} - 3 \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \cdot \vec{w}$ b) $3 \cdot \vec{u} - \vec{v} + \frac{2}{3} \cdot \vec{w}$ c) $\vec{u} + 2 \cdot \vec{v} + 3 \cdot \vec{w}$.

Temat: WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY PROSTEJ

Równania prostej:

- równanie ogólne prostej
  Ax + By + C = 0, gdzie $A^2 + B^2 > 0 \quad i \quad A, B, C \in R$
- równanie kierunkowe prostej
  y = ax + b, gdzie a – współczynnik kierunkowy prostej

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa punkty A = (x_A, y_A)i B = (x_B, y_B), gdzie $x_A \neq x_B$, określony jest wzorem $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B)

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

Zadanie 1. Przedstaw w postaci ogólnej równanie prostej:

$a)\ y = -\frac{1}{2}x + 3$ $b)\ y = 3x - 1$ $c)\ y = 3$

d) $y = \sqrt{3}x + 1$ e) $x = 2$ f) y = 4x – 1

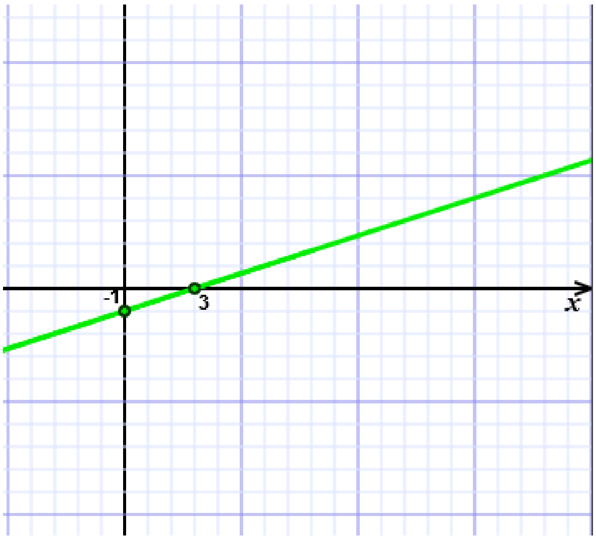
Zadanie 2. Przedstaw w postaci kierunkowej prostą, odczytaj współczynnik kierunkowy prostej:

a) $x + 2y + 5 = 0$ b) $-3x - 2y + 5 = 0$
c) $4x + 2y - 1 = 0$ d) $4x - 12y = 18$
e) $2x - 3\frac{1}{2}y + 4 = 0$ f) $2y + \sqrt{2} = 0$
g) $\sqrt{3}y - 6x = 0$ h) $\left(1 - \sqrt{2}\right)x - \left(1 + \sqrt{2}\right)y - 2 = 0$.

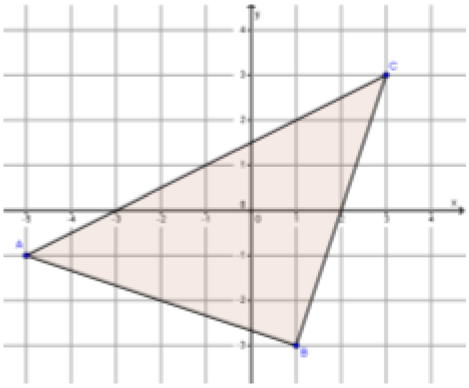
Zadanie 3. Napisz równanie prostej AB w postaci ogólnej i kierunkowej (o ile istnieje), gdy:

a) $A = (3, -2,),\ B = (-5, 0)$ b) $A = (4, 5),\ B = (-4, 9)$
c) $A = (2, -7),\ B = (2, 9)$ d) $A = (-2, 1),\ B = (3, 4)$
e) A = (4,-3), B = (-2,-1) f) A = (4,-13), B = (2,-7)

Zadanie 4. Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Sprawdź (wykonując odpowiednie obliczenia) czy punkty A = (-10,-5) i B = $(-3,\frac{8}{3})$ należą do tej prostej.



Zadanie 5. Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta *ABC*. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki tego trójkąta.



Zadanie 6. Wyznacz równanie ogólne prostej *l*, której współczynnik kierunkowy jest równy $2\sqrt{3}$, wiedząc, że do prostej *l* należy punkt *P* = $(1,\sqrt{3})$.

Zadanie 7. Sprawdź, czy punkty A, B i C są współliniowe.

a) A = (-2, -7), B = (1, -4) i C = (1000, 1005)

b) A = (1,3), *B* = (3,7) i *C* = (1006,2013).

Temat: WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Dwie proste leżące na płaszczyźnie nazywamy **równoległymi**, gdy pokrywają się lub nie mają punktów wspólnych.
Dwie proste przecinają się, jeżeli mają jeden punkt wspólny. Proste przecinające się pod kątem prostym są prostymi **prostopadłymi**.

Warunek równoległości prostych

Jeżeli proste k i l o równaniach $k: y = a_1 x + b_1$ i $l: y = a_2 x + b_2$ są równoległe, to $a_1 = a_2$.

Warunek prostopadłości prostych

Jeżeli proste k i l o równaniach $k: y = a_1 x + b_1$ i $l: y = a_2 x + b_2$ są prostopadłe, to $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Dwie proste, których współczynniki kierunkowe nie spełniają żadnego z powyższych warunków **przecinają się pod innym kątem niż kąt prosty.**

Zadanie 1. Podaj współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej k:

a) $k: y = -7x + 7$ b) $k: y = \frac{5}{6}x + 1$

c) $k: y = \frac{3}{4}x + 7$ d) $k: y = -\frac{7}{9}x - \frac{1}{9}$

Zadanie 2. Określ wzajemne położenie prostych k i l na płaszczyźnie kartezjańskiej, jeśli:

a) $k: y = -3x + 2$ i $l: y = 2x + 1$
b) $k: y = -2x + 4$ i $l: y = 0{,}5x$
c) $k: 2x - 3y - 1 = 0$ i $l: y = \frac{2}{3}x - 6$
d) $k: x - 4y + 8 = 0$ i $l: 4x + y - 8 = 0$
e) $k: 2x - 4y - 2 = 0$ i $l: -2x - 4y + 6 = 0$
f) $k: 5x - 4y + 1 = 0$ i $l: 3x + y - 4 = 0$
g) $k: x = 2$ i $l: y = -3$
$h)$ $k: x = 4$ i $l: x = -1$

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m proste k i l są równoległe.

$a)$ $k: y = -4x + 6$ $l: y = (5 - m)x + 2$
b) $k: 3x - 4y + 5 = 0$ $l: (2p - 1)x - y + 3 = 0$
$c)$ $k: y = (4 - 3m)x + 2$ $l: x - 3y + 6 = 0$
$d)$ $k: y = 3m^2 x - \frac{2}{5}$ $l: y = -2x$

Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru m proste k i l są prostopadłe.

$a)$ $k: y = \frac{3}{4}x - 7,$ $l: y = (m - 1)x + 5$
$b)$ $k: y = 4m^2 x + \frac{1}{2},$ $l: y = -9x - 100$
$c)$ $k: y = (m - 2)x + 3,$ $l: y = (2 + m)x + \frac{1}{3}$

Temat: RÓWNANIE PROSTEJ RÓWNOLEGŁEJ I PROSTOPADŁEJ DO DANEJ.

Zadanie 1. Zapisz równanie prostej równoległej do prostej *l* i przechodzącej przez punkt P, gdy:

a) $l: y = 2x - 1, \quad P = (3,1)$ b) $l: y = -4x + 3, \quad P = (-1,2)$

c) $l: 3x - y + 2 = 0, \quad P = (2, 3)$ d) $l: 2x + 4y - 1 = 0, \quad P = (4, -5)$

e) y = 5, P = (0, -3) f) x = -2, $P = (4, -\frac{1}{2})$

Zadanie 2. Zapisz równanie prostej prostopadłej do prostej *l* i przechodzącej przez punkt P, gdy:

a) $l: y = 4x - 5, \quad P = (0, 3)$ b) $l: y = -\frac{1}{4}x + 7, P = (-1,-1)$

c) $l: x + 2y + 2 = 0, \quad P = (-4,1)$ d) *l*: 5x – 2y + 3 = 0, P = (2, 3).

e) $l: y = 4, \quad P = (-3,5)$ f) $l: x = -5, \quad P = (2,-3)$

Zadanie 3. Podstawa AB trapezu ABCD zawiera się w prostej o równaniu y = -2x – 1. Wyznacz równanie prostej zawierającej podstawę CD, jeśli wiadomo, że C = $(-\frac{1}{2}, 4)$.

Zadanie 4. Dwa przeciwległe wierzchołki rombu ABCD mają współrzędne A = (-2, 3) i C = (6, -1). Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną BD tego rombu.

Zadanie 5. Punkty A = (4, -3), B = (10, 6) są wierzchołkami prostokąta ABCD, a prosta 3x – 2y + 8 = 0 zawiera bok CD. Wyznacz równanie prostej AD.

Zadanie 6. Punkty A=(1, 2), B = (13, 4) i C = (7, 10) są wierzchołkami trójkąta ABC. Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta poprowadzoną z:
a) wierzchołka A
b) wierzchołka B

Zadanie 7. Punkty A = (-2, -2), B = (2, 1), C = (3, 5) i D = (-1, 2) są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka D równoległoboku.

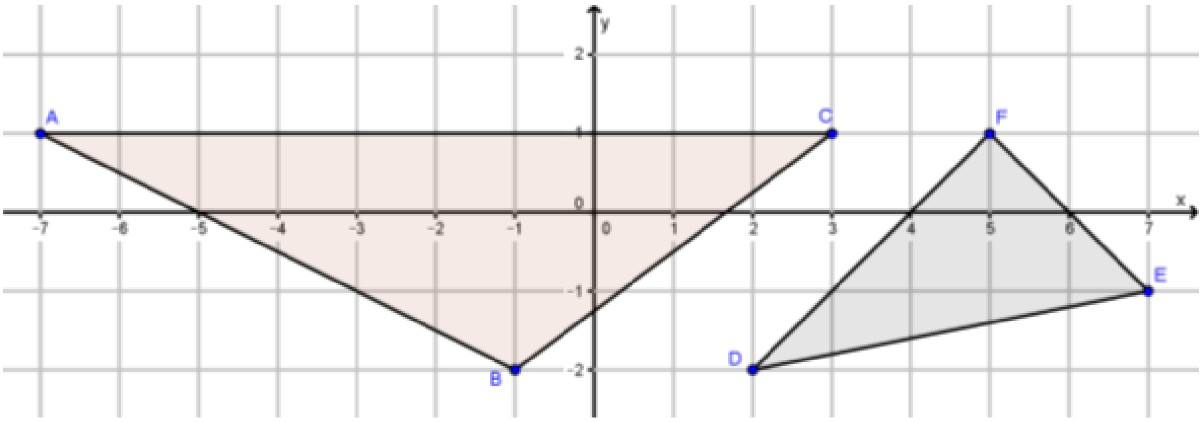
Temat: ODLEGŁOŚĆ NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Jeżeli A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B), to odległość punktów A i B określona jest wzorem

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Zadanie 1. Oblicz długość odcinka, którego końcami są punkty:
a) (3,6) i (2,4) b) (2,3) i (-4,-1)

Zadanie 2. Oblicz obwody trójkątów ABC i DEF (rysunek poniżej).



Zadanie 3. Sprawdź czy trójkąt ABC jest równoramienny.
a) A = (1,3), B = (6,4), C = (4,-1)
b) A = (0,0), B = (4,-1), C = (3,3)
c) A = (-3,-3), B = (12,-3), C = (6,9)
d) A = (-1,0), B = $(2,\sqrt{3})$, C = $(2-\sqrt{3},\sqrt{3})$

Zadanie 4. Sprawdź czy trójkąt ABC jest prostokątny.

a) A = (-1,-1), B = (2, -1) i C = (-1,3)

b) A = (3,0), B = (-6, 8) i C = (-2,-2)

c) A = (-5,-1), B = (4,1) i C = (3,5) .

Zadanie 5. Oblicz długość boku i długość przekątnej kwadratu o wierzchołkach:
A = (1,-2), B = (9,4), C = (3,12) oraz D = (-5,6).

Zadanie 6. Czy trójkąt o wierzchołkach A = (-2,-2), B = (1,2), C = (4,-2) jest trójkątem równobocznym?

Zadanie 7. Dany jest punkt P = (2, 7). Wyznacz na osi *OX* taki punkt R, aby jego odległość od punktu P wynosiła $\sqrt{74}$.

Temat: ŚRODEK ODCINKA I SYMETRALNA ODCINKA

Środek odcinka AB, gdzie S = (x_S, y_S), A = (x_A, y_A) i B = (x_B, y_B), ma współrzędne

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Zadanie 1. Wyznacz środek odcinka AB, gdy:

a) A = (-4, 2) i B = (0, 1)   b) A = (3, 9) i B = (-5, -9)

c) A = (2, 9) i B = (-4, 1)   c) A = $(\sqrt{3}, 1)$ i $B = (3\sqrt{3}, -1)$

Zadanie 2. Środkiem odcinka AB jest punkt $S_{AB} = (5,-2)$. Wyznacz współrzędne punktu B, gdy:

a) A = (1, 8)   b) A = (-2, 5)

c) A = (4,-2)   d) A = (-3, 6)

Zadanie 3. Dane są punkty A = (x,-2) i B = (7,y). Oblicz długość odcinka AB, jeśli jego środkiem jest punkt S = (2,1).

Zadanie 4. Dany jest punkt A = (-4,-3). Oblicz długość odcinka AB jeśli jego środek leży na osi *OX*, a odcięta punktu B jest równa 2.

Zadanie 5. Oblicz odległość punktu K = (2,3) od środka odcinka AB, gdzie A = (-1,-4) i B = (10,1).

Zadanie 6. Napisz równanie symetralnej odcinka AB, gdy:

a) A = (-2, -3) i B = (6, 5)   b) A = (2, -4) i B = (-4, 6)

c) A = (4, -5) i B = (4, 1)   d) A = (-1, 5) i B = (3, -3)

e) A = (-4, -6), B = (2, - 4)   f) A = (-2, 3) i B = (2, 1).

Temat: ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

Odległość d punktu P, takiego, że P = (x_P, y_P) od prostej o równaniu Ax + By + C = 0, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, określona jest wzorem

$$d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Zadanie 1. Oblicz odległość punkt P od prostej *k*.

a) P = (-2, 4), *k*: 3x – 4y + 1 = 0

b) P = (-1, 0), *k*: 3x – 2y + 3 = 0

c) P = (4,2), *k*: y = 2x – 1

d) P = (5,-1), *k*: $y = -\frac{4}{3}x + 2$

Zadanie 2. Oblicz odległość punktu C = (-1,4) od prostej *l* przechodzącej przez punkty A = (-4,-2) i B = (5,4).

Zadanie 3. Oblicz odległość punktu o współrzędnych (2,1) od prostej przechodzącej przez punkty (0,1) i (2,0).

Zadanie 4. Oblicz odległości punktów: A = (0,3), B = (-1,0), C = (-1,3) od prostej *l*.
a) *l*: y – x = 1 b) *l*: 3x – y – 7 = 0 c) *l*: $y = -\frac{1}{2}x + 2{,}5$

Zadanie 5. Oblicz odległość punktów A i B od prostej *l*. Czy prosta AB jest równoległa do prostej *l* ?
a) A = (1,4), B = (5,5), *l*: $y = \frac{2}{3}x - 6$ b) A = (-4,-2), B = (2,6), *l*: $y = 1\frac{1}{3}x - 5$

Zadanie 6. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty A = (1, -1), B = (-3, 4) i C = (3, 4).
a) Napisz równanie prostej AB,
b) Oblicz odległość wierzchołka C od prostej AB

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ.

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ wyznaczać współrzędne, długość i środek wektora,
- ✓ wykonywać działania na wektorach,
- ✓ wyznaczać długość i środek odcinka,
- ✓ zapisywać prostą w postaci ogólnej i kierunkowej,
- ✓ wskazywać współczynnik kierunkowy prostych i na jego podstawie określać ich wzajemne położenie,
- ✓ wyznaczać równanie prostej przechodzącej prze dwa punkty,
- ✓ wyznaczać równanie prostej prostopadłej (równoległej) do podanej, przechodzącej przez wskazany punkt,
- ✓ zapisywać równanie symetralnej odcinka,
- ✓ obliczać odległość punktu od prostej.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Dany jest wektor $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (-2, 3)\ \ i\ \ B = (4, 2)$.
a) Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$
b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$
c) Wyznacz środek wektora $\overrightarrow{AB}$

Zadanie 2. Oblicz współrzędne punktu A wektora $\overrightarrow{AB}$, gdy B = (3,-5) oraz $\overrightarrow{AB} = [7, -7]$.

Zadanie 3. Dane są wektory: $\vec{u} = [3, -4], \vec{v} = [-2,5], \vec{w} = [6,0]$. Znajdź wektor $-3\vec{u} + 4\vec{v} - \vec{w}$.

Zadanie 4. Dana jest prosta *k:* $2x - 4y + 6 = 0$. Wyznacz równanie prostej *l*, która:

a) jest prostopadła do prostej *k* i przechodzi przez punkt P = (-2, 1).

b) jest równoległa do prostej *k* i przechodzi przez punkt P = (4, 2).

Zadanie 5. Dane są punkty A = (3, -2) i B = (5, 4).

a) Wyznacz długość odcinka AB.

b) Wyznacz środek odcinka AB

c) Zapisz równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B

d) Zapisz równanie symetralnej odcinka AB.

Zadanie 6. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C mając dane A = (1, 1), B = (2, 6) i C = (-4, 2).

ZADANIA ZAMKNIĘTE

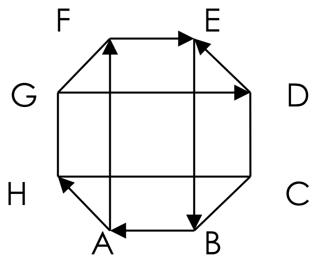
Zadanie 1. Które z wektorów zaznaczonych w ośmiokącie foremnym są równe?

A. $\overrightarrow{EB}$ i $\overrightarrow{AF}$,

B. $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{FE}$,

C. $\overrightarrow{AH}$ i $\overrightarrow{DE}$,

D. $\overrightarrow{GD}$ i $\overrightarrow{AF}$.



Zadanie 2. Współrzędnymi wektora o początku *A* = (-3,2) i końcu *B* = (4,-6) są:

A.[-7,8] B. [7,8] C. [-7,-8] D. [7,-8].

Zadanie 3. Dane są punkty: A = (0,2), B = (3,0), C = (2,0) i D = (0,1). Długość wektora $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ wynosi:

A.$\sqrt{89}$ B. 9 C. $\sqrt{73}$ D. 9,4.

Zadanie 4. Współczynnikiem kierunkowym prostej o równaniu 3x – 2y + 2 = 0 jest liczba:

A. 3 B. -3 C. $\frac{3}{2}$ D. -$\frac{3}{2}$

Zadanie 5. Prosta o równaniu 2x – y + 3 = 0 jest nachylona do osi *OX* pod kątem α . Wtedy:

A. $\alpha \in (0^\circ, 30^\circ)$ B. $\alpha \in (45^\circ, 60^\circ)$

C. $\alpha \in (30^\circ, 45^\circ)$ D. $\alpha \in (60^\circ, 90^\circ)$.

Zadanie 6. Prosta o współczynniku kierunkowym $-\frac{1}{2}$, zawierająca punkt (-4, 1), ma równanie:

A. $y = -\frac{1}{2}x + 4$ B. $y = -\frac{1}{2}x - 4$ C. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ D. $y = -\frac{1}{2}x - 1$

Zadanie 7. Prosta *l* ma równanie ogólne $x - 2y - 4 = 0$. Wskaż równanie kierunkowe tej prostej:

A. $y = 1\frac{1}{2}x + 2$ B. $y = -1\frac{1}{2}x + 2$ C. $y = 1\frac{1}{2}x + 1$ D. $y = \frac{1}{2}x - 2$

Zadanie 8. Wskaż postać kierunkową prostej $-4x + 8y - 6 = 0$:

A. $y = 0{,}5x + 0{,}75$ B. $y = 4x + 6$ C. $y = -0{,}5x - 6$ D. $y = -0{,}5x - 0{,}74$

Zadanie 9. Do prostej *k* należą punkty *P* = (-1, 4) i *M* = (1, 2). Współczynnik kierunkowy prostej *k* jest równy:

A. -3 B. 3 C. -1 D. 1

Zadanie 10. Prosta, do której należą punkty (-6, -1) i (2, 3), ma równanie:

A. $y = \frac{1}{3}x + 1$ B. $y = 2x - 4$ C. $y = \frac{1}{2}x + 2$ D. $y = -\frac{1}{2}x - 4$

Zadanie 11. Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$

A. są równoległe B. są prostopadłe
C. pokrywają się D. przecinają się pod innym kątem niż kąt prosty

Zadanie 12. Proste o równaniach $x - 2y + 3$ i $2x + y = 5$:

A. są równoległe B. są prostopadłe
C. pokrywają się D. przecinają się w punkcie *P* = (2, 2)

Zadanie 13. Prosta *l* ma równanie $y = -\frac{1}{4}x + 7$. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej *l*:

A. $y = \frac{1}{4}x + 1$ B. $y = -\frac{1}{4}x - 7$ C. $y = 4x - 1$ D. $y = -4x + 7$.

Zadanie 14. Prostą prostopadłą do prostej $x + 2y + 5 = 0$ jest:

A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ B. $x + y + 1 = 0$ C. $y - 1 = 2x$ D. $y = -5 - 2x$.

Zadanie 15. Przykładem równania prostej prostopadłej do prostej o równaniu $-x + 2y - 3 = 0$ jest:

A. $y = \frac{1}{2}x + 3$ B. $y = -2x + 7$ C. $y = -\frac{1}{2}x - 3$ D. $y = 2x$.

Zadanie 16. Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{4}x + 2$ i przecinająca oś *OY* w punkcie (0, -1) ma równanie:

A. $y = -1\frac{1}{3}x - 1$ B. $y = -\frac{3}{4}x - 1$ C. $y = 1\frac{1}{3}x - 1$ D. $y = \frac{3}{4}x - 1$.

Zadanie 17. Proste o równaniach $y = (m + 2)x$ i $y = (2m - 1)x - 2$ są równoległe, gdy:

A. $m = 3$ B. $m = 2$ C. $m = 1$ D. $m = 0$

Zadanie 18. Proste $y = (2m + 1)x - 4$ i $y = x + 5$ są prostopadłe, gdy:

A. $m = 2$ B. $m = 1$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

Zadanie 19. Proste, w których zawierają się przekątne pewnego kwadratu mają postać:

A. $2x-y-1=0$ i $x-2y+5=0$ B. $2x-y-1=0$ i $4x-2y-2=0$

C. $2x-y-1=0$ i $-x+2y+4=0$ D. $2x-y-1=0$ i $x+2y-6=0$

Zadanie 20. Dane są punkty A = (-2, 3) oraz B = (4, 6). Odległość między punktami A i B jest równa:

A. $\sqrt{208}$ B. $\sqrt{52}$ C. $\sqrt{45}$ D. $\sqrt{40}$

Zadanie 21. Odległość między punktami K = (3, 5) i L = (-5, -1) jest równa:

A. 9 B. 5 C. 10 D. 12

Zadanie 22. Odległość między punktami o współrzędnych A = (4, -7) oraz B = (-1, -19) wynosi:

A. 13 B. 17 C. $\sqrt{153}$ D. $\sqrt{701}$

Zadanie 23. Odległość punktu o współrzędnych (3, 4) od początku układu współrzędnych wynosi:

A. 3 B. 4 C. 5 D. nie można określić

Zadanie 24. Środek odcinka AB, gdzie A = (2, -5) i B = (-4, 1) to punkt:

A. (3, 3) B. (-3, -3) C. (-1, -2) D. (1, 2)

Zadanie 25. Punkt C = (-1, 2) jest środkiem odcinka AB, gdy:

A. A = (3, 2), B = (-5, -1) B. A = (-3, 2), B = (5, 2)

C. A = (3, -2), B = (-5, 6) D. A = (-3, 2), B = (5, -6)

Zadanie 26. Punkt (2, -3) jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że A = (-6, -5), wskaż punkt B:

A. (-2, -4) B. (10, -1) C. (-2, -11) D. (-14, -7)

Zadanie 27. Punkt P = (3, m – 2), gdzie $m \in R$, jest środkiem odcinka AB, gdzie A = (2, -1) i B = (4, 3). Zatem:

A. m = 3 B. m = 1 C. m = 0 D. m = 6

Zadanie 28. Jeden z końców odcinka ma współrzędne (4, 1), zaś środek odcinka ma współrzędne (1, 2). Współrzędne drugiego końca odcinka są równe:

A. (3, -2) B. (7, 0) C. $(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ D. (-2, 3).

Zadanie 29. Równanie symetralnej odcinka o końcach P = (1, 2), Q = (3, -2) ma postać:

A. x – y = 0 B. 2x – y – 2 = 0 C. x – 2y – 2 = 0 D. x – y + 2 = 0.

4. FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ cz. II

Temat: RÓWNANIE OKRĘGU

Okręgiem o środku S i promieniu r (r > 0) nazywamy zbiór punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r.

Równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie S = (a, b) i promieniu r (r > 0). Jest to **postać kanoniczna równania okręgu**.

Równanie $x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\quad gdzie\quad c=a^2+b^2-r^2\quad i\quad a^2+b^2-c>0$, to **postać ogólna równania okręgu** o środku S = (a, b) i promieniu r.

Zadanie 1. Wyznacz współrzędne środka okręgu i jego promień:

a) $(x+3)^2+(y-6)^2=8$ b) $x^2+(y-1)^2=3$

c) $(x-1)^2+(y+5)^2=16$ d) $(x-\sqrt{2})^2+y^2=18$

e) $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ f) $(x+\sqrt{3})^2+(y+2)^2=5$

g) $x^2+y^2=9$ h) $(x-5)^2+y^2=1$

Zadanie 2. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r

a) $S=(2,4)\quad r=4$ b) $S=(-3,2)\quad r=5$

c) $S=(0,-4)\quad r=\sqrt{5}$ d) $S=(1,0)\quad r=\frac{1}{2}$

e) $S=(0,0) \quad r=2\sqrt{3}$

f) $S=(2,-4) \quad r=3\sqrt{2}$

g) $S=(3,5) \quad r=5\sqrt{2}$

h) $S=(-2,-4) \quad r=3\sqrt{7}$

Zadanie 3. Wyznacz współrzędne środka okręgu i jego promień:

a) $x^2+y^2-4x-4y+6=0$

b) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$

c) $x^2+3x+y^2-10y+27=0$

d) $x^2-2\sqrt{2}x+y^2+2y-7=0$

e) $x^2+y^2-10x-4y+28=0$

f) $x^2+y^2-8x-4y-25=0$

Zadanie 4. Wyznacz współrzędne środka okręgu i jego promień:

a) $x^2+(y-7)^2=81$

b) $(x-5)^2+(y+3)^2=8$

c) $(x-1)^2+y^2=4$

d) $x^2+y^2=9$

e) $x^2+y^2+2x-6y+9=0$

f) $x^2+y^2-10y-16=0$

g) $x^2+y^2+8x-2y+12=0$

h) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

Zadanie 5. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie S = (1, 3) wiedząc, że punkt P = (-2, -1) należy do tego okręgu.

Zadanie 6. Wyznacz równanie okręgu o środku S = (3, -5) przechodzącego przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 7. Środek odcinka o końcach A = (5,-1) i B = (-7,-3) jest środkiem okręgu o promieniu r = 8. Napisz równanie tego okręgu.

Zadanie 8. Napisz równanie okręgu o środku S = (-3,6) i promieniu równym długości odcinka o końcach A = (2,-3) i B = (-5,-1).

Zadanie 9. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB, gdzie:

a) A = (1, 3) oraz B = (7, -3)

b) A = (-1,3) oraz B = (1,-1).

Zadanie 10. Znajdź współrzędne punktów przecięcia okręgu z osiami układu współrzędnych:

a) $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$

b) $x^2+y^2-4x-4y=0$

Zadanie 11. Określ wzajemne położenie okręgów o podanych środkach S_1 i S_2 oraz promieniach r_1 i r_2.

a) $S_1=(3,2), \quad S_2=(6,2), \quad r_1=2, \quad r_2=1$

b) $S_1=(0,0), \quad S_2=(3,0), \quad r_1=2, \quad r_2=5$

c) $S_1=(-5,2), \quad S_2=(1,-6), \quad r_1=4, \quad r_2=6$.

Zadanie 12. Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach:

a) $(x+3)^2+y^2=25, \quad (x+4)^2+y^2=4$

b) $x^2+(y-2)^2=47, \quad x^2+(y+8)^2=9$

c) $(x-3)^2+(y-4)^2=36, \quad (x-3)^2+(y-1)^2=1$

d) $(x+1)^2+(y+2)^2=9, \quad (x-1)^2+(y-3)^2=16$

Temat: NIERÓWNOŚĆ KOŁA

Kołem o środku S i promieniu r (r > 0) nazywamy zbiór punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza lub równa r.

Koło o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu r opisuje **nierówność** $(x-a)^2+(y-b)^2 \le r^2$

Zadanie 1. Przedstaw na płaszczyźnie kartezjańskiej figurę opisaną nierównością:

a) $x^2+(y-2)^2 \le 9$ b) $(x+3)^2+(y-1)^2 < 4$

c) $x^2+(y-2)^2 \ge 4$ d) $(x+1)^2+y^2 > 25$

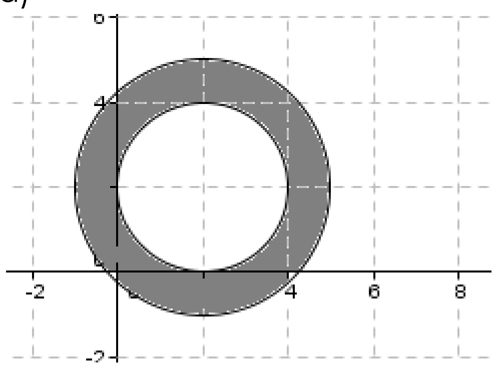
Zadanie 2. Narysuj w układzie współrzędnych figurę opisaną układem warunków:

a) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 16 \\ y \le x \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 16 \end{cases}$

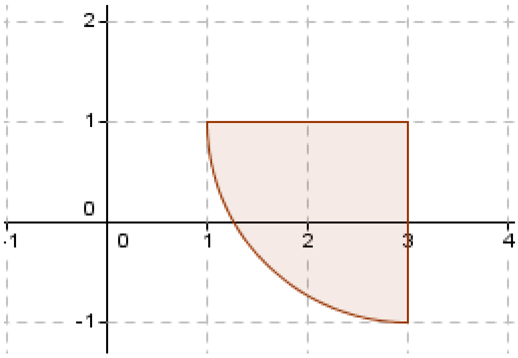
c) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 16 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-12 \le 0 \\ x^2+y^2 \ge 1 \end{cases}$

Zadanie 3. Podaj warunki, jakie spełniają współrzędne punktów figury zacieniowanej na rysunku

a)

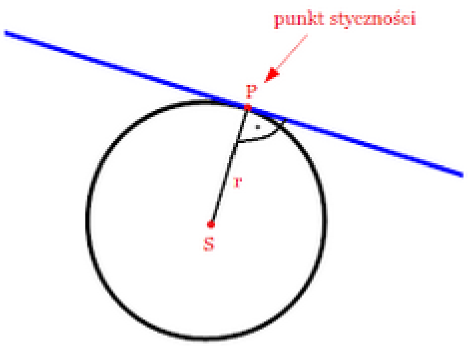


b)

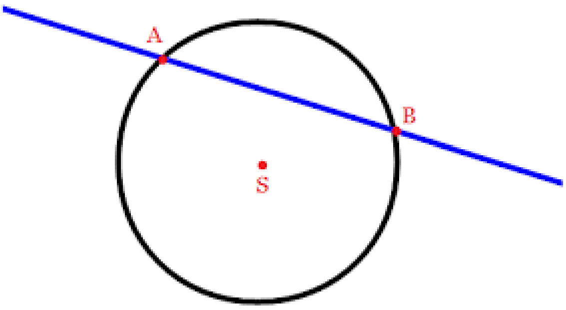


Temat: WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTEJ I OKRĘGU

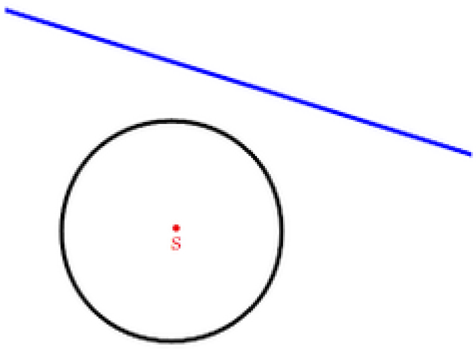
Styczną do okręgu nazywamy prostą, która ma z okręgiem jeden punkt wspólny. Odległość środka okręgu do punktu styczności jest równa promieniowi *r*. Styczna do okręgu jest prostopadła do odcinka łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.



Sieczną okręgu nazywamy prostą, która ma dwa punkty wspólne z okręgiem. Odległość środka okręgu od siecznej jest mniejsza od promienia okręgu



Zewnętrzną do okręgu nazywamy prostą, która nie ma z nim punktów wspólnych.



Jeśli okrąg i prosta mają równania $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *i* $Ax+By+C=0$ to aby określić wzajemne położenie prostej i okręgu obliczamy odległość d środka okręgu od prostej i porównujemy liczby d *i* r.

$$d=\frac{|A\cdot a+B\cdot b+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Zadanie 1. Podaj ile punktów wspólnych z okręgiem o środku *S* i promieniu 4 ma prosta *l*.

a) *l*: 12x + 5y – 4 = 0, S = (3,4)

b) *l*: 4x +3y +6 = 0, S =(-3,2)

c) *l*: 3x + 4y – 12 = 0, S = (7,4)

d) *l*: x + y =0, S = $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Zadanie 2. Oblicz odległość środka okręgu o równaniu $(x+1)^2+(y+2)^2=25$ od prostej $x+y-3=0$. Uzasadnij, że ta prosta ma dwa punkty wspólne z podanym okręgiem.

Zadanie 3. Określ wzajemne położenie okręgu i prostej o równaniach:

a) $4x-3y+2=0, \quad (x-1)^2+y^2=1$

b) $6x+8y-15=0, \quad (x-1)^2+(y+2)^2=9$

c) $x-y-1=0, \quad (x-3)^2+(y+2)^2=8$

d) $x-2y+5=0, \quad (x+3)^2+(y-1)^2=5$

Zadanie 4. Określ wzajemne położenie okręgu: *o*:$(x+1)^2+(y-3)^2=5$ i prostej *l*: $y=-\frac{1}{2}x+5$.

Zadanie 5. Ile punktów wspólnych ma okrąg o równaniu $x^2+(y-2)^2=9$ z prostą o równaniu 3x + y – 5 = 0?

Zadanie 6. Prosta *l* jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt A. Oblicz promień tego okręgu.

a) *l*: $y=\frac{1}{2}x+4$, A = (-3,0)

b) *l*: 3x + 4y -5 = 0, A = (-4,-2)

Temat: TRÓJKĄTY NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Przypomnijmy:

• w każdym trójkącie można przeprowadzić **symetralne jego boków**, które przecinają się w jednym punkcie. Punkt przecięcia się symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

• w każdym trójkącie można poprowadzić trzy **środkowe**, które przecinają się w jednym punkcie S zwanym **środkiem ciężkości trójkąta**.

Jeżeli punkt $S=(x_s, y_s)$ jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, gdzie $A=(x_A, y_A), B=(x_B, y_B)$ i $C=(x_C, y_C)$, to $x_S=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$ i $y_S=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$

• w każdym trójkącie można poprowadzić trzy **wysokości**. Przecinają się w jednym punkcie zwanym **ortocentrum**.

Pole trójkąta ABC, gdzie $A=(x_A, y_A), B=(x_B, y_B)$ i $C=(x_C, y_C)$ określone jest wzorem

$P=\frac{1}{2}\cdot|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)|$.

Zadanie 1. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach A, B, C jest prostokątny, gdy:
a) A = (-2, 4), B = (2, 2), C = (-3, -8)
b) A = (3, 8), B = (1, 2) i C = (6, 7)
c) A = (1, 1), B = (2, 6) i C = (-4, 2).

Zadanie 2. Boki trójkąta zawierają się w prostych x + y – 1 = 0, y = -3, -2x + 2y – 1 = 0. Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny.

Zadanie 3. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach: x + y – 1 = 0, y = -3, -2x + 2y – 1 = 0. Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny.

Zadanie 4. Dane są wierzchołki trójkąta A = (2, 2), B = (7, 7), C = (10, 3). Wyznacz długość wysokości trójkąta ABC opuszczonej z punktu C.

Zadanie 5. Punkty A = (1, 2), B = (-1, -1), C = (5, 2) są wierzchołkami trójkąta ABC. Napisz równanie prostej zawierającej:
a) środkową trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C.
b) wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A.

Zadanie 6. Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty A = (-2, -1), B = (6, 1), C = (7, 10).

Zadanie 7. Wiadomo, że A = (0, 3), B = (-1, 0), C = (0, 0). Znajdź równanie prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C.

Zadanie 8. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C mając dane A = (1, 1), B = (2, 6) i C = (-4, 2).

Zadanie 9. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych o równaniach: $x - y + 3 = 0, \quad 3x - y - 7 = 0, \quad x + y - 1 = 0$. Oblicz:

a) Współrzędne wierzchołków trójkąta,
b) obwód trójkąta
c) pole trójkąta

Zadanie 10. Wierzchołek C trójkąta ABC jest punktem przecięcia się prostych o równaniach y = x + 2 i y = -2x + 14, a wierzchołki A i B są punktami przecięcia się tych prostych z osią OX. Oblicz pole i obwód trójkąta ABC.

Zadanie 11. Dany jest trójkąt ABC ograniczony prostą -4x + 2y + 1 = 0 i osiami *OX* oraz *OY*.

a) Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

b) Oblicz jego pole.

Zadanie 12. Punkty A = (-2, 0), B = (2, -2) i C = (4, 6) są wierzchołkami trójkąta ABC.

a) Wyznacz równanie środkowej trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A.

b) Oblicz współrzędne środka ciężkości tego trójkąta.

Zadanie 13. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach: x + y – 1 = 0, y = -3, -2x + 2y – 1 = 0. Oblicz współrzędne wierzchołków tego trójkąta oraz jego pole.

Zadanie 14 . Dane są punkty A = (-1,-1), B = (5,2), C = (4,1).

a) Sprawdź czy trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym.

b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 15. Oblicz pole trójkąta ABC, wiedząc, że A = (-2,-2), B = (4,1), C = (0,4).

Zadanie 16. Punkty A = (1, 5), B = (14, 31), C = (4, 31są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz długość odcinka BD.

Temat: CZWOROKĄTY NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Zadanie 1. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku: $A = (-4,-3)$ i $B = (1,-2)$ oraz punkt przecięcia przekątnych $S = (2,1)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki równoległoboku.

Zadanie 2. Punkty $A = (1,-2)$, $B = (3,2)$, $C = (0,4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku ABCD. Wyznacz współrzędne wierzchołka D.

Zadanie 3. Dane są wierzchołki $A = (-3,-1)$, $B = (1,2)$, $C = (4,-2)$ kwadratu ABCD. Oblicz współrzędne wierzchołka D oraz pole kwadratu ABCD.

Zadanie 4. Wiadomo, że $A = (-1, 4)$, $B = (2, 4)$ i $D = (-1, -2)$. Znajdź równanie prostej, w której zawiera się przekątna AC prostokąta ABCD i określ jej współczynnik kierunkowy.

Zadanie 5. Punkty $A = (0, 6)$, $B = (2, 0)$, $C = (8, 2)$ są kolejnymi wierzchołkami kwadratu ABCD.

a) Oblicz współrzędne wierzchołka D.

b) Napisz równania prostych zawierających przekątne tego kwadratu.

Zadanie 6.W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2,5)$ i $C = (6, 7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ABCD. Wyznacz równanie prostej BD.

Zadanie 7. Dany jest kwadrat o kolejnych wierzchołkach $A = (-4,2)$ i $B = (6,-2)$. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym kwadracie.

Zadanie 8. Punkty $R = (2,4)$ i $N = (-4,-2)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ARON. Oblicz pole koła opisanego na tym kwadracie.

Zadanie 9. Punkt $M = (2, -5)$ jest wierzchołkiem kwadratu. Jeden z jego boków zawiera się w prostej o równaniu $x + 2y - 7 = 0$. Oblicz pole powierzchni tego kwadratu.

Zadanie 10. Sprawdź, czy czworokąt ABCD, gdzie $A = (-3, -1)$, $B = (53, -2)$, $C = (54, 4)$, $D = (-2, 3)$ jest równoległobokiem. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 11. Sprawdź czy punkty $A = (1,1)$, $B = (4,2)$, $C = (7,1)$, $D = (-2,-2)$ są wierzchołkami trapezu.

Zadanie 12. Wiadomo, że $A = (-1, 4)$, $B = (2, 4)$, $C = (-1, -2)$. Znajdź równanie prostej, w której zawiera się przekątna AC prostokąta ABCD i określ jej współczynnik kierunkowy.

Zadanie 13. Proste o równaniach $y - 4 = 0$ i $4x - y + 12 = 0$ oraz osie układu współrzędnych ograniczają trapez. Oblicz tangens kata ostrego tego trapezu.

Zadanie 14. Oblicz długość wysokości równoległoboku ABCD, gdy $A = (-1, 1)$, $B = (3, -2)$, $C = (2, 3)$ i $D = (-2,6)$.

Zadanie 15. Oblicz pole równoległoboku ABCD o wierzchołkach w punktach: $A = (-4,2)$, $B = (7,-1)$, $C = (10,3)$, $D = (-1,6)$.

Zadanie 16. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $3x - y - 1 = 0$ i $x + 5y - 11 = 0$, a jednym z jego wierzchołków jest punkt $(7,4)$. Wyznacz pozostałe wierzchołki tego równoległoboku.

Zadanie 17. Dwa boki równoległoboku leżą na prostych $x - 3y + 6 = 0$ i $4x + 2y + 5 = 0$. Napisz równania prostych, na których leżą dwa pozostałe boki, wiedząc, że wierzchołkiem równoległoboku jest punkt $A = (5,-1)$. Sporządź rysunek ilustrujący to zadanie.

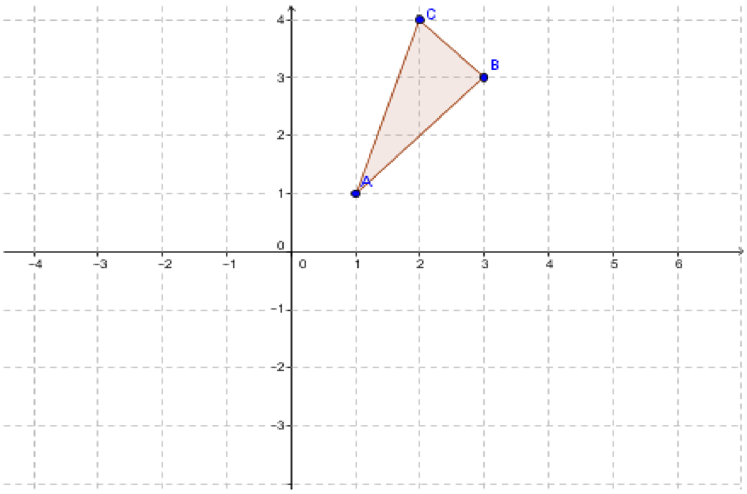
Temat: SYMETRIA OSIOWA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Zadanie 1. Dane są punkty $A = (1, 3)$, $B = (-4, 1)$, $C = (-2, -5)$ i $D = (4, 0)$.Podaj współrzędne punktów:

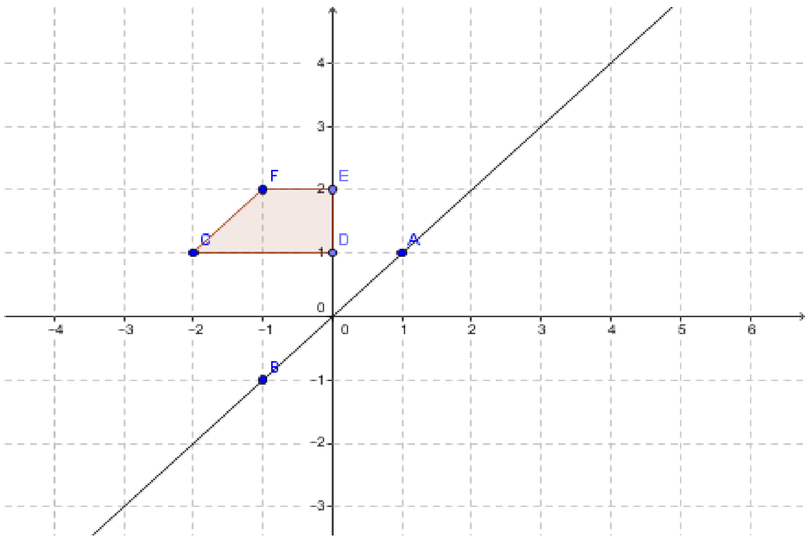
a) A', B', C', D' symetrycznych odpowiednio do punktów A, B, C i D względem osi OX

b) A", B", C" i D" symetrycznych odpowiednio do punktów A, B, C i D względem osi OY. Zaznacz te punkty na rysunku.

Zadanie 2. Narysuj figurę A'B'C' symetryczną do danej względem osi OX oraz figurę A"B"C" symetryczną do danej względem osi OY.



Zadanie 3. Narysuj figurę symetryczną do danej względem prostej *l* .



Zadanie 4. Sprawdź czy okrąg o średnicy AB jest symetryczny do okręgu o średnicy CD względem osi *OX* lub osi *OY*, jeśli A = (0,5), B = (6,3), C = (-4,1), D = (-2,7)

Zadanie 5. Dane są punkty A = (-2, -1), B = (2, -5), C = (8, 1), D = (4, 5). Oblicz pole części wspólnej prostokąta ABCD oraz jego obrazu w symetrii względem:
a) osi OX
b) osi OY

Zadanie 6. Sprawdź czy okrąg o średnicy AB jest symetryczny do okręgu o średnicy CD względem osi *OX* lub osi *OY*, gdy A = (-4,-6), B = (2,2), C = (3,5), D = (-5,-1).

Zadanie 7. Dane są punkty A = (-2, -1), B = (2, -5), C = (8, 1), D = (4, 5). Oblicz pole części wspólnej prostokąta ABCD oraz jego obrazu w symetrii względem prostej y = x.

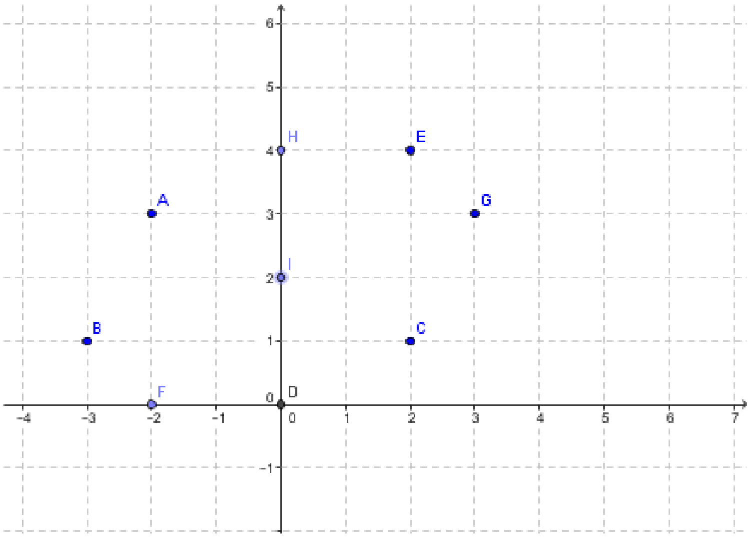
Zadanie 8. Która z wypisanych obok liter ma:
a) 0 osi symetrii
b) 1 oś symetrii
c) 2 osie symetrii?

A M E F H

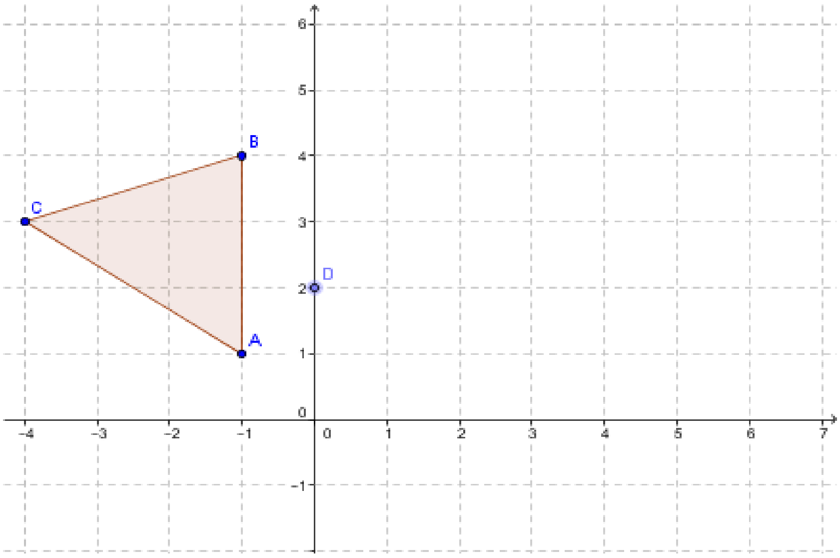
Zadanie 9. Dany jest trapez *ABCD*, gdzie A = (0,3), B = (2,-1), C = (4,-1) i D = (5,3). Narysuj ten trapez w układzie współrzędnych oraz jego obraz w symetrii względem:
a)osi OX   b) osi OY
c) prostej x = 2   d) prostej y = x.

Temat: SYMETRIA ŚRODKOWA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Zadanie 1. Podaj punkty symetryczne do podanych punktów względem punktu I.



Zadanie 2. Narysuj obraz trójkąta ABC w symetrii względem punktu D.



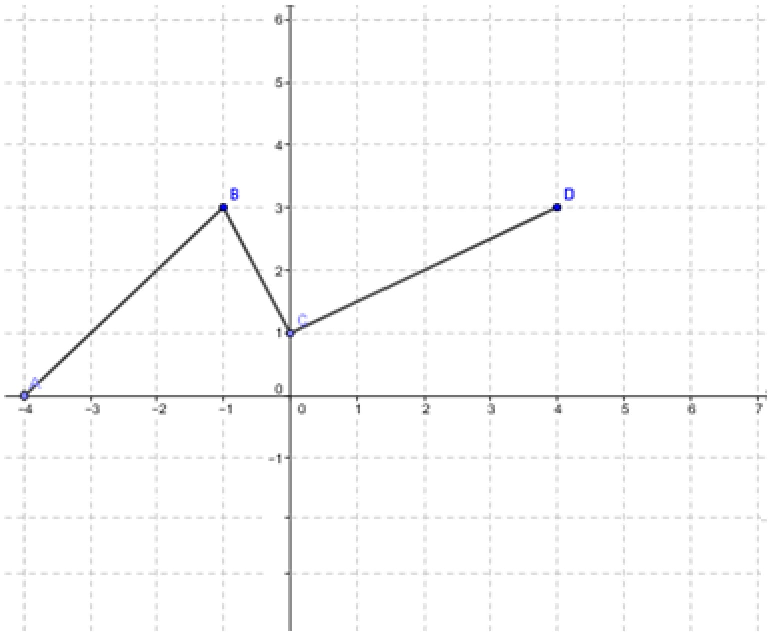
Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC, gdzie A = (1,1), B = (5,1), C = (2,2). Narysuj obraz tego trójkąta w symetrii względem punktu (3,3).

Zadanie 4. Prostokąty ABCD i A'B'C'D' są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów, jeśli A = (-2,1), B = (1,-2), C = (3,0), D = (0,3).

Zadanie 5. Punkt A' położony jest symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA', jeśli:

a) A = (-1,4) b) A = (-6,-8) c) A = (2, 3)

Zadanie 6. Narysuj obraz łamanej ABCD w symetrii względem początku układu współrzędnych.



Zadanie 7. Wyznacz środek symetrii kwadratu o wierzchołkach: A = (1,-2), B = (9,4), C = (3,12), D = (-5,6).

Zadanie 8. Dany jest trójkąt ABC, gdzie A = (1,1), B = (5,1), C = (1,6). Narysuj obraz tego trójkąta w symetrii względem punktu:

a) $O_1 = (0,0)$ b) $O_2 = (1,1)$ c) $O_3 = (2,2)$

Zadanie 9. Prostokąty ABCD i A'B'C'D' są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów, jeśli A = (-3,-2), B = (5,-2), C = (5,3), D = (-3,3).

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ odczytać z postaci kanonicznej i ogólnej równania okręgu jego środek i promień,
- ✓ zapisać równanie okręgu o podanym środku i promieniu,
- ✓ zapisać równanie okręgu o podanych punktach stanowiących początek i koniec średnicy okręgu,
- ✓ wyznaczyć punkty przecięcia okręgu i osi układu współrzędnych,
- ✓ określić wzajemne położenie okręgu i prostej,

- ✓ określić wzajemne położenie dwóch okręgów,
- ✓ narysować obraz dowolnego wielokąta w symetrii osiowej i symetrii środkowej,
- ✓ wyznaczyć:
  - równanie prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta (czworokąta)
  - równanie środkowej w trójkącie
  - długość wysokości trójkąta (czworokąta).

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Wskaż równanie okręgu o środku o współrzędnych (4, -8) i promieniu 7

A. $(x-4)^2+(y+8)^2=49$ C. $(x-4)^2+(y-8)^2=49$

B. $(x-4)^2+(y+8)^2=7$ D. $(x+4)^2+(y-8)^2=7$

Zadanie 2. Środek okręgu o równaniu x^2+y^2 - 10x - 8y – 80 = 0 ma współrzędne:

A. (-5, 4) B. (5, 4) C. (10, 8) D. (10, -8)

Zadanie 3. Promień okręgu o równaniu x^2+y^2 - 6x + 2y – 6 = 0 ma długość:

A. 6 B. 4 C. 2 D. $\sqrt{6}$

Zadanie 4. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ z osiami układu współrzędnych jest równa:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 5. Okręgi $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ i $(x-4)^2+(y-3)^2=1$

A. są styczne zewnętrznie B. są styczne wewnętrznie

C. mają dwa punkty wspólne D. są rozłączne

Zadanie 6. Okrąg o środku S = (-2, 2) jest styczny do obu osi układu współrzędnych. Równanie tego okręgu ma postać:

$A.$ $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ B. $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

$C.$ $(x-2)^2+(y+2)^2=2$ D. $(x+2)^2+(y-2)^2=2$

Zadanie 7. Punkt A ma współrzędne (3,-2). Punkt B jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych. Punkt B ma współrzędne:

A. (-3,2) B. (-2,3) C. (-3,-2) D. (3,2)

Zadanie 8. Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty A = (-2, -1), B = (6, 1), C = (7, 10).

Zadanie 9. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C mając dane A = (1, 1), B = (2, 6) i C = (-4, 2).

Zadanie 10. Zbadaj położenie prostej l o równaniu $3x-4y-13=0$ względem okręgu o równaniu $x^2+y^2-10x+24y-56=0$

Zadanie 11. Punkty A = (0,0), B = (3, 1), D = (-1, 1) są wierzchołkami równoległoboku ABCD. Oblicz współrzędne wierzchołka D.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Równanie okręgu o środku S = (-1,2) i promieniu r = 2 ma postać:

$A. (x+1)^2+(y+2)^2=4$ C.$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

$B. (x+1)^2+(y-2)^2=2$ D.$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

Zadanie 2. Równanie okręgu o środku S = (2,1) i promieniu r = 3 ma postać:

$A. (x-2)^2+(y+1)^2=3$ C.$(x-2)^2+(y-1)^2=9$

$B. (x+2)^2+(y-1)^2=3$ D.$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

Zadanie 3. Równanie okręgu o promieniu 3, stycznego z osiami *OX* i *OY* oraz znajdującego się w I ćwiartce układu współrzędnych ma postać:

$A. (x+3)^2+(y+3)^2=9$ C.$(x-3)^2+(y-3)^2=9$

$B. (x+3)^2+(y+3)^2=3$ D.$(x-3)^2+(y-3)^2=3$

Zadanie 4. Wskaż równanie okręgu o promieniu 6.

A. $x^2 + y^2 = 3$ C. $x^2 + y^2 = 6$

B. $x^2 + y^2 =12$ D. $x^2 + y^2 = 36$

Zadanie 5. Promień okręgu o równaniu $(x - 1)^2 + y^2 = 16$ jest równy:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadanie 6. Promień okręgu o równaniu x^2+y^2 - 6x + 2y – 6 = 0 ma długość:

A. 6 B. 4 C. 2 D. $\sqrt{6}$

Zadanie 7. Odległość środka okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y+1)^2=9$ od początku układu współrzędnych wynosi:

$A. \sqrt{10}$ B. 4 C. 3 D. $\sqrt{2}$

Zadanie 8. Odległość środka okręgu o równaniu $x^2+y^2-2x-3=0$ od początku układu współrzędnych jest równa:

A.2 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 3

Zadanie 9. Dany jest okrąg o równaniu $x^2+y^2+2x-6y-10=0$. Wówczas:

A.$r=\sqrt{20}$ B. r=20 C. r=10 D. $r=\sqrt{10}$

Zadanie 10. Środek okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ ma współrzędne:
A. S = (-3,4) B. S = (-6,8) C. S = (3,-4) D.S= (6,-8)

Zadanie 11. Okrąg o środku S=(-2,2) jest styczny do obu osi układu współrzędnych. Równanie tego okręgu ma postać:
A. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$ C. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$
B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ D. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$

Zadanie 12. Które osie układu współrzędnych przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$?
A. Przecina obie osie
B. Przecina tylko oś x
C. Przecina tylko oś y
D. Nie przecina żadnej osi układu współrzędnych

Zadanie 13. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ z osiami układu współrzędnych jest równa:
A.0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 14. Okręgi o równaniach $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$ i $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$:
A. są styczne zewnętrznie
B. są styczne wewnętrznie
C. mają dwa punkty wspólne
D. są rozłączne.

Zadanie 15. Który z poniższych punktów leży na okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$
A.(-2,1) B. (2,3) C. (-5,1) D. (0,0)

Zadanie 16. Dane są punkty S = (2, 1) i M = (6, 4). Równanie okręgu o środku S i przechodzącego przez punkt M ma postać:
$A.$ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ C.$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$
$B.$ $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 5$ D.$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$

Zadanie 17. Pole koła ograniczonego okręgiem $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$ wynosi:
A. $\sqrt{7}\pi$ B. $\sqrt{19}\pi$ C. 7π D. 19π

Zadanie 18. Okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach A = (3,-4) i B = (-1,2), ma równanie:
A. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 13 = 0$ C. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$
B . $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 13 = 0$ D. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

Zadanie 19. Liczba punktów wspólnych okręgu o promieniu 4 i środku w punkcie K = (0,3) z prostą o równaniu y = -x + 1 jest równa:

A.0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 20. Ile punktów wspólnych ma prosta $x + y = 0$ z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 9$?

A.2 B. nieskończenie wiele C. 1 D. 0

Zadanie 21. Ile punktów wspólnych ma prosta o równaniu y = -x + 2 z okręgiem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 22. Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x + 3)^2 + y^2 = 5$ z prostą o równaniu y = -2x + 1 jest równa:

A. 0 B. 1 C. 2 D.3.

Zadanie 23. Pole trójkąta ograniczonego prostą y = -2x + 6 oraz osiami układu współrzędnych wynosi:

A. 3 B. 6 C. 9 D. 18

Zadanie 24. Punkty A = (-1, 5) i B = (-3,2) są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Długość boku tego trójkąta wynosi:

A. 5 B. $\sqrt{13}$ C. $\sqrt{67}$ D. $\sqrt{61}$

Zadanie 25. Punkty A = (-5, 2) i B = (3, -2) są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 30 B. 36 C. $12\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

Zadanie 26. Trójkąt o wierzchołkach A = (0,0), B = (1, 4), C = (5,2) ma pole:

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

Zadanie 27. Punkt A = (-1, 1) jest środkiem kwadratu, a punkt B = (2, 0) jego wierzchołkiem. Bok kwadratu ma długość:

A. 5 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{5}$

Zadanie 28. Dwa kolejne wierzchołki kwadratu mają współrzędne: A = (-1, 3), B = (3, -3). Pole tego kwadratu wynosi:

A. 12 B. 52 C. $2\sqrt{13}$ D. $13\sqrt{2}$

Zadanie 29. Dane są wierzchołki czworokąta: A = (-2, 4), B = (6, 4), C = (6, -4) i D = (-2, -4). Długość przekątnej BD tego czworokąta wynosi:

A. $8\sqrt{2}$ B. $\sqrt{124}$ C. $2\sqrt{8}$ D. 4

Zadanie 30. Punkty A = (1, 1) i C = (6, 0) są przeciwległymi wierzchołkami równoległoboku ABCD. Punkt przecięcia przekątnych mam współrzędne:

A. $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ C. $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ D. $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

Zadanie 31. Przekątna LM rombu KLUM leży na prostej o równaniu y = 0,2x oraz U = (2, -9). Wówczas przekątna KU zawiera się w prostej o równaniu:

A. $y = -\frac{1}{5}x - 1$ B. y = -5x – 1 C. y = -5x + 1 D. $y = \frac{1}{5}x + 1$

Zadanie 32. Punkt A ma współrzędne (2013,1000). Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Punkt C ma współrzędne:

A. (-2013,1000) B. (-1000, 2013) C. (-2013, -1000) D. (2013, 1000)

Zadanie 33. Dany jest punkt A o współrzędnych (-3,2). Punkt B jest symetryczny do A względem początku układu współrzędnych, natomiast punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi *OY*. Odcinek AC ma długość:

A. 6 B. 4 C. $2\sqrt{13}$ D. $\sqrt{13}$

Zadanie 34. Punkt A ma współrzędne (3,-2). Punkt B jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych. Punkt B ma współrzędne:

A. (-3,2) B. (-2,3) C. (-3,-2) D. (3,2)

5. PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESÓW FUNKCJI

Temat: PRZESUNIĘCIE WYKRESU FUNKCJI WZGLĘDEM OSI UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o *p* jednostek względem osi x i *q* jednostek względem osi y, to wzór funkcji, którą otrzymamy po przesunięciu ma postać $y = f(x - p) + q$.

Jeżeli:

$p > 0$ przesuwamy wykres w prawo względem osi x

$p < 0$ przesuwamy wykres w lewo względem osi x

$q > 0$ przesuwamy wykres w górę względem osi y

$q < 0$ przesuwamy wykres w dół względem osi y

Zadanie 1. Określ o ile jednostek i wzdłuż której osi należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g.

$a)\ g(x) = f(x-6)+1$

$b)\ g(x) = f(x-3)$

$c)\ g(x) = f(x+1)$

$d)\ g(x) = f(x)-5$

$e)\ g(x) = f(x)+2$

$f)\ g(x) = f(x+2)-3$

g) $g(x) = f(x-1)$

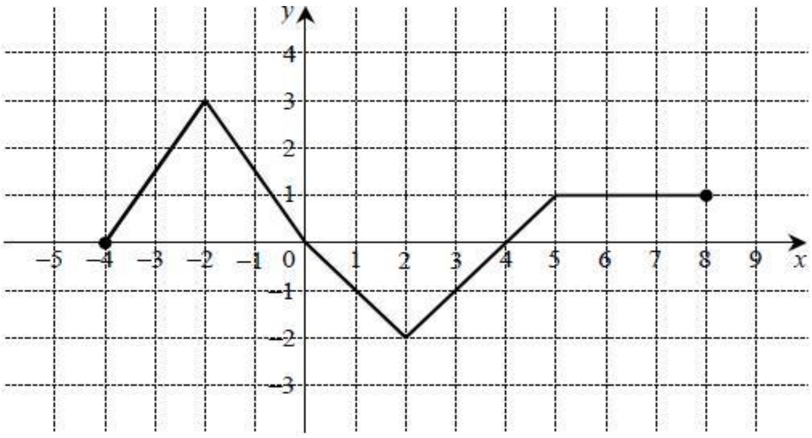
h) $g(x) = f(x)-4$

i) $g(x) = f(x+2)+4$

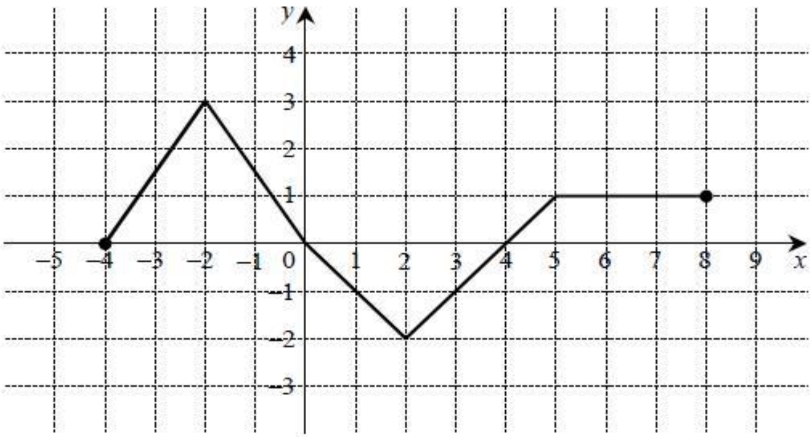
j) $g(x) = f(x-10)-3$

Zadanie 2. Dany jest wykres funkcji *f*. W tym samym układzie współrzędnych narysuj wykresy następujących funkcji:

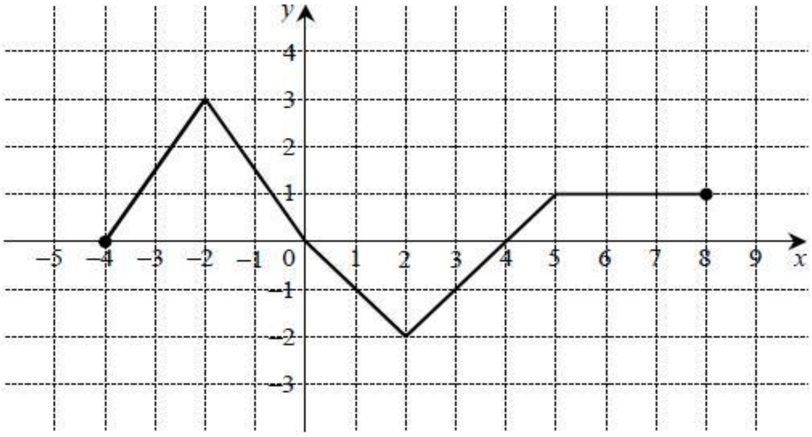
a) $g(x) = f(x-2)$



b) $g(x) = f(x)+1$

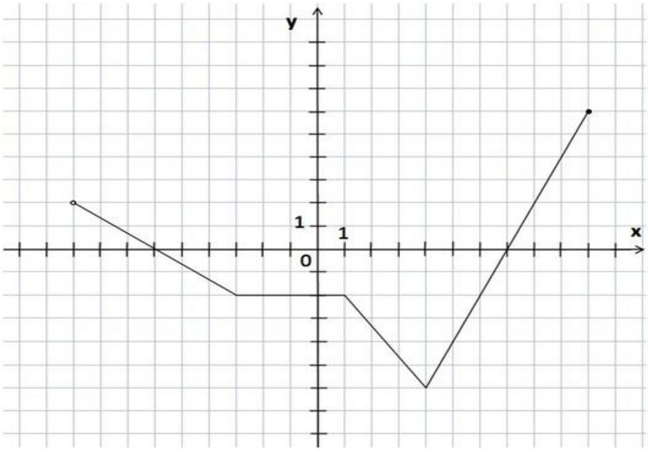


c) $g(x) = f(x+1) - 2$

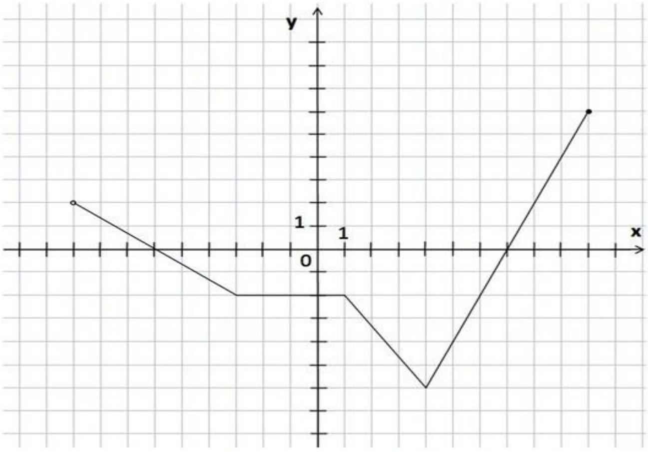


Zadanie 3. Dana jest funkcja *f*. Dokonaj przesunięcia wykresu funkcji o wektor $\vec{u}$:

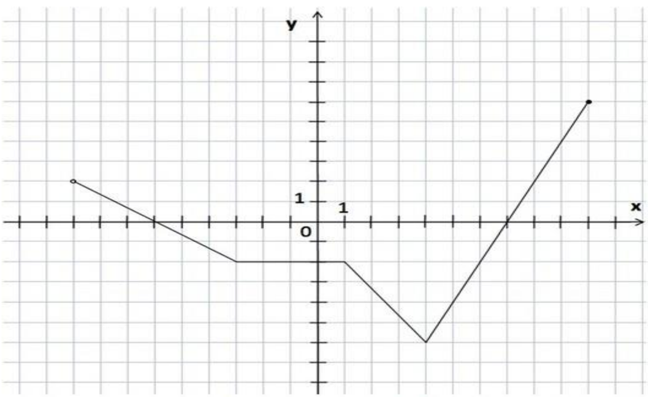
a) $\vec{u} = [-2, 0]$



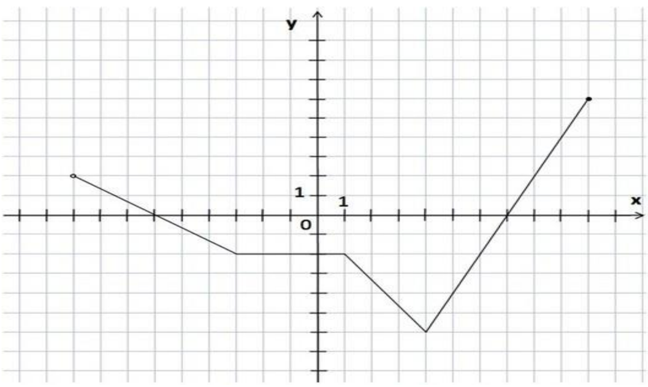
b) $\vec{u} = [0, 3]$



c) $\vec{u} = [1, -2]$



d) $\vec{u} = [-1, 2]$



Zadanie 4. Napisz wzór funkcji g ,której wykres powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $\vec{w}$.

$a)\ f(x) = |x|,\ \ \vec{w} = [-2, 3]$

$b)\ f(x) = |x|,\ \ \vec{w} = [3, 1]$

$c)\ f(x) = 2x - 4,\ \ \vec{w} = [-4, 0]$

$d)\ f(x) = -3x + 1,\ \ \vec{w} = [0, 5]$

$e)\ f(x) = x^2,\ \ \vec{w} = [-5, -2]$

$f)\ f(x) = -3x^2,\ \ \vec{w} = [4, 6]$

$g)\ f(x) = \frac{2}{x},\ \ \vec{w} = [1, -2]$

$h)\ f(x) = 6^x,\ \ \vec{w} = [-2, 9]$

i) $f(x) = \sqrt{x},\ \ \vec{w} = [5,3]$

j) $f(x) = 2\sqrt{x}\ \ \vec{u} = [-1,2]$

k) $f(x) = 3|x|\ \ \vec{u} = [3,-8]$

l) $f(x) = \frac{3}{x}\ \ \vec{u} = [-3,0]$

Zadanie 5. Określ, o jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f, aby otrzymać wykres funkcji g.

a) $f(x) = 2x^2$, $\quad g(x) = 2(x+3)^2 - 1$, $\quad \vec{w} = [\dots\dots\dots,\dots\dots\dots]$

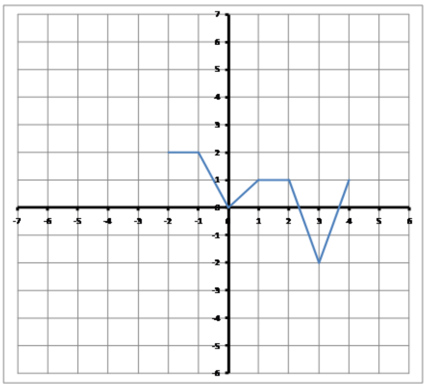
b) $f(x) = \dfrac{5}{x}$, $\quad g(x) = \dfrac{5}{x-1} + 7$, $\quad \vec{w} = [\dots\dots\dots,\dots\dots\dots]$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad g(x) = \sqrt{x-3}$ $\quad \vec{w} = [\dots\dots\dots,\dots\dots\dots]$

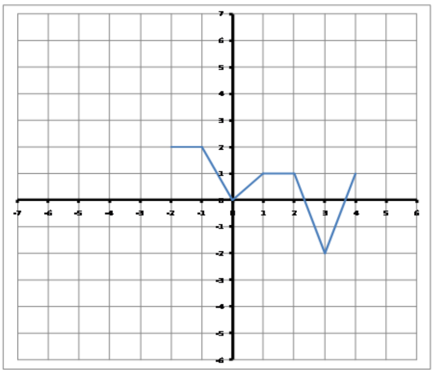
d) $f(x) = |x|$, $\quad g(x) = |x| - 4$ $\quad \vec{w} = [\dots\dots\dots,\dots\dots\dots]$

Zadanie 6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*. Narysuj wykresy funkcji *g* jeśli:

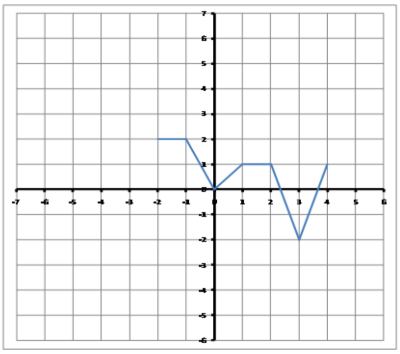
$g(x) = f(x+3)$



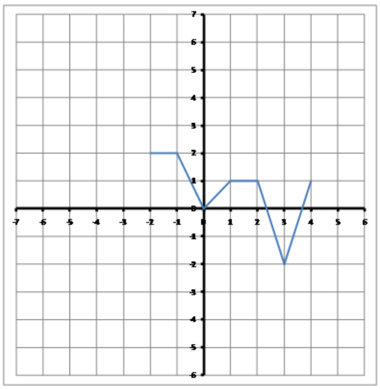
$g(x) = f(x) - 1$



$g(x) = f(x-1) + 2$



$g(x) = f(x+2) - 3$



Zadanie 7. Określ o ile jednostek i wzdłuż której osi należy przesunąć wykres funkcji *f* aby otrzymać wykres funkcji *g*.

a) $g(x) = f(x-2)$

b) $g(x) = f(x+3)$

c) $g(x) = f(x) - 4$

d) $g(x) = f(x-1) + 2$

e) $g(x) = f(x-\sqrt{3}) - 4$

f) $g(x) = f(x+4) + 1$

Zadanie 8. Opisz przesunięcie, w wyniku którego z wykresu funkcji *f* otrzymasz wykres funkcji *g*

a) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x+2|$

b) $f(x)=x^2, g(x)=(x-4)^2$

c) $f(x)=\frac{5}{x}, g(x)=\frac{5}{x-2}$

d) $f(x)=|x|, g(x)=|x-5|+1$

e) $f(x)=x^2, g(x)=(x+1)^2-17$

f) $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=\sqrt{x}-7$

Temat: PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI

Symetria względem osi x

Odbijając wykres funkcji $y=f(x)$ symetrycznie względem osi x, otrzymujemy wykres funkcji $y=-f(x)$

Symetria względem osi y

Odbijając wykres funkcji $y=f(x)$ symetrycznie względem osi y, otrzymujemy wykres funkcji $y=f(-x)$

Wykres funkcji $y=k\cdot f(x)$

Jeżeli $y=f(x)$ i $g(x)=k\cdot f(x)$, gdzie $k\neq 0$, to do wykresu funkcji *f* należą punkty $(x, f(x))$, a do wykresu funkcji g punkty $(x, k\cdot f(x))$.

Przekształcenie, w wyniku którego otrzymujemy wykres funkcji g nazywamy **powinowactwem prostokątnym o osi x i skali k.**

Wykres funkcji $y=f(k\cdot x)$

Jeżeli $y=f(x)$ i $g(x)=f(k\cdot x)$, gdzie $k\neq 0$, to do wykresu funkcji f należą punkty $(x, f(x))$, a do wykresu funkcji g punkty $\left(\frac{1}{k}\cdot x,\ f(x)\right)$. Przekształcenie, w wyniku którego otrzymujemy wykres funkcji g nazywamy **powinowactwem prostokątnym o osi y i skali k.**

Wykres funkcji $y=|f(x)|$

Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej wzór funkcji $y=|f(x)|$ można zapisać w postaci:

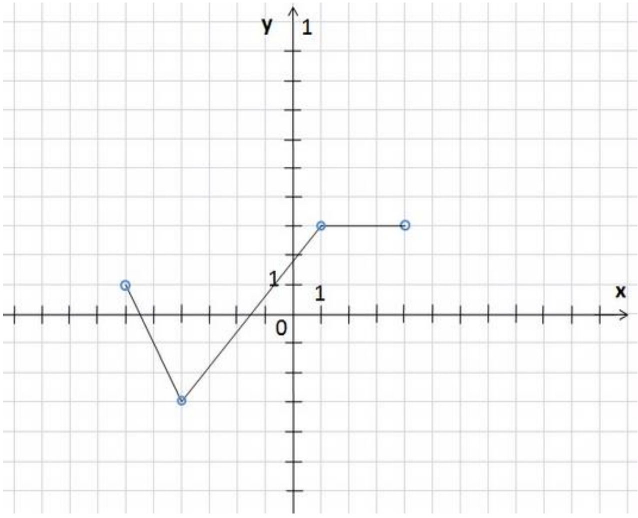
$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), & gdy \quad f(x)\geq 0 \\ -f(x), & gdy \quad f(x)<0 \end{cases}$$

Aby narysować wykres funkcji $y = |f(x)|$, znając wykres funkcji f, wystarczy określić znaki funkcji f. W tych przedziałach, w których funkcja przyjmuje:

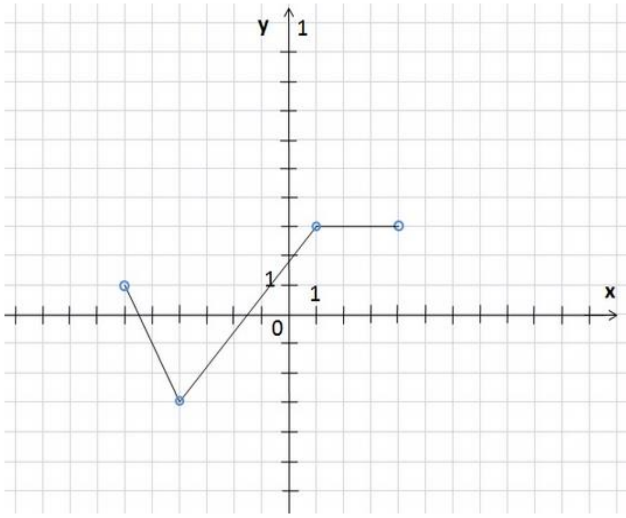
- wartości nieujemne, wykres funkcji $y = |f(x)|$ pokrywa się z wykresem funkcji f
- wartości ujemne, wykres funkcji $y = |f(x)|$ jest symetryczny względem osi x do wykresu funkcji f

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj na tym samym rysunku wykres wskazanej funkcji.

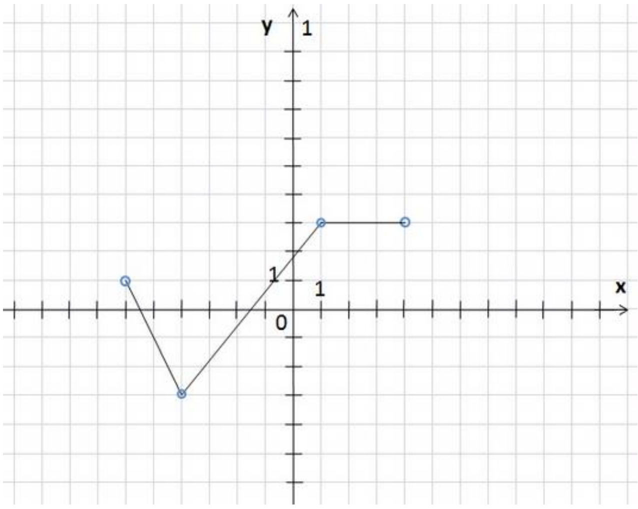
a) $y = -f(x)$



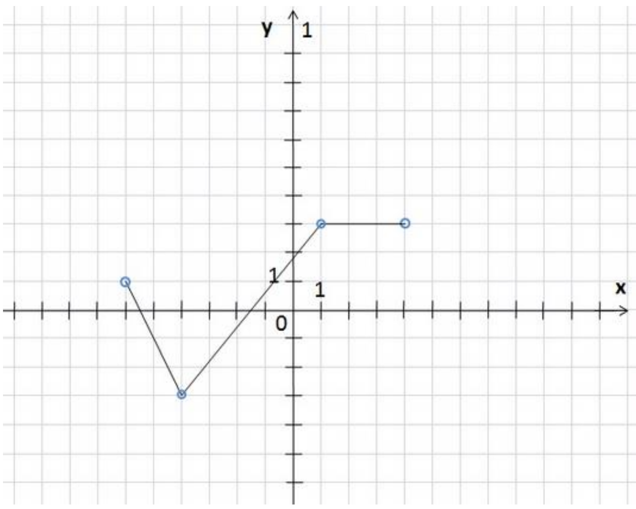
b) $y = f(-x)$



c) $y = 2 \cdot f(x)$

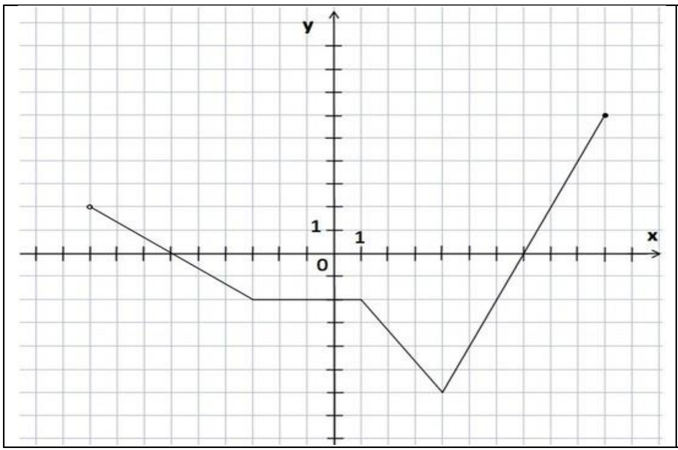


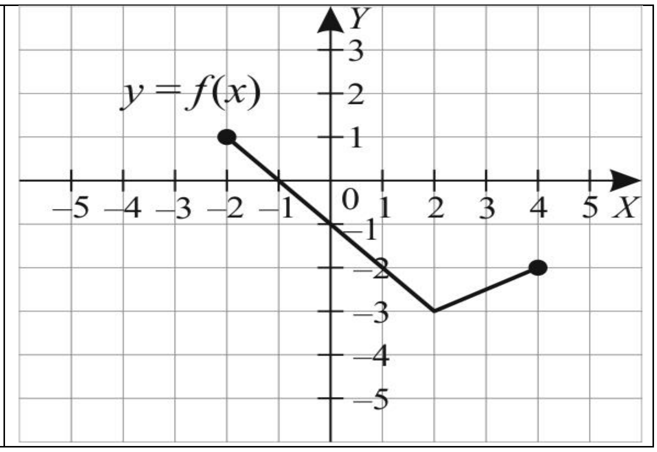
d) $y = f(2 \cdot x)$



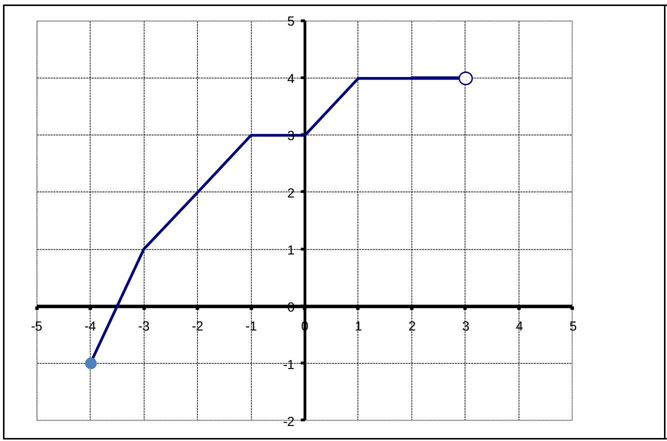
Zadanie 2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$

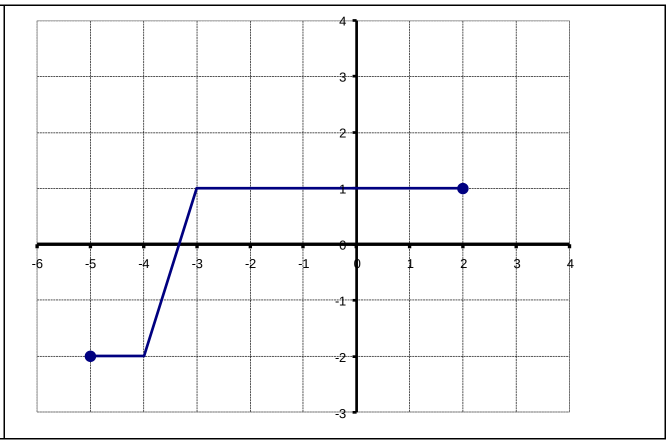
a) b)





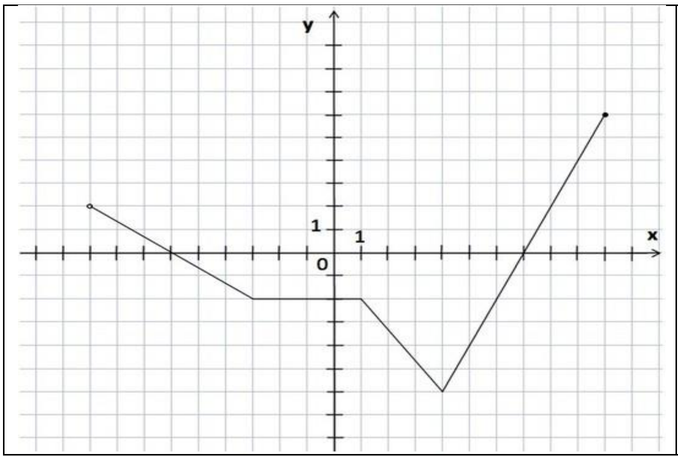
c) d)

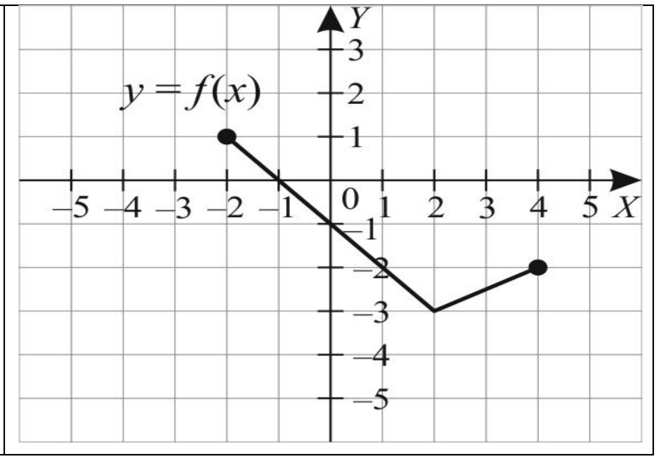




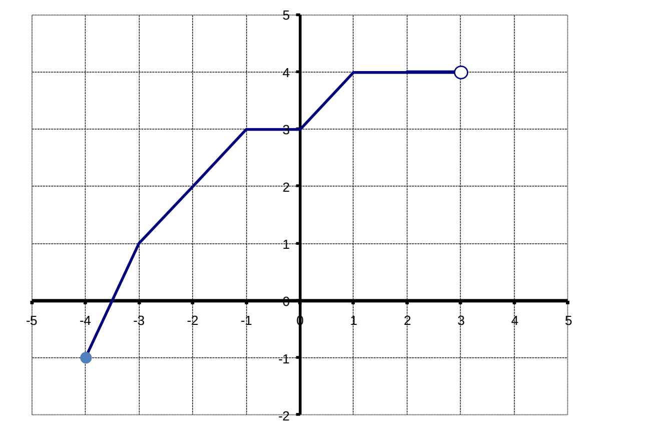
Zadanie 3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$

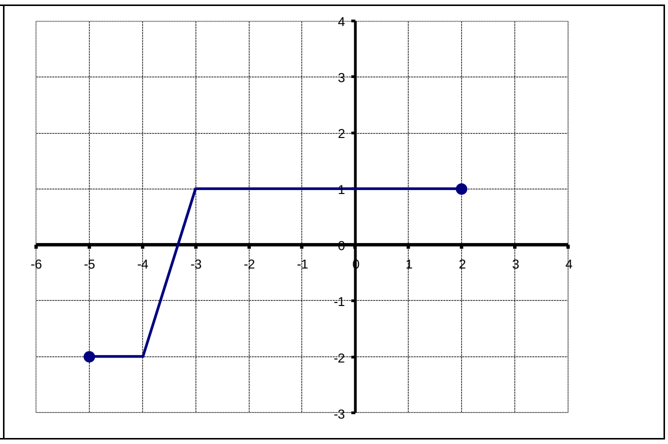
a) b)



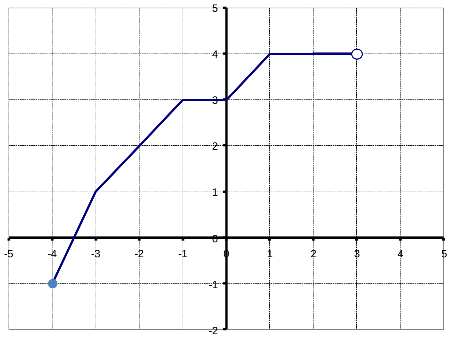


c) d)





Zadanie 4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji:



$a)\ g(x) = -f(x)$

$b)\ g(x) = f(-x)$

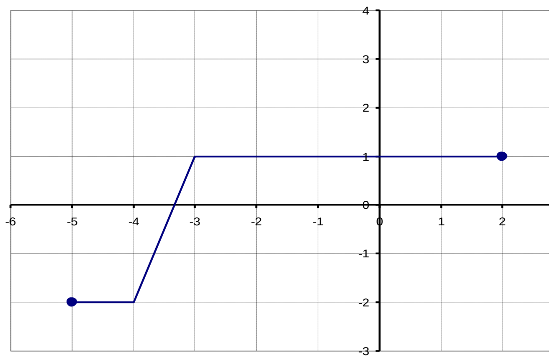
$c)\ g(x) = -2f(x)$

$d)\ g(x) = |f(x)|$

$e)\ g(x) = f(|x|)$

$f)\ g(x) = f(x-2)-1$

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji:



$a)\ g(x) = -f(x)$

$b)\ g(x) = f(-x)$

$c)\ g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

$d)\ g(x) = |f(x)|$

$e)\ g(x) = f(|x|)$

$f)\ g(x) = f(x-)+2$

Zadanie 6. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji liniowej $f(x) = -4x$, a następnie dokonując odpowiedniego przekształcenia narysuj w tym samym układzie wykres funkcji g , jeśli:

a) $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = 3\cdot f(x)$

d) $g(x) = f(3\cdot x)$

e) $g(x) = |f(x)|$

f) $g(x) = f(|x|)$

Zadanie 7. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji liniowej $f(x) = 2x$, a następnie dokonując odpowiedniego przekształcenia narysuj w tym samym układzie wykres funkcji g.

a) $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$

d) $g(x) = f(\frac{1}{2} \cdot x)$

e) $g(x) = |f(x)|$

f) $g(x) = f(|x|)$

Zadanie 8. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, a następnie dokonując odpowiedniego przekształcenia narysuj w tym samum układzie wykres funkcji g, jeśli:

a) $g(x) = \frac{1}{3} \cdot f(x)$ b) $g(x) = f(-\frac{3}{2} \cdot x)$ c) $g(x) = |f(x)|$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Jeżeli wykres funkcji f przesuniemy wzdłuż osi OY o 7 jednostek do góry, to otrzymamy wykres funkcji h określonej wzorem:

A. $h(x) = f(x-7)$ B. $h(x) = f(x) + 7$ C. $h(x) = f(x) - 7$ D. $h(x) = f(x+7)$

Zadanie 2. Wykres funkcji $f(x) = x^3 - 4x - 4$ otrzymamy przesuwając wykres funkcji $g(x) = x^3 - 4x + 4$ wzdłuż osi OY o:

A. 4 jednostki do dołu B. 4 jednostki do góry
C. 8 jednostek do dołu D. 8 jednostek do góry

Zadanie 3. Przesuwając wykres funkcji g wzdłuż osi OX o 5 jednostek w prawo, otrzymano wykres funkcji f. Zatem funkcja f określona jest wzorem:

A.$f(x) = g(x-5)$ B. $f(x) = g(x) - 5$ C.$f(x) = g(x+5)$ D.$f(x) = g(x) + 5$

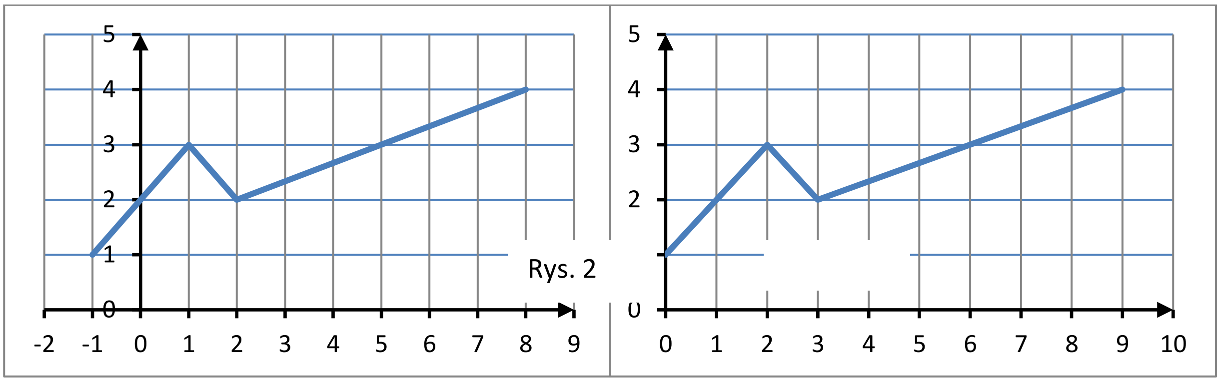
Zadanie 4. Wykres funkcji h otrzymano przesuwając wykres funkcji $g(x) = x^2$ wzdłuż osi OX o dwie jednostki w lewo. Zatem funkcja h określona jest wzorem:

A. $h(x) = x^2 - 2$ B.$h(x) = x^2 + 2$ C.$h(x) = x^2 - 4x + 4$ D.$h(x) = x^2 + 4x + 4$

Zadanie 5. Wykres funkcji $y = 2(x-3)^2 + 5$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = 2x^2$ o:

A. 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w dół
B. 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w górę
C. 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w dół
D. 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w górę

Zadanie 6. Na rysunku 1. Jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.


Rys. 2

Rys. 1

Funkcja przedstawiona na rysunku 2 jest określona wzorem

A. $y = f(x-1)$ B. $y = f(x) - 1$ C. $y = f(x+1)$ D. $y = f(x) + 1$

Zadanie 7. Jeżeli wykres funkcji $y = 2x^2 - 1$ przesuniemy o trzy jednostki w prawo, to otrzymamy wykres funkcji o wzorze

A. $y = 2x^2 - 4$ B. $y = 2(x-3)^2 - 1$ C. $y = 2(x+3)^2 - 1$ D. $y = 2x^2 + 2$

Zadanie 8. Zbiorem wartości funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -4, 0\rangle$. Wobec tego zbiorem wartości funkcji $y = f(x) - 4$ jest zbiór:

A. $\langle 0, 4\rangle$ B. $\langle -8, 0\rangle$ C. $\langle -4, 0\rangle$ D. $\langle -8, -4\rangle$.

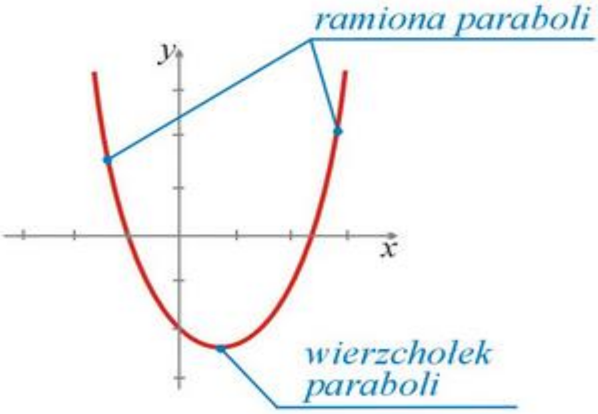
Zadanie 9. Wykres funkcji f opisanej wzorem $f(x) = \sqrt{x} + 1$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY i otrzymano wykres funkcji g. Zatem:

A. $g(x) = -\sqrt{x} + 1$ B. $g(x) = \sqrt{-x} + 1$ C. $g(x) = -\sqrt{-x} + 1$ D. $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

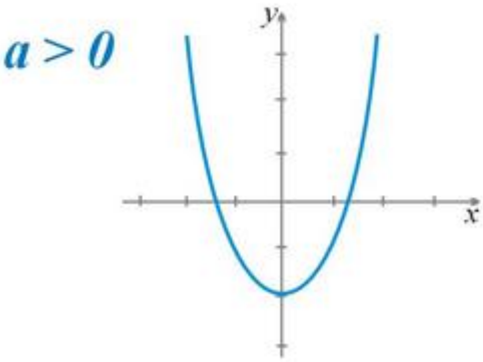
6. FUNKCJA KWADRATOWA

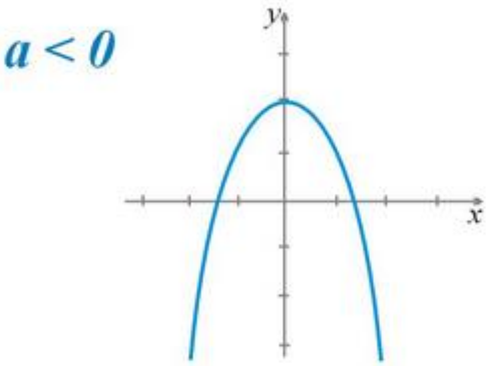
Funkcją kwadratową nazywamy funkcję określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$,
gdzie $a \neq 0$ (a, b, c – współczynniki liczbowe).

Wykresem funkcji kwadratowej jest krzywa zwana **parabolą**.



Kierunek ramion paraboli zależy od znaku współczynnika a.





Temat: WYKRES I WŁASNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ $f(x) = ax^2$.

Zadanie 1. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdy:

a) $a = 4, b = -3, c = 1$
b) $a = -5, b = 0, c = 2$
c) $a = 7, b = -4, c = 0$
d) $a = 4, b = 0, c = 0$

Zadanie 2. Uzupełnij tabelę wartości funkcji f dla podanych argumentów, a następnie naszkicuj jej wykres, jeśli:

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = -x^2$
c) $f(x) = 2x^2$
d) $f(x) = -3x^2$
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
f) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$

Na podstawie powyższych wykresów uzupełnij tabelę własności funkcji $f(x) = ax^2$ w zależności od znaku współczynnika a.

Własności	*a >0*	*a < 0*
ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji f, są skierowane	w górę	
współrzędne wierzchołka paraboli		
zbiór wartości funkcji f		
funkcja f maleje w przedziale		
funkcja f rośnie w przedziale		
największa wartość funkcji f	nie istnieje	
najmniejsza wartość funkcji f		

Zadanie 3. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą dla $x \in < -1{,}1 >$.

a) $f(x) = 4x^2$

b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2$

c) $f(x) = -2x^2$

d) $f(x) = 3x^2$

Zadanie 4. Punkt A należy do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = ax^2$. Oblicz współczynnik a, gdy:

a) A = (2, 8)

b) A = (3,-9)

Temat: POSTAĆ KANONICZNA FUNKCJI KWADRATOWEJ

Postać $f(x) = ax^2 + bx + c$ funkcji kwadratowej nazywamy jej **postacią ogólną.**
Funkcję kwadratową można też przedstawić w **postaci kanonicznej**

$$\boldsymbol{f(x) = a(x-p)^2 + q}$$

gdzie p, q – współrzędne wierzchołka paraboli.

Współrzędne wierzchołka paraboli W=(p, q)wyznaczamy ze wzorów

$$p = -\frac{b}{2a} \qquad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Uwaga!
Drugą współrzędną wierzchołka W można wyznaczyć korzystając ze wzoru $q = f(p)$.

Zadanie 1. Funkcja f dana jest wzorem ogólnym. Oblicz współrzędne W = (p, q) i *zapisz* wzór funkcji w postaci kanonicznej.

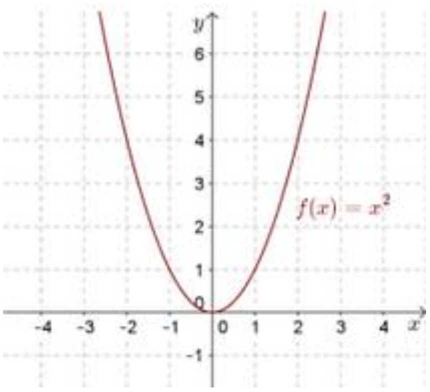
a) $f(x) = x^2 + 8x - 6$
b) $f(x) = x^2 + 6x + 1$
c) $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$
d) $f(x) = -2x^2 + 10x$
e) $f(x) = x^2 - x - 9$
f) $f(x) = x^2 - 5x + 5$
g) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$
h) $f(x) = x^2 + 7x + 12{,}25$

Zadanie 2. Ze wzoru funkcji kwadratowej odczytaj współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem:

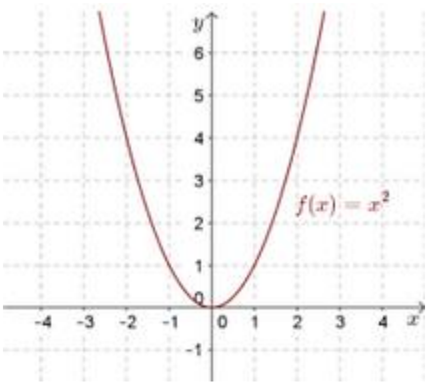
a) $f(x) = -3(x+4)^2 - 6$
b) $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$
c) $f(x) = 4x^2 + 2$
d) $f(x) = -2(x+\sqrt{3})^2$

Zadanie 3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej. Przesuń go o podaną liczbę jednostek i zapisz wzór nowej funkcji.

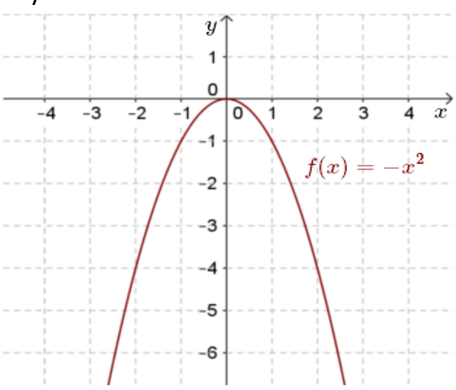
a) 2→ 1↓



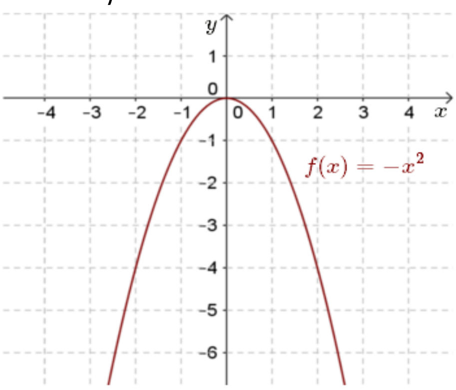
b) 1← 3↑



c) 2↑



d) 3→



Zadanie 4. Ustal, czy wykres funkcji f określonej wzorem postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$ ma punkty wspólne z osią x, gdy:

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = -2x^2 - 1$

c) $f(x) = (x-3)^2$

d) $f(x) = (x-2)^2 + 3$

e) $f(x) = 4x^2 - 8$

f) $f(x) = -(x+3)^2 - 1$

g) $f(x) = 4(x-3)^2 - 5$

h) $f(x) = 2(x+4)^2 + 1$

Zadanie 5. Dana jest funkcja kwadratowa f. Wyznacz współrzędne $W = (p, q)$ wierzchołka paraboli oraz $f(p)$. Porównaj wartości $f(p)$ i q.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

b) $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$

c) $f(x) = -x^2 - 2x + 4$

d) $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$

Zadanie 6. Oblicz wartość funkcji $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ dla $p = 1$. Podaj jej postać kanoniczną.

Zadanie 7. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej. Odczytaj współrzędne wierzchołka funkcji kwadratowej.

a) $f(x) = (x-4)^2 + 2$

b) $f(x) = (x+1)^2 - 8$

c) $f(x) = 2(x+2)^2 + 10$

d) $f(x) = -3(x-7)^2 - 1$

e) $y = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 3$

f) $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 16$

Temat: MIEJSCA ZEROWE FUNKCJI KWADRATOWEJ I JEJ POSTAĆ ILOCZYNOWA

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej zależy od wartości wyróżnika Δ,

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Funkcja kwadratowa posiada:

- **dwa** miejsca zerowe dla $\Delta > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **jedno** miejsce zerowe dla $\Delta = 0$,

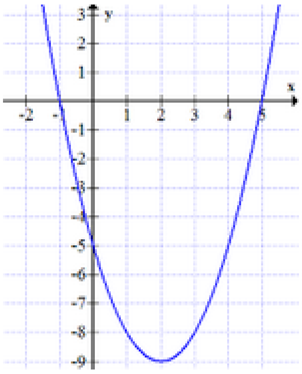
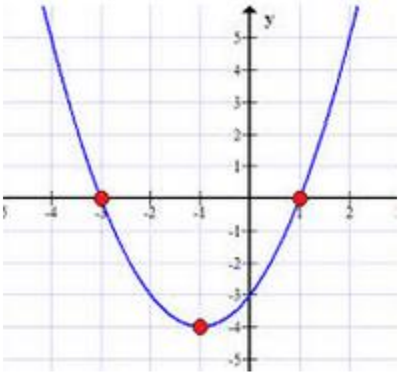
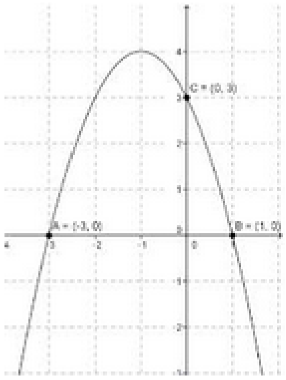
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- **nie posiada** miejsc zerowych dla $\Delta < 0$.

Jeśli funkcja kwadratowa posiada miejsca zerowe, to można ją przedstawić w **postaci iloczynowej**:

- dla $\Delta > 0$ $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$, gdzie x_1, x_2 - miejsca zerowe
- dla $\Delta = 0$ $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$, gdzie x_0 – miejsce zerowe.

Zadanie 1. Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsca zerowe i współrzędne wierzchołka paraboli.

Zadanie 2. Zapisz funkcję f w postaci iloczynowej (o ile istnieje):

a) $f(x) = x^2 - 10x + 21$

b) $f(x) = 6x^2 + x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

e) $f(x) = -3x^2 + 9x$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

g) $f(x) = x^2 + x + 1$

h) $f(x) = 2x^2 + 2x$

Zadanie 3. Podaj miejsca zerowe funkcji f :

a) $f(x) = -2(x-1)(x+4)$

b) $f(x) = \frac{1}{3}(x-5)(x+2)$

c) $f(x) = 2x(x+6)$

d) $f(x) = 5(x+3)^2$

e) $f(x) = \frac{1}{5}x(x-2)$

f) $f(x) = x(x + \frac{1}{4})$

g) $f(x) = -(x-4)(x+2)$

h) $f(x) = 4(x+6)(x+3)$

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli x_1 i x_2 są jego pierwiastkami.

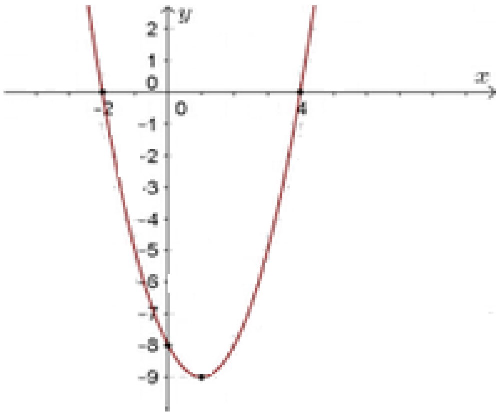
a) $x_1 = -1, x_2 = 4$

b) $x_1 = 2,\ x_2 = -3$

c) $x_1 = 0,\ x_2 = -5$

d) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$

Zadanie 5. Odczytaj z wykresu funkcji kwadratowej jej miejsca zerowe. Spróbuj odgadnąć wartość pierwszej współrzędnej wierzchołka.



Znajomość miejsc zerowych ułatwia nam wyznaczenie współrzędnych wierzchołka W = (p, q) paraboli. Wystarczy zastosować wzory:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad q = f(p)$$

Zadanie 6. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f oraz zapisz ją w postaci kanonicznej.

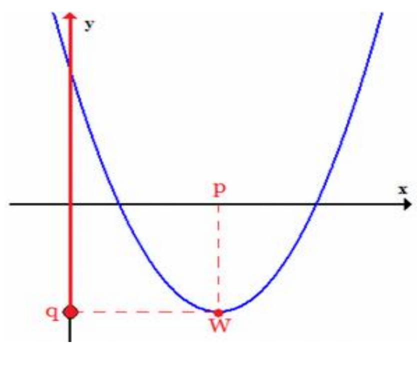
a) $f(x) = 2(x-1)(x+5)$ b) $f(x) = -2(x+1)(x+3)$

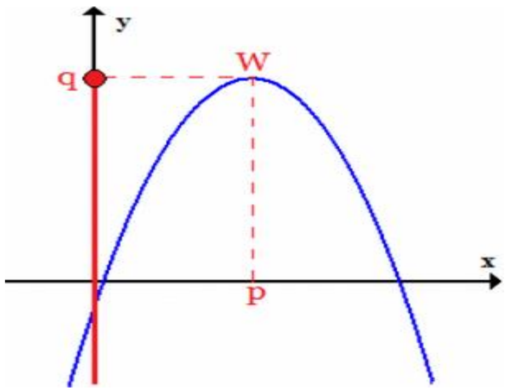
c) $f(x) = 3(x+2)(x-3)$ d) $f(x) = -x(x+5)$

Zadanie 7. Wyznacz współrzędne wierzchołka W oraz punkty przecięcia się wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Naszkicuj jej wykres, gdy:

a) $f(x) = 3(x-2)(x+4)$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}x(x-2)$

Własności funkcji kwadratowej w zależności od znaku współczynnika a.

$a > 0$ 	Dziedzina: R Zbiór wartości: $< q, +\infty)$ Równanie osi symetrii: $x = p$ Maksymalne przedziały monotoniczności: $f \uparrow dla\ x \in < p, +\infty)$ $f \downarrow dla\ x \in (-\infty, p >$ Wartość najmniejsza: q Wartość największa: nie istnieje

$a < 0$	
	Dziedzina: R Zbiór wartości: $(-\infty, q>$ Równanie osi symetrii: $x = p$ Maksymalne przedziały monotoniczności: $f \downarrow dla\ x \in < p, +\infty)$ $f \uparrow dla\ x \in (-\infty, p>$ Wartość najmniejsza: nie istnieje Wartość największa: q

Zadanie 8. Dana jest funkcja kwadratowa f. Wyznacz jej miejsca zerowe oraz współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie naszkicuj jej wykres. Omów wskazane własności:

- dziedzinę i zbiór wartości funkcji
- równanie osi symetrii paraboli,
- maksymalne przedziały monotoniczności funkcji,
- przedziały, na których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie i nieujemne,
- wartość największa (najmniejsza) funkcji.

a) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ b) $f(x) = x^2 - x - 6$

c) $f(x) = 3x^2 + 4x$ d) $f(x) = -2x^2 - x + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ f) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Zadanie 9. Największa wartość funkcji $f(x) = a(x-3)(x+5)$ jest równa 5. Wyznacz współczynnik a oraz współrzędne wierzchołka paraboli.

Temat: WARTOŚĆ NAJMNIEJSZA I NAJWIĘKSZA FUNKCJI KWADRATOWEJ W PRZEDZIALE DOMKNIĘTYM

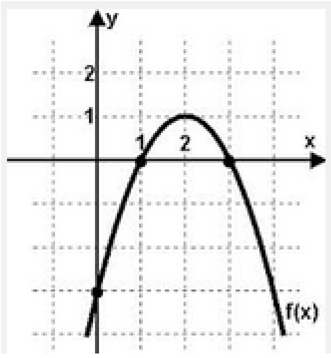
Aby wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym <a, b> należy obliczyć wartość p, która jest pierwszą współrzędną wierzchołka W.

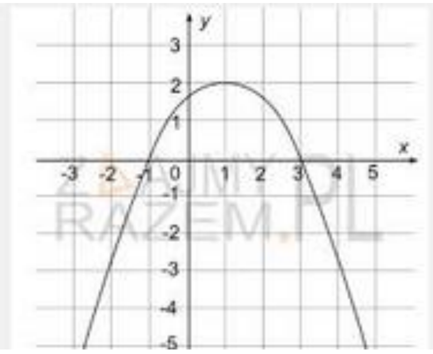
Jeżeli:

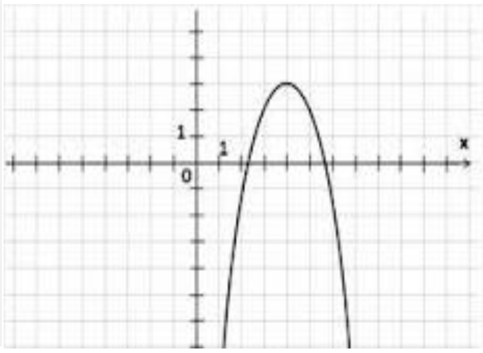
• $p \in < a, b >$, to wyznaczamy q, $f(a)\ i\ f(b)$. Najmniejsza z tych trzech liczb jest wartością najmniejszą a największa wartością największą.

• $p \notin < a, b >$, to wyznaczamy tylko $f(a)\ i\ f(b)$. Mniejsza z tych liczb jest wartością najmniejszą a większa wartością największą.

Zadanie 1. Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w przedziale <0, 2>.







Zadanie 2. Narysuj wykres funkcji $f(x) = -(x-1)(x-4)$, określ jej wierzchołek i odczytaj z wykresu wartość najmniejszą i największą funkcji w przedziale <0, 3>

Zadanie 3. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3, \ <0, 3>$.

b) $f(x) = -3x^2 - 6x - 2, \quad <1, 2>$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 1, \quad <-6, 2>$

d) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - x, \quad <-3, 0>$

Zadanie 4. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji f w przedziale <-1, 4>.

a) $f(x) = 2x^2 - 12x - 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

c) $f(x) = x^2 + 3x, \quad <1, 9>$

d) $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad <0, 4>$

e) $f(x) = 3(x+3)(x-1), \quad <-2, 0>$

f) $f(x) = 5(x+3)(x+5), \quad <-1, 0>$

g) $f(x) = -2(x-2)^2 + 1, \quad <-2, 0>$

h) $f(x) = -(x+3)(x-1), \quad <-1, 2>$

i) $f(x) = 2(x-2)^2 + 4, \quad <0, 3>$

j) $f(x) = (x+3)^2 - 3, \quad <-2, 2>$

Temat: WYZNACZANIE WZORU FUNKCJI KWADRATOWEJ

Zadanie 1. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej *f* są liczby 2 i 3. Zapisz jej wzór, jeśli punkt P = (-1, 4) należy do wykresu tej funkcji.

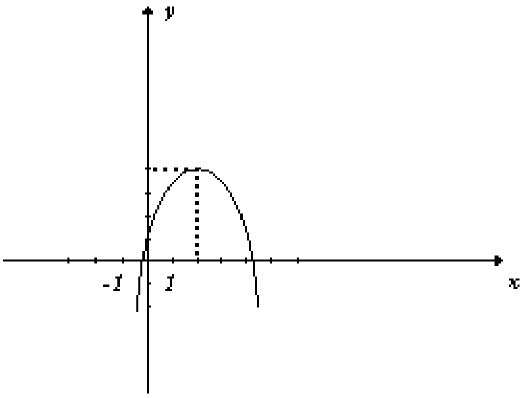
Zadanie 2. Napisz wzór funkcji kwadratowej *f,* której wykres przecina oś OY w puncie (0, -2), a wierzchołkiem jest punkt W = (5, -1).

Zadanie 3. Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby (-1) i 7, a zbiorem jej wartości jest zbiór $(-\infty, 4>$.

Zadanie 4. Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby 2 i (-4), a zbiorem jej wartości jest zbiór $<-1,+\infty)$.

Zadanie 5. Największą wartość funkcji kwadratowej f jest równa 9. Liczby 0 i 6 są miejscami zerowymi tej funkcji. Zapisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

Zadanie 6. Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej określ jej wzór.



Zadanie 7. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej , wiedząc, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie W = (2, 1) oraz, że liczba 3 jest miejscem zerowym tej funkcji. Wyznacz drugie miejsce zerowe.

Zadanie 8. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c.$ Do wykresu tej funkcji należy punkt A = (-1, -13), a jej wartość największa jest równa 2 dla x = 4. Wyznacz współczynniki a, b, c.

Zadanie 9. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c.$ Do wykresu tej funkcji należy punkt A = (3, 14), a jej miejscami zerowymi są liczby 2 i -4. Wyznacz współczynniki a, b, c.

Zadanie 10. Wyznacz współczynniki $a \ i \ b$ we wzorze funkcji $f(x)=ax^2+bx+4,$ tak aby do wykresu funkcji należały punkty (1, 3) i (-1, 9).

Zadanie 11. Napisz wzór funkcji kwadratowej f , o której wiadomo, że:

a) ma największą wartość równą 8 dla argumentu równego -1, a jej wykres przechodzi przez punkt P = (-3, -4).

b) $f(5)=0$ i przedział $<2,+\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest malejąca, a przedział $(-\infty,5>$ jest jej zbiorem wartości.

c) $f(0)=0$ i przedział $(-\infty,-2>$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest malejąca, a jej wykres z prostą o równaniu y = -4 ma jeden punkt wspólny.

Zadanie 12. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, o której wiadomo, że:

a) ma najmniejszą wartość równą -10 dla argumentu równego 3, a jej wykres przechodzi przez punkt P = (2, -8).

b) $f(1)=1$ i przedział $<4,+\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest rosnąca, a przedział $<-8,+\infty)$ jest jej zbiorem wartości.

Temat: PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI KWADRATOWEJ

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji *f*, a następnie przesuń o podaną liczbę jednostek, gdy:

a) $f(x)=x^2+6x,$ 2 jednostki w lewo i 1 jednostka w dół

b) $f(x)=-\frac{1}{3}(x+4)(x-2),$ 3 jednostki w prawo, 2 jednostki w górę

c) $f(x)=(x-1)^2-4,$ 1 jednostka w lewo, 3 jednostki w górę.

Zadanie 2. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=-3x^2+x-4$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$ b) $g(x)=f(-x)$ c) $g(x)=f(x-1)+2$

d) $g(x)=|f(x)|$ e) $g(x)=-5f(x)$ f) $g(x)=f(3x)$

Zadanie 3. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2(x-3)^2+1$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$ b) $g(x)=f(-x)$ c) $g(x)=f(x+3)-1$

d) $g(x)=|f(x)|$ e) $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$ f) $g(x)=f(3x)$

Zadanie 4. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2(x-3)(x+4)$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$ b) $g(x)=f(-x)$ c) $g(x)=f(x+3)-1$

d) $g(x)=|f(x)|$ e) $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$ f) $g(x)=f(3x)$

Zadanie 5. Naszkicuj wykres funkcji f:

a) $f(x)=|x^2-3|$ b) $f(x)=|(x-2)^2-5|$

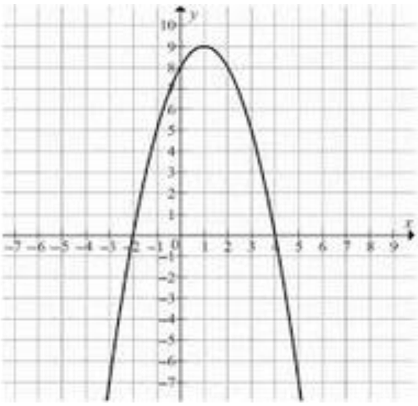
a) $f(x)=|x^2+1|$ c) $f(x)=-|x^2-4|$

Temat: NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

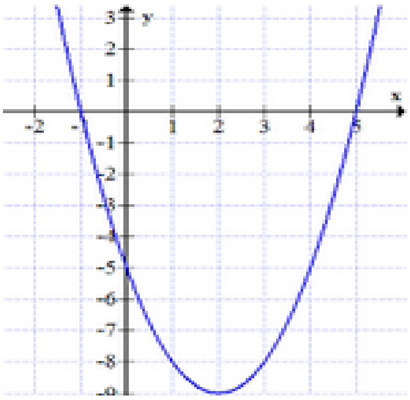
Zadanie 1. Na rysunkach przedstawione są wykresy funkcji f. Podaj rozwiązania nierówności :

$a)\ f(x) > 0$ $\quad b)\ f(x) \geq 0$ $\quad c)\ f(x) < 0$ $\quad d)\ f(x) \leq 0$

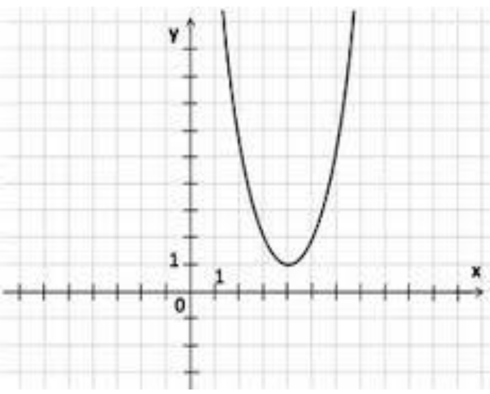
1.



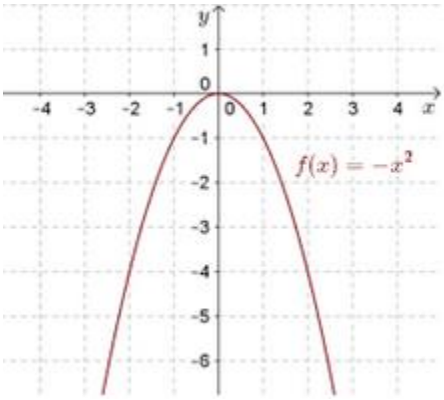
2.



3.



4.



Zadanie 2. Naszkicuj parabolę $y = 2x^2 + 7x - 4$. Podaj zbiory rozwiązań nierówności:

$a)\ 2x^2 + 7x - 4 < 0$ $\quad b)\ 2x^2 + 7x - 4 \leq 0$

$c)\ 2x^2 + 7x - 4 > 0$ $\quad d)\ 2x^2 + 7x - 4 \geq 0$

Zadanie 3. Naszkicuj parabolę $y = -x^2 - 2x - 1$. Podaj zbiory rozwiązań nierówności:

$a) - x^2 - 2x - 1 < 0$ $\quad b) - x^2 - 2x - 10 \leq 0$

$c) - x^2 - 2x - 1 > 0$ $\quad d) - x^2 - 2x - 1 \geq 0$

Zadanie 4. Rozwiąż nierówność:

a) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$ b) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

c) $-x^2 - 5x + 6 \geq 0$ d) $x^2 - x - 6 < 0$

e) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ f) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

g) $-2x^2 - 4x + 6 \leq 0$ h) $4x^2 - 8x > 0$

i) $-4x^2 + x - 3 < 0$ j) $5x^2 + 4 \leq 0$

k) $(x+6)(x-2) < 0$ l) $(2 - x)(x + 3) \geq 0$

m) $-3x^2 < 0$ n) $(x+3)^2 \leq 0$

o) $-x(2-x) > 1 - x^2$ p) $3x - x^2 \leq 3 - 3x^2$

Zadanie 5. Rozwiąż nierówność:

a) $x(x-3)-4(5-x)\geq 0$
b) $2(2-x)<-x(x-3)$
c) $-5\geq (x-2)^2$
d) $(x-1)(x+1)+(x-2)^2<x(x-4)$
e) $2(x-1)^2-(x-2)^2\geq 2$
f) $(x+4)(x-4)>4(x-1)^2$
g) $(2x+1)^2+(x-3)^2<10$
h) $3x-(1-x)^2\geq (x-2)(x+2)$
i) $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})^2>\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$
j) $2-x^2\leq (2-x)^2$

Zadanie 6. Podaj wszystkie liczby naturalne, które spełniają nierówność $x^2-6x+5<0$.

Zadanie 7. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność $12x^2-6x\geq 0$.

Zadanie 8. Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $-2x^2+8>0$.

Zadanie 9. Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem:

a) $y=\sqrt{-x^2+16}$
b) $y=\sqrt{(x+1)(x+2)}$
c) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$
d) $y=\frac{-5}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}$

Temat: FUNKCJA KWADRATOWA W ZASTOSOWANIACH

Zadanie 1. Oblicz wymiary prostokątnej działki o polu powierzchni 288 m^2, jeśli jeden jej bok jest:

a) dwukrotnie dłuższy od drugiego,
b) o 2 metry dłuższy od drugiego.

Zadanie 2. Prostokątna działka o powierzchni 700 m^2 ma jeden bok o 3m dłuższy od drugiego. Oblicz ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki, jeżeli na jednym z boków należy pozostawić miejsce na wstawienie furtki o szerokości 2m.

Zadanie 3. Oblicz, ile boków ma wielokąt, w którym liczba przekątnych wynosi 405.

Zadanie 4. Liczbę 36 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których iloczyn jest największy.

Zadanie 5. Liczbę 40 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których iloczyn jest największy.

Zadanie 6. Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8cm. Ile najwięcej może być równe pole takiego trójkąta?

Zadanie 7. Mamy 240 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie wymiary powinien mieć ogródek?

Zadanie 8. Zależność między kosztem całkowitym produkcji K a liczbą x wyprodukowanych detali określona jest wzorem $K(x) = 0{,}01x^2 - 4x + 500$, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią. Ile detali należy produkować, aby koszt całkowity produkcji był najmniejszy?

Zadanie 9. W pewnej miejscowości liczbę przyjęć chorych do szpitala w czasie trwania 10 dni epidemii określa wzór $E(n) = -2n^2 + 24n$.

a) Oblicz ilu chorych przyjęto do szpitala w pierwszym dniu trwania epidemii, a ilu w dziesiątym dniu.

b) W którym dniu epidemii przyjęto najwięcej pacjentów i ilu ich było?

c) Przez ile dni przyjmowano do szpitala chorych ze względu na panującą epidemię?

Zadanie 10. Część uczniów klasy liczącej 25 osób zachorowała i nie mogła przyjść do szkoły. Każdy zdrowy uczeń wysłał do chorego kolegi SMSA z pozdrowieniami. Napisz wzór funkcji, która liczbie uczniów chorych przyporządkowuje liczbę wysłanych wiadomości. Określ liczbę uczniów chorych jeśli wysłano 100 wiadomości.

Temat: UKŁADY RÓWNAŃ Z DWIEMA NIEWIADOMYMI, Z KTÓRYCH PRZYNAJMNIEJ JEDNO JEST KWADRATOWE

Zadanie 1. Wykonaj ilustrację graficzną układu równań i podaj liczbę jego rozwiązań:

a) $\begin{cases} y = -x^2 + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x^2 - 4x + 4 + y = 0 \end{cases}$

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 + x + 3 \\ y = 3x - 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = x^2 + 4x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 1 \\ y = 2x^2 - 8x + 8 \end{cases}$

Zadanie 4. Wyznacz najmniejszą wartość sumy kwadratów dwóch takich liczb x, y, jeśli spełniają one warunek:
a) x + y = 6 b) y – x = 4 c) 3x + y = 1

Zadanie 5. Dla jakich liczb x, y iloczyn przyjmuje najmniejszą wartość, jeżeli różnica x – y jest równa 4?

Temat: FUNKCJA KWADRATOWA Z PARAMETREM

Zadanie 1. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 3x^2 - 9x + c$, gdzie c $\in R$. Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c, dla których:
a) funkcja f nie ma miejsc zerowych,
b) jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 2,
c) wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f należy do prostej o równaniu y = x.

Zadanie 2. Oblicz wartość parametru m, dla którego osią symetrii paraboli o równaniu $y = (m-1)x^2 - 2(m+3)x + m - 3$ jest prosta x = 3?

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji określonych wzorem $f(x) = -x^2 + 4x$ i $g(x) = x + m$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

Zadanie 4. Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x) = 4x^2 - (2m+1)x + 1$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2mx + 4m + 5$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1)$ i malejąca w przedziale $(1, +\infty)$.

Zadanie 6. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = mx^2 + mx - 1$. Wyznacz te wartości parametru *m*, dla których:
a) funkcja *f* przyjmuje tylko wartości ujemne
b) zbiorem wartości funkcji *f* jest przedział $(-\infty, 0>$

Zadanie 7. Znajdź te wartości parametru m, dla których funkcja $f(x)=x^2+mx+9$ ma dwa miejsca zerowe większe od 2.

Zadanie 8. Funkcja kwadratowa $f(x)=mx^2+6x-4$ ma jedno miejsce zerowe. Wyznacz wartość parametru m oraz znajdź argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość największą.

Zadanie 9. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^2+2x+c$

a) Wyznacz te wartości współczynnika c, dla których wykres funkcji f przecina oś OX w dwóch punktach,
b) Wyznacz te wartości współczynnika c, dla których najmniejsza wartość funkcji f jest równa 3.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – FUNKCJA KWADRATOWA

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ wyznaczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej oraz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest jej wykresem,
- ✓ naszkicować wykres funkcji kwadratowej,
- ✓ określić własności funkcji kwadratowej:
  - dziedzinę oraz zbiór wartości,
  - przedziały monotoniczności funkcji,
  - równanie osi symetrii paraboli,
  - argumenty, dla których wartości funkcji są dodatnie, ujemne, niedodatnie lub nieujemne,
  - wartość największą lub najmniejszą funkcji,
- ✓ wyznaczać wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym,
- ✓ zapisywać funkcję w postaci kanonicznej, iloczynowej oraz ogólnej,
- ✓ przekształcać funkcję kwadratową z jednej postaci w drugą,
- ✓ zapisywać wzór funkcji kwadratowej wykorzystując informacje zawarte w zadaniu,
- ✓ rozwiązywać nierówności kwadratowe.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y=2x^2+24x-12$ jest punkt:

A. (-12, -12) B. (-8, -90) C. (-6,-84) D. (-4, -76)

Zadanie 2. Funkcja $f(x)=x^2-9$ najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu:

A. -9 B. -3 C. 0 D. 9

Zadanie 3. Najmniejsza wartość funkcji $f(x)=7(x+6)^2+5$ jest równa:

A. -6 B. -5 C. 5 D. 6

Zadanie 4. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=3(x-3)^2$ jest przedział:

A. $<-3,+\infty)$ B. $<0,+\infty)$ C. $<3,+\infty)$ D. $<27,+\infty)$

Zadanie 5. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=-x^2+8x-1$ jest przedział:

A. $(-\infty,4>$ B. $(-\infty,15>$ C. $(-\infty,22>$ D. $(-\infty,60>$

Zadanie 6. Funkcja $f(x)=-2(x-3)^2+4$ jest rosnąca w przedziale:

A. $(-\infty,3>$ B. $(-\infty,4>$ C. $<3,+\infty)$ D. $<4,+\infty)$

Zadanie 7. Osią symetrii wykresu funkcji $g(x)=-2x^2+20x+5$ jest prosta o równaniu:

A. y = 5 B. x = 5 C. y = -5 D. x = -5

Zadanie 8.Wykres funkcji $f(x)=x^2-3x+c$ przechodzi przez punkt P = (-1, 3). Wtedy c ma wartość:

A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

Zadanie 9. Funkcja kwadratowa $f(x)=-x^2+3x-2$ przyjmuje wartości dodatnie, gdy

A. $x\in R$ B. $x\in(1,\,2)$ C. $x\in(\frac{1}{2},\,2)$ D. $x\in(-1,\,0)$

Zadanie 10. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $x^2>9x$

A. $(-\infty,\,9)$ B. $(0,\,9)$ C. (-3, 3) D. $(-\infty,\,0)\cup(9,\,+\infty)$

Zadanie 11. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=2x^2-x-3$.

a) Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem

b) Wyznacz miejsca zerowe.

c) Sporządź wykres funkcji f i omów jej własności:

- zbiór wartości funkcji,
- współrzędne wierzchołka paraboli,
- najmniejszą albo największą wartość funkcji (o ile istnieje),
- równanie prostej będącej osią symetrii wykresu funkcji f ,
- przedziały monotoniczności funkcji,

- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne (dodatnie).

Zadanie 12. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -3(x+3)(x-2)$.

a) Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.
b) Znajdź te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 12.
c) Podaj przedziały monotoniczności funkcji.

Zadanie 13. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Wyznacz wartość najmniejsza i największą funkcji w zbiorze <0, 3>.

Zadanie 14. Liczbę 40 przedstaw w postaci sumy dwóch składników, tak aby ich iloczyn był największy.

Zadanie 15. Rozwiąż nierówność $(x-3)^2 + 7 > 4(x-2)$.

Zadanie 16. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej *f* są liczby 2 i (-3). Zapisz wzór funkcji w postaci ogólnej wiedząc, że punkt P = (1, 3) należy do jej wykresu.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Funkcja *f* określona jest wzorem $f(x) = -2(x+3)^2 - 5$. Równanie prostej, która jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji *f* to:

A. x = 3 B. x = 5 C. x = -3 D. x = -5

Zadanie 2. Wskaż funkcję kwadratową, której zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 3>$.

A. $f(x) = -(x-2)^2 + 3$ B. $f(x) = (2-x)^2 + 3$
C. $f(x) = -(x+2)^2 - 3$ D. $f(x) = (2-x)^2 - 3$

Zadanie 3. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej jest przedział $(-\infty, 2>$. Funkcja ma wzór:

A. $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ B. $f(x) = x^2 + 2$
C. $f(x) = (x+1)^2 - 2$ D. $f(x) = -(x+2)^2$

Zadanie 4. Wykres funkcji $g(x) = 2(x-3)^2 + 5$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = 2x^2$ o:

A. 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w dół
B. 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w górę
C. 3 jednostki w prawo i 5 jednostek w dół
D. 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w górę

Zadanie 5. Przesuwając wykres funkcji $f(x) = x^2$ o dwie jednostki w prawo otrzymujemy wykres funkcji o wzorze:

A. $f(x) = x^2 + 2$ B. $f(x) = x^2 - 2$ C. $f(x) = (x+2)^2$ D. $f(x) = (x-2)^2$

Zadanie 6. Wykres funkcji kwadratowej $f(x)=3(x+1)^2-4$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:

A. y = 1   B. y = -1   C. y = -3   D. y = -5

Zadanie 7. Funkcja *f* określona jest wzorem $f(x)=-2(x+3)^2-5$. Równanie prostej, która jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji *f* to:

A. x = 3   B. x = 5   C. x = -3   D. x = -5

Zadanie 8. Punkt W = (-3, 2) jest wierzchołkiem wykresu funkcji kwadratowej. Wzorem tej funkcji może być:

A. $f(x)=x^2-3x+2$ B. $f(x)=3(x+3)^2+2$

C. $f(x)=(x-3)^2+2$ D. $f(x)=-2(x+2)^2-3$

Zadanie 9. Współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x)=-2(x+1)^2-3$ wynoszą:

A. (1, -3)   B. (-1, -3)   C. (-1, 3)   D. (1, 3)

Zadanie 10. Funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x)=x^2+bx+c$ ma miejsca zerowe równe (-2) i 3. Wskaż poprawne wartości współczynników b i c.

A. b = -1, c = -6   B. b = -2, c = -3   C. b = 1, c = 6   D. b = 2, c = -3

Zadanie 11. Równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y=-x^2+4x-11$ to:

A. x = -4   B. x = -2   C. x = 2   D. x = 4

Zadanie 12. Wskaż równanie paraboli, której osią symetrii jest prosta o równaniu x = 2.

A. $y=x^2-8x+16$ B. $y=x^2+2$ C. $y=x^2-2$ D. $y=x^2-4x+4$

Zadanie 13. Funkcja f określona wzorem $f(x)=-\frac{1}{2}mx^2+2x-2$, gdzie $m\neq 0$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy:

A. m = -1   B. m = 1   C. m = -2   D. m = $\frac{1}{2}$

Zadanie 14. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=-2x^2+12x+1$ jest:

A. $(-\infty,19>$ B. $(-\infty,1>$ C. R   D. $<1,+\infty)$

Zadanie 15. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=x^2-6x+11$ jest:

A. $(-\infty,2>$ B. $(-\infty,3>$ C. $<3,+\infty)$ D. $<2,+\infty)$

Zadanie 16. Wykres funkcji $f(x)=2(x-1)^2-4$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:

A. y = -5   B. y = -4   C. y = 1   D. y = -1

Zadanie 17. Prosta o równaniu y = a ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=-x^2+6x-10$. Wynika stąd, że

A. a = 3   B. a = 0   C. a = -1   D. a = -3

Zadanie 18. Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 4x - 3$ w przedziale <0, 3> jest równa:

A. -7 B. – 4 C. – 3 D. -2

Zadanie 19. Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + 8x + 2$, gdzie $x \in < -1, 4 >$ jest równa:

A. f (-1) B. f (2) C. f (3) D. f (4)

Zadanie 20. Funkcja $f(x) = x^2 - 4x$ jest rosnąca w przedziale:

A. $< 0, \infty)$ B. $< 2, \infty)$ C. $(-\infty, 0 >$ D. $(-\infty, 2 >$

Zadanie 21. Dana jest funkcja $f(x) = (m^2 + 4)x^2 + mx + 3.$ Wówczas:

A. dla m = - 2 funkcja osiąga swoją wartość największą
B. dla m = 0 funkcja ma dwa miejsca zerowe
C. dla m = - 2 funkcja jest liniowa
D. dla m = 0 funkcja nie ma miejsc zerowych

7. WIELOMIANY

Wielomianem (funkcją wielomianową **)** stopnia n jednej zmiennej $x \in R$ nazywamy funkcję określoną wzorem:

$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

gdzie $n \in N, \quad a_n \neq 0 \quad i \quad a_0, a_1, ..., a_n \in R.$

n – stopień wielomianu, czyli st.[w(x)] = n

$a_0, a_1, ..., a_n$ - współczynniki liczbowe wielomianu, gdzie $a_n \neq 0$

a_0 - wyraz wolny wielomianu.

Uwaga: Liczby, litery lub iloczyn liczb i liter nazywamy jednomianami, np. $x, a, 4, 2x, 4ab$.

Dwa niezerowe wielomiany jednej zmiennej są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej.

Temat: STOPIEŃ I WSPÓŁCZYNNIKI WIELOMIANU

Zadanie 1. Ustal, czy funkcja jest jednomianem. Jeśli tak, to podaj jego stopień.

a) $y = -\frac{1}{3}x^5$ b) $y = 3x^{-1}$

c) $y = \sqrt{10}x^3$ d) $y = 7\sqrt{x}$

e) $y = 0{,}6x^{11}$ f) $y = x^2 \cdot x$

Zadanie 2. Uporządkuj wielomian w, określ jego stopień oraz wskaż wartości współczynników.

a) $w(x) = x - x^4 + x^3 + 2x^5 - 6 =$

b) $w(x) = 7 - 3x^2 + 5x - 3x^4 =$

c) $w(x) = 2x^2 - 3 + x^3 =$

Zadanie 3. Napisz wzór wielomianu trzeciego stopnia o podanych współczynnikach.

a) $a_0 = -5,\ a_1 = 4, a_2 = -3, a_3 = 2$

b) $a_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{3}{4},\ a_3 = -3$

c) $a_0 = a_2 = 0,\ a_1 = a_3 = -5$

Zadanie 4. Oblicz wartości wielomianu $w(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ dla $x = 3$ oraz dla $x = -3$.

Zadanie 5. Oblicz wartości wielomianu $w(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 3x + 5$ dla $x = \frac{1}{2}$ i dla $x = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 6. Wyznacz wyraz wolny a_0 wielomianu $w(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + a_0$, jeśli:

a) $w(1) = 5$ b) $w(-1) = -3$ c) $w(2) = 3$ d) $w(-2) = -40$.

Zadanie 7. Oblicz współczynnik a wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = x^2 - ax + 3,\ w(2) = 1$

b) $w(x) = x^3 - ax^2 - 4x,\ w(3) = 6$

c) $w(x) = ax^5 - 6x + 4,\ w(-2) = 0$

Zadanie 8. Oblicz współczynniki p i q wielomianu w, jeśli:

a) $w(x) = 2x^3 - px^2 + q,\ w(0) = 3,\ w(-1) = 4,$

b) $w(x) = -x^4 + px^3 - qx + 10,\ w(2) = 30,\ w(5) = 0$.

Temat: SUMA, RÓŻNICA I ILOCZYN WIELOMIANÓW.

Zadanie 1. Dane są wielomiany $w(x) = 2x^3 + 3x - 7$ i $p(x) = -5x^3 - 3x + 2$. Wykonaj działania:

a) $w(x) + p(x)$ b) $w(x) - p(x)$

c) $5w(x) - 2p(x)$ d) $p(x) \cdot (x + 2)$

Zadanie 2. Dane są wielomiany $w(x) = x^3 + 2x - 4,\quad p(x) = -4x^2 - 7x + 1,\quad r(x) = x + 2$

Wykonaj działania:

a) $r(x) - w(x)$ b) $(x + 2) \cdot w(x)$ c) $x \cdot p(x) + r(x)$

d) $6 \cdot p(x) + 2 \cdot r(x)$ e) $w(x) \cdot r(x)$ f) $x^3 \cdot r(x)$

Zadanie 3. Dane są wielomiany $w(x) = 2x^2 - 3$, $p(x) = x^3 + x - 2$. Wykonaj działania i uporządkuj wielomiany:

a) $3p(x) - 2w(x)$ b) $(x - 1)w(x) + (3x - 2)p(x)$)

Zadanie 4. Dane są wielomiany $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $w(x) = x^2 + x - 1$, $q(x) = x - 1$. Uporządkuj wielomiany:

a) $w(x) - 2p(x) + q(x)$ b) $(q(x))^2 - p(x)$

Zadanie 5. Dane są wielomiany $w(x) = 3x^3 + 2$, $q(x) = 2x^2 - 3, r(x) = 3x + 2$.
Uporządkuj wielomian $9 \cdot \left(q(x)\right)^2 - 4 \cdot w(x) \cdot r(x)$.

Zadanie 6. Dane są wielomiany $w(x) = 2x^2 + 3$, $r(x) = 3x^3 - 2$, $q(x) = 3x - 2$.
Uporządkuj wielomian $4 \cdot q(x) \cdot r(x) - 9 \cdot (w(x))^2$. Określ jego stopień.

Zadanie 7. Dane są wielomiany $w(x) = ax^3 + 3x^2 - (b + 4)x + c$ i $q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 5x$
Dla jakich wartości parametrów a, b, c wielomiany $w(x)$ i $q(x)$ są równe?

Zadanie 8. Dane są wielomiany: $w(x) = x^3 + 2x - 4$ i $q(x) = ax^3 + bx^2 + (c - a)x + d + b$.
Dla jakich wartości parametrów a, b i c wielomiany $w(x)$ i $q(x)$ są równe?

Zadanie 9. Dane są wielomiany $w(x) = x^2 + x - 1$, $q(x) = ax + b$ oraz
$p(x) = x^3 + 6x^2 + 4x - 5$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby $w(x) \cdot q(x) = p(x)$.

Zadanie 10. Dla jakich wartości parametrów a , b , c , d wielomiany
a) $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i $q(x) = 3(x - 2)^2 - 5(x - 2x^3)$
b) $w(x) = 2x(2x - 1)^2 - (4x - 3)$ i $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
są równe?

Zadanie 11. Dla jakich wartości parametrów a , b , c wielomiany
a) $w(x) = 5x^2(x + 4) - 3(x - 1)$ i $q(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c$
b) $w(x) = 2x^3 + ax^2 + (b - 4)x - c$ i $q(x) = 2x^3 + 5x + 8$
są równe?

Zadanie 12. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby wielomiany $w(x)$ i $p(x)$ były równe, jeśli $w(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 7, p(x) = 2x^3 + (b - a)x^2 + (2a + 3b)x - 7$.

Temat: DZIELENIE WIELOMIANÓW

Wykonując dzielenie wielomianu w(x) przez wielomian p(x), gdzie $p(x) \neq 0$, otrzymujemy wielomian q(x)oraz resztę r(x). Możemy wówczas wielomian w(x) zapisać w postaci

$$\boldsymbol{w(x) = q(x) \cdot p(x) + r(x)}$$

Twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian
Reszta z dzielenia wielomianu w(x) przez dwumian x – r jest równa liczbie w(r),czyli r(x) = w(r)

Zadanie 1. Wykonaj dzielenie wielomianów. Podaj iloraz i resztę.

a) $\left(x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x + 6\right):\left(x-2\right)$ b) $\left(x^3 + x - 2\right):\left(x-1\right)$

c) $\left(x^3 + 2x^2 - 3x - 10\right):\left(x-2\right)$ d) $\left(x^3 - 1\right):\left(x-1\right)$

e) $(2x^2 - 3x + 4):(x-3)$ f) $(12x^2 - x - 6):(3x-1)$

g) $(x^3 + 2x^2 - 9x - 4):(x-3)$ h) $(12x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 6):(2x^2 - 1)$

Zadanie 2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Wielomian w zapisz w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$

a) $w(x) = x^3 - 5x + 4,\ q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 6x^3 + x^2 - x + 4,\ q(x) = 3x - 1$

c) $w(x) = x^3 + 3x^2 - x + 5,\ q(x) = x - 2$

d) $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + x,\ q(x) = x + 3$

e) $w(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2x,\ q(x) = x^2 - 2x$

Zadanie 3. Oblicz resztę z dzielenia wielomianów, nie wykonując dzielenia.

a) $\left(3x^4 + x^2 + 1\right):\left(x+2\right)$ b) $\left(x^3 - 5x^2 + 8x - 2\right):\left(x-5\right)$

Temat: PIERWIASTKI WIELOMIANU

Pierwiastkiem wielomianu w(x) (miejscem zerowym) nazywamy liczbę rzeczywista r, taką, że w(r) = 0.

Twierdzenie Bézouta
Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu w(x) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w(x) jest podzielny przez dwumian x – r.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu
Jeżeli liczba całkowita r, taka, że $r \neq 0$, jest pierwiastkiem wielomianu W określonego wzorem $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
o współczynnikach całkowitych , gdzie $a_0 \neq 0$ i $n \geq 1$ to liczba **r jest dzielnikiem wyrazu wolnego** a_0 .

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu
Jeżeli wielomian w o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny różny od 0 w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, to licznik tego ułamka jest podzielnikiem wyrazu wolnego, a mianownik podzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej.

Jeżeli liczby $x_1, x_2, ..., x_n$ są pierwiastkami wielomianu w(x) co najmniej drugiego stopnia, to wielomian ten można przedstawić w postaci $w(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \cdot p(x)$ gdzie $a \neq 0$ i p(x) jest wielomianem.

Uwaga:
- Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.
- Wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek.
- Liczbę r nazywamy **k-krotnym pierwiastkiem** wielomianu w(x) stopnia n,

gdy wielomian w(x) jest podzielny przez $(x-r)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-r)^{k+1}$, np.

- w(x) = $(x-1)^2$, to wielomian w ma jeden pierwiastek równy 1. Liczbę 1 nazywamy **dwukrotnym (podwójnym) pierwiastkiem wielomianu w.**
- w(x) = $5x^2(x-2)^3$, to wielomian w ma dwa pierwiastki, są to liczby 0 i 2. Liczba 0 jest **dwukrotnym pierwiastkiem** wielomianu w, a liczba 2 **trzykrotnym**.

Zadanie 1. Sprawdź, która z liczb -1, 0, 2 jest pierwiastkiem wielomianu w, gdy $w(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

Zadanie 2. Sprawdź, korzystając z twierdzenia Bézouta, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

a) $w(x) = 3x^2 - 7x + 2, \quad q(x) = x - 2$

b) $w(x) = 5x^4 - 3x^3 + x - 2, \quad q(x) = x - 1$

c) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, \quad q(x) = x + 3$

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia Bézouta sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u.

a) $w(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2, \quad u(x) = (x + 1)(x - 2)$

b) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 15, \quad u(x) = x^2 - 9$
c) $w(x) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1, \quad u(x) = (3x - 1)(x - 1)$

Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru k wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

a) $w(x) = x^3 + kx^2 - x - 2, \quad q(x) = x - 2$

b) $w(x) = kx^3 - 6x^2 + k^2 x, \quad q(x) = x - 1$

c) $w(x) = x^3 + 3x^2 + k^2 x, \quad q(x) = x + 2$

d) $w(x) = 2x^2 - kx - 1, \; q(x) = 2x - 1$

Zadanie 5. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w(x). Wielomian w przedstaw w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopni niższych niż stopień wielomianu w.

a) $w(x) = 2x^3 + 6x^2 - 9x - 4, \quad a = -4$

b) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1, \quad a = \frac{1}{2}$

c) $w(x) = 6x^3 - 19x^2 + x + 6, \quad a = 3$

Zadanie 6. Oblicz wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu w.

a) $w(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$
b) $w(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
c) $w(x) = x^3 - x^2 - 7x + 3$
d) $w(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$
e) $w(x) = 2x^3 + 5x^2 - 11x + 4$
f) $w(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

Zadanie 7. Oblicz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu w, gdy:

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$
b) $w(x) = x^3 - x^2 - 8x - 4$
c) $w(x) = 4x^3 - 4x^2 - 3x + 2$
d) $w(x) = 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2$
e) $w(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$
f) $w(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

Zadanie 8. Podaj pierwiastki wielomianu w i określ jego stopień

a) $w(x) = 3(x-3)(x+2)(4-x)$
b) $w(x) = (x-\sqrt{2})(x+3)(x+1)$
c) $w(x) = -4x(3+x)(5-x)(x-7)$
d) $w(x) = 3x(x-5)(x+\sqrt{3})$
e) $w(x) = (x+4)^2(x-1)$
f) $w(x) = 3x(2x+8)^3(x+3)^2$
g) $w(x) = -4x^3(5x-1)^2(x+2)$
h) $w(x) = (x^2+4)(x+5)(x-2)^4$
i) $w(x) = x^5(x+3)^5(x-2)^2$
j) $w(x) = 6x(x+2)^2(x-2)^4$
k) $w(x) = x^3(x-2)^2(x+5)^4$
l) $w(x) = (x+3)^2(x-9)^2$

Temat: ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI

Rozłożyć wielomian na czynniki oznacza zapisać go w postaci iloczynu wielomianów niższych stopni. Najczęściej stosowane metody rozkładu wielomianu na czynniki:
- wzory skróconego mnożenia
- wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

- postać iloczynowa funkcji kwadratowej (dla wielomianu stopnia drugiego)
- grupowanie
- dzielenie wielomianu

Zadanie 1. Stosując wzory skróconego mnożenia rozłóż wielomian w na czynniki:

a) $w(x) = 25x^2 - 1$
b) $w(x) = 4 - 16x^2$
c) $w(x) = 16x^4 - 9$
d) $w(x) = 9x^2 - 12x + 4$
e) $w(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$
f) $w(x) = x^3 + 27$
g) $w(x) = 8x^3 - 1$
h) $w(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

Zadanie 2. Rozłóż wielomian na czynniki wyłączając przed nawias wspólny czynnik:

a) $w(x) = 6x^2 - 3x$
b) $w(x) = 12x^5 - 15x^4$
c) $w(x) = 10x^3 - 5x^4$
d) $w(x) = -8x^7 + 2x^6$
e) $w(x) = 15x^6 - 5x^8$
f) $w(x) = x^2(x - 3) + 4(x - 3)$
g) $w(x) = 2x(x + 5) - 3(x + 5)$
h) $w(x) = (2x + 3)(x - 5) + 4(x - 5)$

Zadanie 3. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynu, jeśli jest to możliwe:

a) $w(x) = x^2 - x - 30$
b) $w(x) = 2x^2 + 3x - 5$
c) $w(x) = 3x^2 - 3x + 1$
d) $w(x) = 9x^2 + 12x + 4$
e) $w(x) = x^2 - 5x + 6$
f) $w(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Zadanie 4. Rozłóż wielomian na czynniki, grupując jego wyrazy:

a) $w(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$
b) $w(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$
c) $w(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 10$
d) $w(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$
e) $w(x) = 3x^3 - 6x^2 - x + 2$
f) $w(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 8x$
g) $w(x) = 4x^3 + x^2 - 12x - 3$
h) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

Zadanie 5. Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $w(x) = x^2 - 1$
b) $w(x) = x^2 - 36$
c) $w(x) = x^4 - 625$
d) $w(x) = 81x^4 - 25$
e) $w(x) = 100x^4 - 4$
f) $w(x) = 5x^4 + 20x^2$
g) $w(x) = x^2(2x - 1) + 2x - 1$
h) $w(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$
i) $w(x) = x^3 - 10x^2 + 9x$
j) $w(x) = 36x^4 - 1$
k) $w(x) = 2x^4 - 8x^2$
l) $w(x) = 25x^2(x + 2) - (x + 2)$
m) $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15$
n) $w(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$
o) $w(x) = x^5 + 17x^3$
p) $w(x) = x^2(x - 1) - 4(x - 1)$
r) $w(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
s) $w(x) = x^3 + 5x^2 + 4x$
t) $w(x) = x^3 - 1$
u) $w(x) = x^6 + 27x^3$
w) $w(x) = x^2(x + 3) + x + 3$
x) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$
y) $w(x) = x^3 + x^2 - 20x$
z) $w(x) = 2x^3 - 18x$

Temat: RÓWNANIA WIELOMIANOWE

Zadanie 1. Rozwiąż równania:

a) $(x-3)(2x+4)(x-5)=0$
b) $5(3-2x)(x+3)(-2x+1)=0$
c) $2x^2(x+7)(2x+8)=0$
d) $(x^2-1)(x+3)^3(2x-6)=0$
e) $(x^2-16)(x^2-2x+1)=0$
f) $(x^2-9)(3x-4)(2x^2+9)=0$
g) $(3-2x)(x^2-3x+2)=0$
h) $(x^2+1)(3x+2)=0$
i) $(5x-2)(4-x^2)=0$
j) $(x^2+3x)(x^2+4)(x^2+4x+4)=0$

Zadanie 2. Rozwiąż równania:

a) $4x^3-12x^2=0$
b) $5x^4+x^2=0$
c) $3x^4+6x^2=0$
d) $x^4-9x^2=0$
e) $2x^3-8x=0$
f) $x^3+4x=0$

Zadanie 3. Rozwiąż równania:

a) $x^3-5x^2+4x=0$
b) $x^3+2x^2-8x=0$
c) $x^4+3x^3+6x^2=0$
d) $4x^4-12x^3+9x^2=0$

Zadanie 4. Rozwiąż równania, odpowiednio grupując wyrazy.

a) $x^3-4x^2+5x-20=0$
b) $x^3+5x^2-x-5=0$
c) $2x^3+3x^2-4x-6=0$
d) $x^3+3x^2-9x-27=0$
e) $2x^3-5x^2-8x+20=0$
f) $x^3+5x^2-x-5=0$
g) $x^3-7x^2-4x+28=0$
h) $x^3-3x^2+4x-12=0$

Zadanie 5. Rozwiąż równania:

a) $3x^4+6x^3=3x^2$
b) $4x^5-x=0$
c) $x^4+2x^2-15=0$
d) $x^4+3x^3=3x^3+x$
e) $9x^4-1=0$
f) $6x^3+2x^2=3x+1$

Temat: NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE

Zadanie 1. Rozwiąż nierówności:

a) $(x-2)(x+2)(x-5)\le 0$
b) $(x-1)(x+2)(4-x)\le 0$
c) $(x-2)(x^2-9)<0$
d) $(x+2)^2(x^2-1)>0$
e) $(x-3)(x+2)(2x-8)>0$
f) $(x^2-1)(x+1)<0$
g) $(x^2-4)(x^2-3x+2)\le 0$
h) $(x^2-x-6)(x^2+2x-3)\le 0$
i) $(9-x^2)(x^2-5x+4)>0$
j) $x^3-5x^2+6x\ge 0$
k) $-x^3-4x^2-4>0$
l) $x^3-x^2>x-1$
m) $x^3+2x^2-x-2<0$
n) $-x^3+3x^2-3x+9\ge 0$
o) $2x^3-x^2-2x+1\le 0$
p) $x^3-x^2-2x>0$

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – WIELOMIANY

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ wskazać stopień i współczynniki wielomianu,
- ✓ wyznaczać wartość wielomianu dla podanych argumentów,
- ✓ wykonywać działania na wielomianach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie),
- ✓ sprawdzać, czy wskazana liczba jest pierwiastkiem wielomianu,
- ✓ wyznaczać pierwiastki wielomianu,
- ✓ rozkładać wielomiany na czynniki,
- ✓ rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie1. Wielomian $x^2(4x+5)-(x+1)(3x^2-1)$ jest równy wielomianowi:

A. $w(x)=2x^2+x+x^3+1$

B. $w(x)=x^3+2x^2+x+1$

C. $w(x)=x^3+x^2+2x+2$

D. $w(x)=x^3-x^2+2x-2$

Zadanie 2. Pierwiastkami wielomianu $w(x)=3(x+6)(x+1)(x-4)$ są liczby:

A. 6, 1, -4

B. -6, 1, -4

C. -6, -1, 4

D. -6, -1, - 4

Zadanie 3. Rozkładem wielomianu x^4-16 na czynniki jest rozkład:

A. $(x^2-4)(x^2+4)$

B. $(x+2)^2(x^2+4)$

C. $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

D. $(x+2)^2(x^2-4)$

Zadanie 4. Wielomian $w(x)=x^3-3x+2$ dzieli się bez reszty przez dwumian:

A. $x-1$

B. $x+3$

C. $x+2$

D. x - 3

Zadanie 5. Rozwiązaniami równania $x^3-4x^2-x+4=0$ są liczby:

A. 4, 1, -1

B. -2, 2, -1

C. 2, 4, -1

D. -2, 1, 4

Zadanie 6. Rozkładem wielomianu $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x$ na czynniki jest rozkład:

A. $2x(x+1)^2$
C. $2(x+1)x(x+1)$
B. $-2x(x+1)(x-1)$
D. 2x(x - 1)2

Zadanie 7. Wykonaj dzielenie wielomianu $w(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ przez dwumian $Q(x) = x - 2$ i podaj wynik dzielenia.

Zadanie 8. Uporządkuj wielomian $w(x) = x^2(x-2) - (x+3)(2x^2 - 1)$ i podaj jego stopień

Zadanie 9. Dane są wielomiany: $w(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 1$ i $p(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$. Oblicz: $p(x) - 2w(x)$ oraz $p(x) \cdot w(x)$

Zadanie 10. Rozłóż wielomiany na czynniki:

a) $w(x) = 4x^2 - x^3$
b) $w(x) = 25x^2 - 4$
c) $w(x) = 9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$
d) $w(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 9$
e) $w(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x$
f) $w(x) = (3x^2 + 1)(x - 1) - (3x^2 + 1)(2x + 5)$

Zadanie 11. Rozwiąż równania i nierówności:

a) $x^3 - 7x^2 - 3x + 21 = 0$
b) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$
c) $(x-1)(x+1)^2(x-2)^3 > 0$
d) $3x^3 + 6x^2 + 7x + 14 \leq 0$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Dane są wielomiany $w(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $p(x) = 2x^3 + 12x$.
Wielomian W(x) + P(x) jest równy:

A. $5x^2 + 12x - 3$
C. $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$
B. $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$
D. $4x^3 + 12x^2 - 3$

Zadanie 2. Stopień iloczynu wielomianów w(x) i g(x), gdy w(x) = $3x^2 - 2x$ i g(x) = $2x^2 + 3x$ jest równy:

A.6 B. 5 C. 4 D. 3

Zadanie 3. Jeżeli x – y = -5 i x + y = 11, to wartość wyrażenia $x^2 - y^2$ jest równa:

A. -96 B. -55 C. -16 D. 16

Zadanie 4. Liczby -3, 3, -1, 1 są pierwiastkami wielomianu:
A.$w(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$ B. $w(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 3)(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
C. $w(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$ D. $w(x) = (x^2 + 9)(x^2 - 1)$

Zadanie 5. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 + mx^2 - 3x + 2$. Parametr m jest równy.
A.2 B. -2 C. 1 D. -1

Zadanie 6. Liczba pierwiastków wielomianu p(x) określonego wzorem $p(x) = (x - 5)(x + 3)(x^2 - 2x + 2)$ jest równa:
A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

Zadanie 7. Wielomian w(x) = $x^3 - 6x^2 + 9x$ można zapiać w postaci:
A.$w(x) = x(x + 3)^2$ B. $w(x) = x(x - 3)^2$
C. $w(x) = x(x - 3)(x + 3)$ D. $w(x) = (x^2 - 3)^2$

Zadanie 8. Wielomian w(x) = $x^4 - 8x^2 + 16$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:
A. $(x^2 + 4)^2$ B. $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$ C. $(x + 2)^4$ D. $(x - 2)^2(x + 2)^2$

Zadanie 9. Wyrażenie $27x^3 + y^3$ jest równe iloczynowi:
A. $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$ B. $(3x + y)(9x^2 + 3xy + y^2)$
C. $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$ D. $(3x - y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

Zadanie 10. Wskaż wielomian, którego nie można rozłożyć na czynniki:
A. $W(x) = 6 - x^3$ *B.* $A(x) = x(x - 1) + 2(x - 1)$
C. $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ *D.* $K(x) = x^2 + 4$

Zadanie 11. Dany jest wielomian $w(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 9$. Wartość tego wielomianu dla x = $-\sqrt{2}$ jest równa:
A. $-7\sqrt{2} - 13$ B. $-3\sqrt{2} - 5$ C. $-7\sqrt{2} - 5$ D. $-3\sqrt{2} - 13$

Zadanie 12. Po rozłożeniu wyrażenia $4x^3y^2 - 8xy + 12x^2y^3$ na czynniki otrzymamy:
A. $4xy(x^2y - 2 + 3xy^2)$ B. $4x^3y^2(x - 2 + 3y)$
C. $4xy(x^2y + 2 + 3xy^2)$ D. $4x^2y^2(x - 2 + 3y)$

Zadanie 13. Jeżeli $2a = -1$, to wartość wyrażenia $(4 - 4a)^2$ jest równa:
A. 2 B. 4 C. 6 D.36

Zadanie 14. Wyrażenie $x(x - 2y) + 3(xy - y^2)$ jest równe:
A. $x^2 + xy - y^2$ B. $x^2 + xy - 3y^2$
C. $x^2 - 2y + 3xy - y^2$ D.$x^2 - 5xy - 3y^2$

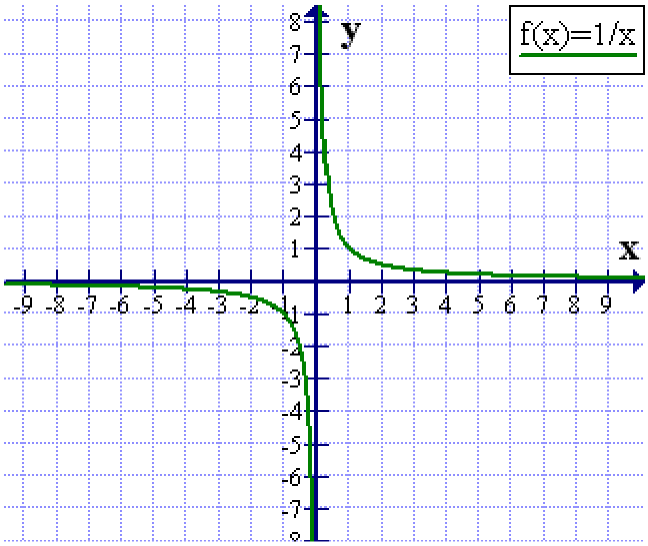
Zadanie 15. Jeżeli $x^2 + 7x + 15 = (x + 5)(x + 2) + a$, to liczba a jest równa:
A. -10 B. -5 C. 5 D. 10

Zadanie 16. Wyrażenie 3(x - 2) – 4x(2 - x) można zapisać w postaci:
A. 12x(x - 2) B. (3 + 4x)(2 - x) C. (3 + 4x)(x - 2) D. (4x - 3)(x - 2)

8. FUNKCJA WYMIERNA

Funkcją wymierną nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie współczynnik $a \in R \setminus \{0\}$. Wykresem funkcji wymiernej jest krzywa zwana **hiperbolą,** która składa się z dwóch części**.** Każdą z tych części nazywamy gałęzią hiperboli.

Poniżej znajduje się hiperbola będąca wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.



Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ jest zbiór $D_f = R \setminus \{0\}$, a zbiorem wartości $Y_f = R \setminus \{0\}$.

Proste o równaniach y = 0 i y = 0 są **asymptotami** tej hiperboli, proste o równaniach y = x i y = -x są jej osiami symetrii, a punkt O = (0, 0) jest jej środkiem symetrii.

Funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$ jest monotoniczna w każdym z przedziałów $(-\infty : 0), (0; +\infty)$. Funkcja ta jest:
- rosnąca, gdy $a < 0$
- malejąca, gdy $a > 0$.

Temat: WYKRES I WŁASNOŚCI FUNKCJI WYRAŻONEJ WZOREM $f(x) = \frac{a}{x}$

Zadanie 1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3}{x}$. Sprawdź, czy podane punkty należą do wykresu:

a) A = (-3, -1) b) A = (-2, $1\frac{1}{2}$) c) A = ($\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}$) d) A = ($\sqrt{3}, \sqrt{3}$)

Zadanie 2. Funkcja f, której wykresem jest hiperbola, określona jest wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$.

Podaj wartość współczynnika a, gdy:

a) $f(x) = \frac{3}{x}$, b) $f(x) = -\frac{2}{x}$, c) $f(x) = -\frac{0{,}3}{x}$

d) $f(x) = -\frac{1}{4x}$, e) $f(x) = \frac{3}{4x}$, f) $f(x) = \frac{-2}{3x}$

Zadanie 3. Sporządź wykres funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = -\frac{4}{x}$, b) $f(x) = \frac{12}{x}$ c) $f(x) = -\frac{8}{x}$

d) $f(x) = \frac{3}{4x}$ e) $f(x) = \frac{0{,}4}{x}$ f) $f(x) = \frac{2}{5x}$

Odczytaj z wykresu i określ:

- dziedzinę i zbiór wartość oraz monotoniczność funkcji,
- przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne).

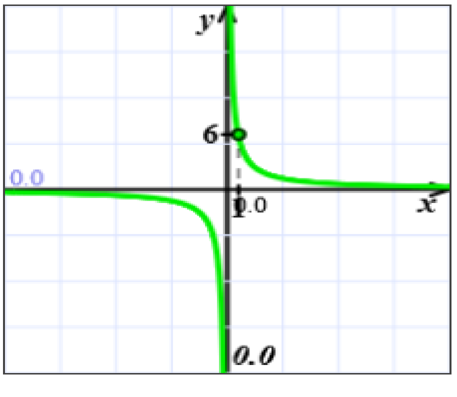
Zadanie 4. Zapisz wzór funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wiedząc, że do wykresu funkcji należy punkt P.

Określ jej monotoniczność.

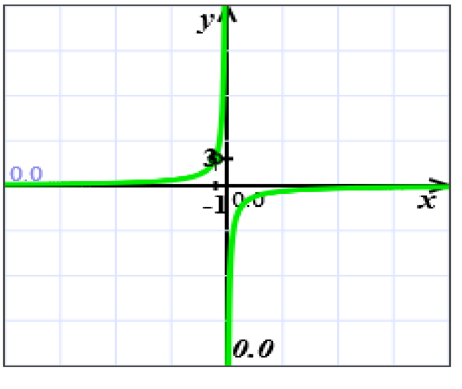
a) P = ($\frac{1}{2}, -4$) b) P = (4; 0,75).

Zadanie 5. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji określonej wzorem postaci $y = \frac{a}{x}$. Podaj wartość współczynnika ***a***.

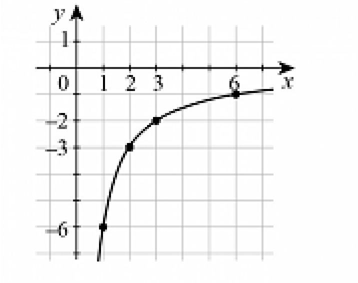
a)



b)



Zadanie 6. Na rysunku przedstawiona jest jedna gałąź hiperboli określona wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$. Podaj wartość współczynnika *a*.



Zadanie 7. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{3}{x}$, a następnie przesuń go o 2 jednostki w lewo względem osi x i o 1 jednostkę w dół względem osi y. Zapisz wzór nowej funkcji, a następnie określ jej:

a) dziedzinę i zbiór wartości,
b) równania asymptot oraz przedziały monotoniczności,
c) miejsce zerowe.

Zadanie 8. Naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\frac{2}{x-1}+3$ b) $f(x)=\frac{-4}{x+2}-1$ c) $f(x)=\frac{6}{x+3}-2.$

Dla każdej z nich wskaż:

- dziedzinę,
- zbiór wartości,
- równania asymptot,
- przedziały monotoniczności,
- miejsce zerowe,
- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz ujemne.

Temat: WIELKOŚCI ODWROTNIE PROPORCJONALNE

Zadanie 1. Uzupełnij tabelki, jeżeli wielkości x i *y* są.
a) wprost proporcjonalne

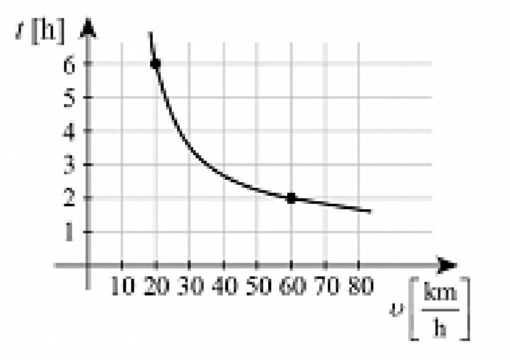
x	10		50		200
y		100		500	1000

b) odwrotnie proporcjonalne

X		40	50	125	
Y	1000		20		2

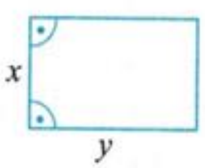
x	$1\frac{3}{8}$		$\sqrt{14}$
y	$5\frac{1}{11}$	0,1	

Zadanie 2. Na rysunku przedstawiona jest zależność między średnią prędkością v a czasem t Potrzebnym do pokonania trasy s. Podaj długość trasy s.



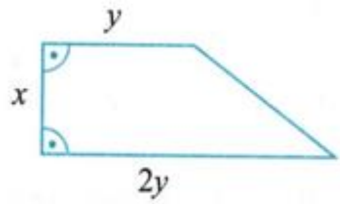
Zadanie 3. Kształt działki ogrodniczej przedstawiony jest na rysunku poniżej, a jej pole ***P*** podane jest pod rysunkiem. Uwzględniając oznaczenia przedstawione na rysunku, wyraź wielkość ***y*** w zależności od wielkości **x**. Czy wielkości **x** i ***y*** są odwrotnie proporcjonalne?

a)



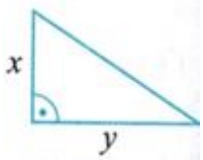
$P = 300$,

b)



$P = 600$,

c)



$P = 400$.

Zadanie 4. Cztery spychacze wyrównują teren przeznaczony na parking w czasie 75 godzin. W ciągu ilu godzin wyrówna ten teren sześć takich samych spychaczy?

Zadanie 5. Pewne zadanie miało wykonać 18 robotników w czasie 12 godzin. Po 7 godzinach wspólnej pracy ośmiu robotników skierowano do innych prac. Zakładając, że wszyscy robotnicy pracują z tą samą wydajnością oblicz, o ile godzin wydłuży się czas wykonania tego zadania.

Zadanie 6. Schronisko górskie ma w zapasie produkty żywnościowe na trzy doby dla 48-osobowej grupy turystów. W schronisku zakwaterowano 36-osobową grupę. Na ile dni wystarczy zapasów dla tej grupy?

Zadanie 7. Górskie schronisko ma w zapasie produkty żywnościowe na trzy doby dla 36-osobowej grupy turystów.

a)W schronisku zakwaterowała się 27-osobowa grupa. Przez ile dni może ona w schronisku bez uzupełniania zapasów produktów żywnościowych?

b) Ilu turystów może przebywać w schronisku przez sześć dni bez uzupełniania produktów żywieniowych?

Zadanie 8. Koła roweru używanego do popisów cyrkowych mają średnice odpowiednio równe 20 cm i 50 cm. W czasie występu większe koło wykonało 256 obrotów. Ile obrotów wykonało wtedy mniejsze koło?

Zadanie 9. Częstotliwość drgającej struny jest odwrotnie proporcjonalna do jej średnicy. Struna skrzypiec o średnicy 0,50mm wytwarza dźwięk o częstotliwości 440 Hz. Jaka jest częstotliwość dźwięku wytwarzanego przez strunę o średnicy 0,55 mm?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{4}{x}$ jest zbiór:

A.R B. R\{4} C. R\{-4} D. R\{0}.

Zadanie 2. Wykres funkcji $f(x)=\frac{6}{x}$ nie ma punktów wspólnych z prosta o równaniu:

A. y = 6 B. y = x C. y = 6x D. y = -6x

Zadanie 3.Współczynnik proporcjonalności wielkości x i y, których zależność przedstawiona jest w tabeli jest równy:

x	-2	2,5	4	5	-10
y	-5	4	2,5	2	-1

A. 6 B. 10 C. 60 D. 600

9. WYRAŻENIA WYMIERNE

Wyrażeniem wymiernym nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{w(x)}{p(x)}$, gdzie w(x) i p(x) są wielomianami jednej zmiennej lub wielu zmiennych, a wielomian p(x) nie jest wielomianem zerowym.

Temat: WYRAŻENIE WYMIERNE I JEGO DZIEDZINA

Wyrażenie wymierne ma sens liczbowy dla tych wartości zmiennych, dla których wielomian występujący w mianowniku tego wyrażenia ma wartości różne od zera.

Zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jest określona wartość liczbowa tego wyrażenia jest **dziedziną wyrażenia wymiernego.**

Zadanie 1. Dla podanych wartości zmiennych, oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{3x-1}{x^2+2x}$ $dla\ x=-3$

b) $\frac{4y-xy}{x+2y}$ $dla\ x=-1\ i\ y=5$

c) $\frac{(x-5)^3}{(x+7)^2}$ $dla\ x=-7$

d) $\frac{2x+\sqrt{1-2x+x^2}}{x-1}$ $dla\ x=3$

e) $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ $dla\ x=-2$

f) $\frac{x^3+4x}{x^2}$ $dla\ \ x=\sqrt{2}.$

Zadanie 2. Określ dziedzinę wyrażenia wymiernego:

a) $\frac{5x^2}{4-x}$ b) $\frac{x}{x+5}$ c) $\frac{3}{2-x}$

d) $\frac{5-2x}{x^2-6x}$ e) $\frac{x^2-1}{x^2+2x}$ f) $\frac{2x+3}{x^2-9}$

g) $\frac{-7x^2+x}{(x+2)^2}$ h) $\frac{x^2-4}{x(x^2+1)}$ i) $\frac{x^3-1}{(x-2)(8-x)}$

j) $\frac{x^2+x+3}{x^2(3x-5)}$ k) $\frac{5+x-6x^2}{2x^2-7x-4}$ l) $\frac{x^2}{x^2+x-6}$

m) $\frac{4x}{x^2+64}$ n) $\frac{4x^2}{x^3-27}$ o) $\frac{3x-1}{8+x^3}$

p) $\frac{2x-1}{x^3+4x}$ r) $\frac{x^2+5}{x^3+2x^2-4x-8}$ s) $\frac{4-x^2}{x^3-2x^2+9x-18}$

t) $\frac{x^3+x^2}{x^3+9x^2}$ u) $\frac{x^2-4}{x^2+1}$ w) $\frac{2-x}{(x+3)(x^2+4x+4)}$

Zadanie 3. Skreśl liczby, które nie należą do dziedziny wyrażenia wymiernego. Zaznacz liczby, dla których wyrażenie przyjmuje wartość 0.

a) $\frac{x^2-x}{x-1}$, -1, 0, 1

b) $\frac{x}{x^2-1}$, -1, 0, 1

c) $\frac{x^2+x}{x^2}$, -1, 0, 1

d) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$, -1, 0, 1

Temat: SKRACANIE I ROZSZERZANIE WYRAŻEŃ WYMIERNYCH

Zadanie 1. Ustal dziedzinę i skróć wyrażenie:

a) $\frac{5x^2}{6x^3}$ b) $\frac{4x^2}{x^2-x}$ c) $\frac{4x-4}{5x-5}$

d) $\frac{2x^2-4x}{x-2}$ e) $\frac{5x^3-3x^2}{4x^2}$ f) $\frac{4x^2-12x}{x^2-9}$

g) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$ h) $\frac{2x^3-32x}{3x^2+12x}$ i) $\frac{4x^2-100}{x^2-10x+25}$

j) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ k) $\frac{7x^2-7x}{5x^2-25x}$ l) $\frac{x^2+2x-15}{2x^2-50}$

m) $\frac{(x+1)^2(x-3)^2}{(x^2-9)(x^2-1)}$ n) $\frac{x^2+4x+4}{x^3+2x^2-5x-10}$

Zadanie 2. Rozszerz wyrażenie, mnożąc licznik i mianownik przez wyrażenie podane obok. Określ dziedzinę otrzymanego wyrażenia:

a) $\frac{x+3}{x-3},\ 4x$ b) $\frac{x-5}{x+2},\ x-1$ c) $\frac{x^2}{1-x},\ x+1$

Zadanie 3. Sprowadź do wspólnego mianownika wyrażenia:

a) $\frac{8x}{x-1}\ i\ \frac{2x-9}{3x-3}$ b) $x\ i\ \frac{2x}{x-4}$

c) $x-4\ i\ \frac{6}{x-4}$ d) $\frac{x+13}{(x-6)(x+5)}\ i\ \frac{3x-6}{x+5}$

e) $\frac{4}{x^2}\ i\ \frac{5x}{x^2+7x}$ f) $\frac{6x}{x^2+x-2}\ i\ \frac{3}{x^2+5x+6}$

Temat: MNOŻENIE I DZIELENIE WYRAŻEŃ WYMIERNYCH

Zadanie 1. Określ dziedzinę i wykonaj mnożenie. Wynik przedstaw w najprostszej postaci:

a) $\frac{5}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{x-3}$ b) $\frac{3x}{4x-2}\cdot\frac{2x-1}{9x^2}$ c) $\frac{x^2-25}{x^2+6x}\cdot\frac{x+6}{2x-10}$

d) $\frac{x^3+5x^2}{10x-5}\cdot\frac{15x-10}{2x^4}$ e) $\frac{12}{3x^2-4x}\cdot\frac{x}{18x+6}$ f) $\frac{3x^2+3x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{6x}$

g) $\frac{2x-10}{x^2+x-6}\cdot\frac{x^2+2x-3}{10x^2-2x^3}$ h) $\frac{x^2-25}{x^2+6x}\cdot\frac{x^2+12x+36}{x^2-3x-10}$ i) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4x-5}\cdot\frac{x^2-6x+5}{x+2}$

Zadanie 2. Określ dziedzinę i wykonaj działania:

a) $\frac{x+3}{x^2-16}:\frac{2x^2+6x}{x+4}$ b) $\frac{x-2}{x^2-x}:\frac{x^2-4}{x}$ c) $3(x-6):\frac{x-6}{5}$

d) $\frac{x-1}{2x+10}:\frac{2x-2}{x^2+5x}$ e) $\frac{x+2}{3x^2+15x}:\frac{x^2-4}{x+5}$ f) $\frac{x}{-3x+2}:\frac{x-5}{5x^2+x-4}$

g) $\frac{x^3-8}{6-2x}:\frac{x^2-2x}{x-3}$ h) $\frac{2x^2-18}{x}:(x+3)$ i) $\frac{2x+1}{x^2+2x-3}:\frac{2x^2-7x-4}{x^2-x-12}$

Temat: DODAWANIE I ODEJMOWANIE WYRAŻEŃ WYMIERNYCH

Zadanie 1. Wykonaj dodawanie. Wynik podaj w najprostszej postaci:

a) $\frac{3}{x}+\frac{5}{2x-3}$ b) $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-3}{1-x}$ c) $\frac{2x}{x+1}+\frac{x-1}{3-x}$

d) $\frac{2x}{x+5}+2$ e) $\frac{3}{x^2-1}+4$ f) $\frac{4x^2+1}{(x+1)(x-3)}+\frac{1-5x}{x-3}$

g) $\frac{4x^3}{x^2-4}+x$ h) $\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}$ i) $\frac{x+2}{4x-x^2}+\frac{x-2}{x}$

j) $\frac{3}{x^2-2x}+\frac{4}{x^2+2x}$ k) $\frac{2}{3(x-4)}+\frac{x}{x^2-2x-8}$ l) $\frac{x+2}{x^2-x-6}+\frac{x+1}{x^2+7x+10}$

Zadanie 2. Wykonaj odejmowanie. Wynik podaj w najprostszej postaci:

a) $\frac{1}{x}-\frac{3}{3x-2}$ b) $\frac{5}{x-4}-\frac{2}{x}$ c) $\frac{4}{x-2}-\frac{5}{x+2}$

d) $\frac{10x^2-5x}{4x^2-9}-\frac{5x}{2x+3}$ e) $\frac{3x+5}{x^2+2}-\frac{4}{x-2}$ f) $\frac{2}{x^2-9}-\frac{x}{2x+6}$

g) $\frac{6x^3-4x}{3x^2-2x+5}-2x$ h) $\frac{-3x}{5x-1}-\frac{x^4-6x^3}{10x^3-2x^2}$ i) $\frac{4}{x^2-6x}-\frac{2}{x^2+6x}$

Zadanie 3. Wykonaj działania. Wynik podaj w najprostszej postaci:

a) $\frac{4x}{x-1}-\frac{x+3}{x}+5$ b) $\frac{2+x}{x}+\frac{3x-1}{x-3}-2$ c) $\frac{3-x}{x+1}-\frac{7}{x}+6$

d) $\left(5+\frac{2}{x}\right)\cdot x^3$ e) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-3}\right):\frac{2x^2+6x}{x^2-9}$ f) $\frac{x^2-9}{x^2-4}:\frac{x-3}{x+2}-\frac{1-x}{x-2}$

Temat: RÓWNANIA WYMIERNE

Zadanie 1. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+3}{x-5}=0$ b) $\frac{x^2-6x}{x-7}=0$ c) $\frac{6x-3}{x+3}=3$

d) $\frac{x}{x-5}=\frac{3}{2x}$ e) $\frac{3}{x}=4$ f) $-\frac{6}{x}=\frac{1}{3}$

g) $\frac{4-x}{x+5}=2$ h) $\frac{2x-5}{x-4}=x$ i) $\frac{x-5}{x-4}=-\frac{3}{4}$

j) $\frac{4x+11}{2x+3}=\frac{x+5}{x+1}$ k) $\frac{-x+5}{x}=\frac{x}{7-x}$ l) $\frac{2x-9}{x-3}=x+3$

m) $\frac{x}{2x-1}+\frac{-4}{x+3}=0$ n) $\frac{1}{x+4}-\frac{2}{x+1}=0$ o) $\frac{24}{x^2-9}-\frac{2}{3-x}+4=0$

Zadanie 2. Określ liczbę pierwiastków równania.

a) $\frac{x^2+x}{x^2-1}=0$ b) $\frac{2+x}{x^2+4}=0$

c) $\frac{4x+20}{x^2-25}=0$ d) $\frac{x(x^2-16)(x+3)}{x^3-9x}=0$

Zadanie 3. Licznik pewnego ułamka jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeżeli licznik tego ułamka zwiększymy o 4, a mianownik o 7, to wartość ułamka się nie zmieni. Wyznacz ten ułamek.

Zadanie 4. Licznik pewnego ułamka jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeżeli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka dwukrotnie wzrośnie. Wyznacz ten ułamek.

Zadanie 5. Mama Piotrka jest o 7 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy do wieku taty wynosi 6:7. Ile lat ma mama, a ile tata Piotrka?

Zadanie 6. Magda ma 25 lat a jej młodsza siostra 13 lat. Za ile lat stosunek wieku Magdy i jej siostry będzie równy $\frac{3}{2}$?

Zadanie 7. Szkoła zamówiła seans filmowy dla uczniów klas trzecich. Koszt seansu wyniósł 1650zł. Ponieważ do kina nie przyszło 15 uczniów, pozostali musieli dopłacić po 1 zł za bilet. Jaka była planowana, a jaka rzeczywista cena biletów?

Zadanie 8. Pan Andrzej przeczytał książkę liczącą 720 stron, przy czym każdego dnia czytał taką samą liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej to przeczytałby tę książkę o 15 dni wcześniej. Ile dni czytał tę książkę?

Zadanie 9. Odległość między miastami A i B wynosi 540km. Pociąg ekspresowy pokonuje tę trasę w czasie o 3 godziny krótszym niż pociąg osobowy. Szybkość ekspresu jest większa od szybkości pociągu osobowego o 30km/h. Oblicz średnie prędkości obu pociągów.

Zadanie 10. Kierowca pomyślał, że odległość 208km może przejechać z pewną stałą prędkością v w czasie t. Gdyby jechał z prędkością o 13km/h większą, to tę samą trasę pokonałby w czasie o 0,8 godziny krótszym. O jakiej stałej prędkości pomyślał kierowca?

Zadanie 11. Kolarz pokonuje trasę 60km ze stałą prędkością. Gdyby jechał z prędkością o 1 km większą, to tę samą trasę pokonałby w czasie o 6 minut krótszym. Oblicz prędkość jazdy kolarza.

Zadanie 12. W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Temat: NIERÓWNOŚCI WYMIERNE

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{3x-5}{3+2x} < 0$ b) $\frac{x-5}{x+3} > 0$ c) $\frac{x^2-2x}{x-2} > 0$

d) $\frac{2x-6}{x^2-7x} \leq 0$ e) $\frac{2x-6}{x^2-7x} \leq 0$ f) $\frac{x^2-4}{(x-2)(x-1)} \geq 0$

g) $\frac{x-9}{x^2-10x-11} \leq 0$ h) $\frac{(x+1)^2}{x^2-6x+9} < 0$ i) $\frac{2x^2-x-3}{x^2+2x+3} < 0$

j) $\frac{x^2-2x+6}{-x^2+x+2} > 0$ k) $\frac{3-4x}{x+7} - 3 < 0$ l) $\frac{2-9x}{5+x} + 5 \geq 0$

m) $\frac{1-3x}{2-3x} \leq 2$ n) $\frac{5x}{4+x} > -1$ o) $\frac{6x+5}{3-2x} - 4 \geq 0$

p) $\frac{5}{2x} - \frac{7}{4x+3} \leq 0$ r) $\frac{3}{2x-1} - \frac{5}{4x+3} \geq 0$ s) $\frac{-2}{(x+4)^2} - \frac{3}{x+4} < 0$

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – WYRAŻENIA WYMIERNE

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ wyznaczyć dziedzinę wyrażenia wymiernego,
- ✓ skrócić wyrażenie wymierne,
- ✓ rozszerzyć wyrażenie wymierne do podanego mianownika,
- ✓ sprowadzić dwa wyrażenia wymierne do wspólnego mianownika,
- ✓ dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne,
- ✓ rozwiązywać równania i nierówności wymierne,
- ✓ rozwiązywać zadania tekstowe.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Wykonaj działania

a) $\frac{x-4}{x+3}+\frac{x-1}{x+4}$ b) $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x}$

c) $\frac{x}{6-x}:\frac{x^2+x}{x^2-36}$ d) $\frac{x}{x^2+5x}\cdot\frac{x^2-25}{x+2}$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{-x-4}{x+2}=2$ b) $\frac{3}{2x+1}=\frac{7}{5x-1}$

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{x-4}{5x-10}\leq 0$ b)$\frac{-2x+9}{x-6}\geq -2$

Zadanie 4. Licznik pewnego ułamka jest równy 7. Jeśli mianownik tego ułamka zwiększymy o 12, a licznik o 14, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

Zadanie 5. Ania jest o 8 lat starsza od Danki. Stosunek wieku Ani i Danki jest równy 3:2. Ile lat ma każda z dziewcząt?

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{3x^2-2}{x^2-16}$ jest zbiór:

A. R\ {16} B. R\{-4, 4} C. {-4, 4} D. R\{4}

Zadanie 2. Dla jakich wartości x wyrażenie $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}$ nie ma sensu liczbowego?

A. x = 2, x = -3 B. x = -2, x = 3 C. x = -2, x = -3 D. x = 2, x = 3

Zadanie 3. Wartość wyrażenia $\frac{2x^2-1}{3x^2-x-2}$ + $\frac{x}{2x-1}$ dla x = -1 wynosi:

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $1\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

Zadanie 4. Dla $x \neq 3$ i $x \neq -1$ wyrażenie $\frac{(x^2-9)(x-1)}{(x-3)(x^2-2x+1)}$ po skróceniu jest równe:

A. $\frac{x-3}{x-1}$ B. $\frac{x+3}{x+1}$ C. $\frac{x-3}{x+1}$ D. $\frac{x+3}{x-1}$

Zadanie 5. Rozszerzeniem wyrażenia $\frac{2x-1}{x+3}$ dla x$\neq -3$ jest wyrażenie:

A. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$ B. $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-9}$

C. $\frac{2x^2-7x+3}{x^2+9}$ D. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2+9}$

Zadanie 6. Rozwiązaniem równania $\frac{x^2-3}{2x-4}=0$ jest:

A. 2 i 3 B. $\sqrt{3}\ i -\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}\ i\ 2$ D. $\sqrt{3}\ i\ 2$

Zadanie 7. Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{\mathrm{x}-3}{(5+\mathrm{x})(\mathrm{x}+2)}=0$

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Zadanie 8. Rozwiązaniem równania $\frac{4x}{2-x}$ = 3 jest liczba:

A.$\frac{5}{6}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{7}{6}$

Zadanie 9. Podaj liczbę rozwiązań równania $\frac{x^3-9x}{x^2+2x-3}=0$:

A.0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 10. Rozwiązaniem równania $\frac{(x^2-4)(x^2-16)}{x-4}=0$ **nie jest** liczba:

A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

Zadanie 11. Wyrażenie $\frac{8x-12x^2}{4x^2}, x \neq 0$ po uproszczeniu ma postać:

A.2-3x B. $\frac{2-12x}{x}$ C. $\frac{2-3x}{4x}$ D. $\frac{2-3x}{x}$

Zadanie 12. Rozwiązaniem równania $\frac{(x-2)(x+6)}{x^2-36}=0$ jest:

A. 2 i -6 B . -6 C. 2 D. -6 i 6

Zadanie 13. Wartość wyrażenia $\frac{a^2-2ab}{a}$ dla $a=-\frac{1}{2}$ i b = 3 jest równa:

A. -5,5 B. -7,5 C. 7,5 D. -6,5

Zadanie 14. Rozwiązaniem równania $\frac{2x-3}{x}=\frac{x+1}{x}$ jest liczba

A. 4 B. -1 C. $\frac{3}{2}$ D. 0

10. FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA

Temat: POTĘGA O WYKŁADNIKU RZECZYWISTYM

Przypomnijmy:

POTĘGA O WYKŁADNIKU NATURALNYM

$$a^0 = 1, \qquad dla\ a \neq 0$$
$$a^1 = a, \qquad dla\ a \in R$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a, \qquad dla\ a \in R\ \ i\ \ n \in N^+$$
$$Jeżeli\ a \in R\ \ i\ n \in N \backslash \{0\}, to\ a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$

POTĘGA O WYKŁADNIKU CAŁKOWITYM

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, gdzie\ a \in R \backslash \{0\}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, gdzie\ a \in R \backslash \{0\}\ \ i\ n \in N^+$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, gdzie\ a \cdot b \neq 0$$

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, gdzie\ a \in R^+, m \in N^+, n \in N^+ \backslash \{1\}$$

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

Jeżeli $m, n \in R\ \ i\ a, b \in R^+\ \ albo\ m, n \in C\ \ i\ a, b \in R\ \ i\ \ a \neq 0\ \ i\ b \neq 0, to$:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (mnożenie potęg o tych samych podstawach)

$a^m : a^n = a^{m-n}$ (dzielenie potęg o tych samych podstawach)

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ (mnożenie potęg o tym samym wykładniku)

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (dzielenie potęg o tym samym wykładniku)

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (potęgowanie potęgi)

Zadanie 1. Oblicz wartości potęg:

a) 5^{-2} $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $(0{,}2)^{-1}$ $(0{,}25)^{-3}$

b) $16^{\frac{1}{2}}$ $8^{\frac{1}{3}}$ $125^{\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{1}{25}\right)^{0{,}5}$ $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) $9^{-\frac{3}{2}}$ $27^{-\frac{1}{3}}$ $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$ $\left(1\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $(0{,}01)^{-1{,}5}$

Zadanie 2. Wykonaj działania:

a) $\frac{\left(2^0\cdot 2^{-1}\right)\cdot 3^{-2}}{(-5)^{-1}+1^{-1}}=$ b) $3^{-\frac{1}{4}}\cdot 27^{-\frac{1}{4}}=$ c) $\frac{\left(\frac{1}{4}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{8^2}=$

d) $\frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^7\right)^2}{27\cdot 9^3}$ e) $\frac{4^{-1}-3\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$ f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}:\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=$

Zadanie 3. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $8\cdot\sqrt[5]{2}=$ b) $27^2\cdot\frac{1}{9}:\sqrt{3}=$ c) $25^{-3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\sqrt{5}=$

d) $125^{-2}:5^3\cdot\sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt[3]{9}\cdot 3^{-2}\cdot\frac{1}{27}$ f) $\sqrt[4]{36}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$

Zadanie 4. Uzasadnij, że liczba $a=25^{16}$ jest 5 razy mniejsza od liczby $b=5^{10}\cdot 5^{11}\cdot 5^{12}$.

Zadanie 5. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}-2}\right)^{\sqrt{3}+2}$ b) $\left((\sqrt{8}-\sqrt{2})^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ c) $\left[(9-3\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}-(9+3\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}\right]^2$

Zadanie 6. Wykaż, że liczby $a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$ i $b=\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ są równe.

Temat: RÓWNANIA WYKŁADNICZE

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^4=\left(\frac{7}{6}\right)^x$ b) $9^x=27$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=125$

d) $4^x=\frac{1}{2}$ e) $25^x=\sqrt{5}$ f) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$

g) $\frac{1}{4}=8^x$ h) $4^{2x+5}=64$ i) $5^{3x-1}=125$

j) $2^{x-5}=\frac{1}{8}$ k) $2^{x^2-4x-5}=1$ l) $2^{2x}=256$

m) $\left(\sqrt{2}\right)^{x}=\frac{1}{32}$ n) $5^{2x+1}=5^{3x+2}$ o) $\sqrt{27}^{3x-2}=9^{5x-3}$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

a) $9^{12x+5}=9^{5x-2}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}$ $c)\ 3^{5x-8}=9^{x-3}$

$d)\ 5^{x^2+2}=5^{3x}$ e) $7^{x-4}=\sqrt{7}^{2x-3}$ $f)\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-2}$

Zadanie 3. Rozwiąż równania dokonując odpowiednich podstawień:

a) $7^x+7^{x-1}=56$ b) $3^{x+2}-3^x=24$

c) $5^{2x}-3\cdot 5^x-10=0$ d) $7\cdot 7^{2x}-8\cdot 7^x+1=0$

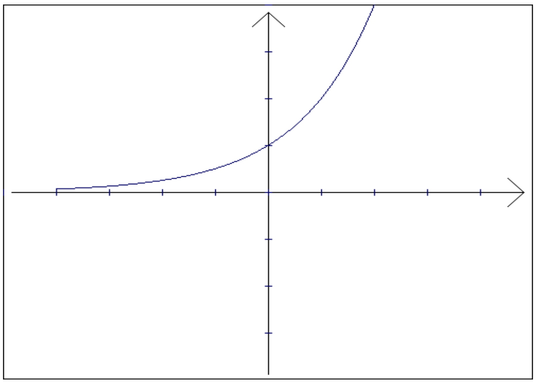
e) $2^{x-3}+2^x=18$ f) $5^{x+1}+5^x=1{,}2$

g) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$ h) $9^x-25\cdot 3^x-54=0$

Temat: WZÓR I WYKRES FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x)=a^x$, gdzie $x\in R$ oraz $a\in R^+\setminus\{1\}$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest **krzywa wykładnicza.** Aby naszkicować wykres funkcji wykładniczej zaznaczamy punkty o współrzędnych $(-1,\frac{1}{a}),\ (0,1),\ (1,a)$.



Zbiorem wartości funkcji wykładniczej $f(x)=a^x$ jest zbiór $Y_f = R^+$.

Funkcja wykładnicza jest :

- rosnąca, gdy a > 1,

- malejąca, gdy 0 < a < 1.

Asymptotą wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x)=a^x$ jest prosta o równaniu y = 0 (oś x).

Wykres każdej funkcji wykładniczej określonej wzorem $f(x)=a^x$ przechodzi przez punkt (0, 1) (bo $a^0=1$, gdy $a>0$)

Zadanie 1. Do wykresu funkcji wykładniczej należą punkty o podanych współrzędnych: $(-1,\dots)$, $(0,\dots)$, $(1,\dots)$. W miejsce kropek wstaw odpowiednie liczby i naszkicuj wykres funkcji, gdy:

a) $y=3^x$ b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y=5^x$ d) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Na podstawie wykresu omów:

- Dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
- Monotoniczność funkcji,
- Punkt przecięcia z osią y.

Zadanie 2. Do wykresu funkcji $y=a^x$ należy punkt A. Podaj wartość a, napisz wzór tej funkcji oraz określ, czy funkcja jest rosnąca, czy malejąca, gdy:

a) $A=(1,7)$ b) $A=(-1,\frac{1}{3})$ c) $A=(-1,8)$ $A=(2,\frac{1}{9})$

Zadanie 3. Spośród wzorów funkcji: $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x, y=6^x,\ y=\left(\frac{7}{6}\right)^x,\ y=\left(\sqrt{11}\right)^x, y=\left(\frac{\pi}{2}\right)^x,$ $y=\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$ wybierz te, które określają funkcje rosnące.

Zadanie 4. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $4^{\sqrt{3}},\ 4^{\frac{5}{2}},\ 4^0,\ 4^{2\sqrt{2}}$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^2, \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{10}{3}}, \left(\frac{1}{7}\right)^{\pi}, \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) $(0{,}2)^{-\sqrt{3}},\ (0{,}2)^{-\frac{2}{3}},\ (0{,}2)^{\frac{7}{3}},\ (0{,}2)^{10},\ (0{,}2)^{\sqrt{7}}$

Zadanie 5. Podaj współrzędne przecięcia się wykresów funkcji f i g, gdy:

$a)\ f(x)=4^x\ \ i\ \ g(x)=64^x$ $b)\ f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ \ i\ g(x)=27^x$

Zadanie 6. Oblicz argument x, dla którego funkcje $f\ i\ g$ przyjmują tę samą wartość, gdy:

$a)\ f(x)=9^x\ \ i\ \ g(x)=27^x$ b) $f(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^x\ \ i\ \ g(x)=64^x$

Zadanie 7. Funkcja $g(x)=a^x$, gdzie a jest rozwiązaniem równania $16x^2-33x+2=0$ jest malejąca. Oblicz g(-0,25).

Zadanie 8. Funkcja h określona jest wzorem $h(x)=9^x$. Zapisz liczbę $\frac{h(3)\cdot h(9)}{h(27)}$ w postaci 3^c, gdzie c jest liczbą całkowitą.

Zadanie 9. Punkt K=(a, b) jest punktem wspólnym wykresu funkcji $f(x) = 2^{x-3}$ i prostej o równaniu $x = 6$. Sprawdź, czy liczba $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ jest całkowita.

Temat: PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji $y = 2^x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = 1 + 2^x$ b) $y = -3 + 2^x$ c) $y = 2^{x-1}$
d) $y = 2^{x+2}$ e) $y = 2^{x+3} + 2$ f) $y = 2^{x-2} - 1$
e) $y = -2^x$ f) $y = 2^{-x}$ g) $y = |2^x|$

Dla każdej z tych funkcji określ:

- Dziedzinę i zbiór wartości,
- Miejsca zerowe,
- Równanie asymptoty poziomej.

Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji g, który jest obrazem wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ w przesunięciu względem osi układu współrzędnych o:

a) 2 jednostkę w lewo i 1 w górę b) 1 jednostki w prawo i 3 w dół

Zapisz wzór funkcji g oraz omów wskazane własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz równanie asymptoty poziomej.

Zadanie 3. Znajdź równanie asymptoty oraz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 5 + 4^x$ b) $f(x) = 4^{x-2}$ c) $f(x) = 0{,}1^{x+3} + 7$
d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ e) $f(x) = 3^x - 3$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 5$

Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji:
a) $f(x) = |3^x|$ b) $y = \left|\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}\right|$ c) $f(x) = |5^x - 3|$

Zadanie 5. Dane są funkcje: $f(x) = 2 + 3^x$, $g(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x - 5$, $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$, $k(x) = 6^{x+4}$.
Które z tych funkcji:
a) Są rosnące b) Mają asymptotę $y = 0$ c) Mają miejsca zerowe
d) Przecinają oś y e) Przyjmują tylko wartości dodatnie?

Temat: LOGARYTMY W ZADANIACH

Przypomnijmy:

Logarytmem liczby dodatniej b przy dodatniej podstawie a różnej od 1 nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b, co zapisujemy $c = \log_a b$.

Gdy $a > 0, a \neq 1 \quad i \quad b > 0, \quad to \quad \log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$

Jeśli $a \in R^+ \setminus \{1\} \quad i \quad b \in R^+$, to:

$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad a^{\log_a b} = b$

Własności działań na logarytmach

Jeżeli $a \in R^+ \setminus \{1\}, \ x, y \in R^+$, to :

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ (logarytm iloczynu)
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (logarytm ilorazu)
- $\log_a x^m = m \cdot \log_a x, \quad gdy\ m \in R.$ (logarytm potęgi)

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeżeli $a, c \in R^+ \setminus \{1\}, b \in R^+, \quad to \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a.}$

Uwaga: Logarytm o podstawie 10 nazywamy logarytmem dziesiętnym. Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$.

Zadanie 1. Oblicz wartości logarytmów:

a) $\log_2 8$ b) $\log 0{,}1$ c) $\log_{\sqrt{2}} 1$ d) $\log_2 2\sqrt{2}$

e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ g) $\log_3 27$ h) $\log_{\sqrt{2}} 32$

i) $\log 0{,}1$ j) $\log_2 \frac{1}{4}$ k) $\log_{\frac{1}{5}} 25$ l) $\log_3 \sqrt{3}$

m) $\log_{0,5} \sqrt{32}$ n) $\log_2 16\sqrt{8}$ o) $\log_6 \sqrt[3]{36}$ p) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$

Zadanie 2. Znajdź x, jeśli:

$a)$ $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$ $b)$ $\log_{16} x = \frac{1}{4}$ c) $\log_8 x = \frac{1}{3}$

d) $\log_x \frac{1}{9} = 2$ e) $\log_x \frac{1}{8} = -1$ f) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

Zadanie 3. Wykonaj działania:

a) $\log_6 2 + \log_6 18$ b) $\log_5 20 - \log_5 4$ c) $\log 40 + 2\log 5$

d) $2\log_2 5 + \frac{1}{2}\log_2 9$ e) $\log_2 5 - \frac{1}{3}\log_2 1000$ f) $\log 0{,}2 - 2log\sqrt{2}$

g) $10^{\log 5}$ h) $25^{\log_5 2}$ i) $49^{\log_7 3}$

Zadanie 4. Rozwiąż równanie (pamiętaj o dziedzinie):

$a)\ \log_3(x-1)=1$ $\qquad$ $b)\ \log_2(x+5)=\log_2 3$

$c)\ \log_3(\log_4 x)=1$ $\qquad$ $d)\ \log_4(x+3)+\log_4(x-3)=2$

e) $\log_5(\log_2 x)=1$ $\qquad$ f) $\log_2(\log_3 x) = 2$

Zadanie 5. Oblicz $log_3(2 + log_4 0{,}25)$.

Zadanie 6. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x + \log_5 3 > \log_5 75$.

Zadanie 7. Uzasadnij, że poniższe liczby są całkowite.

a) $7^{\log 4} \cdot 7^{\log 250}$ $\qquad$ b) $\log_6(\log_{64} 8) + \log_6(\log_{64} 4)$

c) $\frac{log^2 4 - log^2 25}{2(\log 2 - \log 5)}$ $\qquad$ d) $\frac{2^{\log_3 63}}{2^{\log_3 7}}$

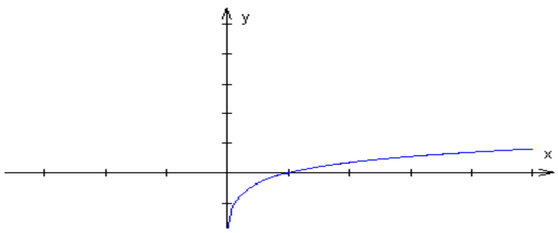
Zadanie 8. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a spełniające równość $\log_{1-2a}(a + 7) = 2$.

Temat: WZÓR I WYKRES FUNKCJI LOGARYTMICZNEJ

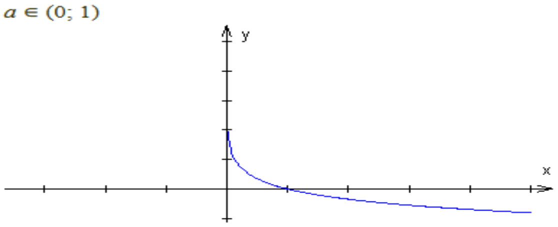
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję f określona wzorem $f(x)=\log_a x$, gdzie $x>0$ oraz a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1.

Wykresem funkcji logarytmicznej jest **krzywa logarytmiczna.**

$a > 1$



$a \in (0; 1)$



Aby naszkicować wykres funkcji logarytmicznej zwykle zaznacza się punkty o współrzędnych $\left(\frac{1}{a},-1\right)$, $(1{,}0)$, $(a{,}1)$.

Uwaga:

• $x>0\ i\ a\in R^{+}\setminus\{1\},\ to\quad \log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x.$

• Wykresy funkcji wykładniczej i logarytmicznej o tych samych podstawach, czyli funkcji określonych wzorami $y=a^x$ i $y=\log_a x$ są symetryczne względem prostej o równaniu $y=x$. Funkcje te nazywamy **funkcjami odwrotnymi.**

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y=\log_3 x$ b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

c) $y=\log_2 x$ d) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$

Dla każdej z funkcji podaj:

- dziedzinę,
- zbiór wartości,
- miejsce zerowe,
- monotoniczność funkcji.
- równanie asymptoty pionowej

Zadanie 2. Dana jest funkcja $y=\log_a x$. Sprawdź, czy punkt P leży na wykresie tej funkcji, gdy:

a) $a=2,\ P=(8,3)$ b) $a=\frac{1}{3},\ P=(\frac{1}{27},-3)$

c) $a=2\sqrt{2},\ P=(32,\ 3\frac{1}{3})$ d) $a=\frac{3}{4},\ P=(1\frac{7}{9},-3)$

Zadanie 3. Do wykresu funkcji określonej wzorem $y=\log_a x$ należy punkt P. Oblicz a, jeżeli:

a) $P=(32,5)$ b) $P=(\frac{1}{81},4)$

c) $P=\left(\frac{1}{2},-1\right)$ $d)$ $P=\left(5,\frac{1}{3}\right)$

Zadanie 4. Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej (rosnąco):

a) $\log_{\frac{1}{6}}\frac{3}{4}$, $\log_{\frac{1}{6}}\sqrt{3}$, $\log_{\frac{1}{6}}1$. b) $\log_4 3$, $\log_4\frac{1}{3}$, $\log_4 5$, $\log_4 0{,}1$

c) $\log_3 4, \log_{\frac{1}{3}} 4, \log_5 4, \log_{0,1} 4$ d) $\log_4\pi$, $\log_4\sqrt{16}$, $\log_4\frac{1}{3}$.

Zadanie 5. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(1-2x)$ b) $f(x)=\log_3(x^2-1)$

$c)$ $f(x)=\log_5(3x-7)$ $d)$ $f(x)=\log_3(x^2-4x)$

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}[(x+5)(3x-6)]$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}[(2x+4)(x-1)]$

g) $f(x) = \log_{0,1}(x^2 - 6x + 5)$

h) $f(x) = \log(x-3) + \log(8-x)$

i) $f(x) = \log_x(3x-1)$

j) $f(x) = \log_{(2x-1)} x$

Temat: PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI LOGARYTMICZNEJ

Zadanie 1. Podaj wzór i naszkicuj wykres funkcji g wiedząc, że jest on obrazem wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $y = \log_2 x$:

a) w przesunięciu o 1 jednostkę w lewo względem osi OX i 2 w górę względem osi OY

b) w przesunięciu o 2 jednostkę w prawo względem osi OX i 3 w dół względem osi OY

c) w symetrii osiowej o oś x

d) w symetrii osiowej o oś y

Zadanie 2. Oblicz miejsce zerowe funkcji $y = f(x)$. Określ jej dziedzinę, napisz równanie asymptoty pionowej wykresu funkcji f i naszkicuj jej wykres, gdy:

a) $f(x) = 3 + \log_2 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

c) $f(x) = \log_5 x - 4$

d) $f(x) = \log_4(x+1)$

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4) + 3$

f) $f(x) = -\log_2 x$

Temat: WZROST I ZANIK WYKŁADNICZY

Wykładniczy proces zmiany opisuje funkcja określona wzorem $y = y_0 \cdot a^t$, gdzie:

t – czas, jaki upłynął od momentu rozpoczęcia obserwacji, czyli czasu $t_0 = 0$

a – stała wielokrotność zmiany

y_0 – wartość początkowa obserwowanego zjawiska.

Jeżeli $y = f(t)$, to $f(t) = f(t_0) \cdot a^t$, gdzie $f(t_0)$ jest wartością początkową obserwowanego zjawiska, a t_0 jest momentem rozpoczęcia obserwacji.

Obserwując proces zmiany zjawiska w czasie, staramy się ustalić wartość a we wzorze $f(t) = f(t_0) \cdot a^t$

Uwaga: Jeśli w ciągu określonej jednostki czasu t nastąpiło

- podwojenie wartości początkowej $f(t_0)$, to $a = 2$
- zmniejszenie o połowę wartości początkowej, to $a = \frac{1}{2}$
- zmniejszenie o jedną trzecią wartości początkowej, to $a = \frac{2}{3}$
- zwiększenie o 6% wartości początkowej, to $a = 1,06$
- zmniejszenie o 10% wartości początkowej, to $a = 0,9$

Zadanie 1. Czas połowicznego rozpadu pierwiastka to okres, jaki jest potrzebny, by ze 100% pierwiastka pozostało 50% tego pierwiastka. Oznacza to, że ilość pierwiastka pozostała z każdego grama pierwiastka po x okresach rozpadu połowicznego wyraża się wzorem $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. W przypadku izotopu jodu ^{131}I czas połowicznego rozpadu jest równy 8 dni. Wyznacz najmniejszą liczbę dni, po upływie których pozostanie z 1 g ^{131}I nie więcej niż 0,125 g tego pierwiastka.

Zadanie 2. Podczas pewnego doświadczenia liczba bakterii, których początkowo było 600, podwajała się w ciągu pół godziny.
a) uzasadnij, że funkcja $f(t) = 600 \cdot 4^t$ opisuje liczbę bakterii w zależności od czasu t mierzonego w godzinach,
b) uzupełnij tabelę.

Czas t [h]	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Liczba bakterii								

Zadanie 3. W pewnym doświadczeniu badano liczebność kolonii bakterii. Zgodnie z modelem teoretycznym liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą. Wyznacz stałą a, jeśli początkowo było 1500 bakterii, a po 8 godzinach ich liczba wzrosła do 24000. Po jakim czasie liczebność kolonii bakterii będzie równa 96000?

Zadanie 4. Zaobserwowano, że liczba klientów pewnego sklepu w ciągu ostatnich 8 lat powiększała się co roku o 3%. Zakładając, że ten proces w ciągu następnych lat nie ulegnie zmianie oraz że obecnie klientela sklepu to 5000 osób:
a) Napisz wzór wyrażający zależność liczby klientów sklepu od liczonego w latach czasu t,
b) Oblicz, ile klientów może być w sklepie za 5 lat.

Zadanie 5. Zaobserwowano, że liczba zajęcy w pewnym lesie w ciągu 5 lat powiększała się co roku o 2%. Zakładając, że proces ten w następnych latach nie ulegnie zmianie oraz że obecnie w lesie jest 1200 zajęcy:
a) Napisz wzór wyrażający zależność liczby zajęcy w stawie od liczonego w latach czasu t.
b) Oblicz, ile zajęcy może być w tym lesie za 5 lat.

Zadanie 6. Liczba bakterii w pewnej kolonii powiększa się co godzinę o 25%. Kolonia ta o godzinie 15^{00} liczyła 1 000 000 komórek.

a) Napisz wzór opisujący liczbę bakterii kolonii w zależności od czasu t
b) Oblicz, ile bakterii będzie liczyła kolonia o godzinie 18^{00}.

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ wykonywać działania na potęgach:
  - obliczać wartości potęg o wykładniku wymiernym,
  - stosować własności działań na potęgach,
  - zapisywać wyrażenie w postaci jednej potęgi.
- ✓ wykonywać działania na logarytmach:
  - obliczać wartości logarytmów,
  - stosować własności działań na logarytmach
- ✓ rozwiązywać równania wykładnicze i logarytmiczne,
- ✓ szkicować wykres funkcji wykładniczej i omówić jej własności:
  - dziedzinę i zbiór wartości,
  - miejsca zerowe,
  - monotoniczność,
  - równanie asymptoty poziomej
- ✓ szkicować wykres funkcji logarytmicznej i omówić jej własności:
  - dziedzinę i zbiór wartości,
  - miejsca zerowe,
  - monotoniczność,
  - równanie asymptoty pionowej.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $27^{-3} : \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \sqrt{3}$ b) $125^{-2} \cdot \frac{1}{25} : \sqrt{5} =$

Zadanie 2. Rozwiąż równania:

a) $5^{2x+1} = 5^{3x+2}$ b) $4^{2x+5} = 64$

c) $2^{x^2-4x-5} = 1$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}$

Zadanie 3. Oblicz wartości logarytmów:

a) $\log_8 64$ b) $\log_4 256$ c) $\log_5 \frac{1}{125}$

d) $\log_5 0{,}008$ e) $\log_3 \frac{1}{27}$ f) $\log_5 \sqrt[3]{25}$

Zadanie 4. Oblicz x, wiedząc że:

a) $\log x = \log 4 + \log 5 + \log 6$ b) $\log x = 2\log 3 + \log 4$

Zadanie 5. Oblicz x, gdy:

a) $\log_{\frac{1}{6}} x = 3$ b) $\log_x 625 = 2$

c) $\log_x \frac{1}{81} = -4$ d) $\log_3(x^2 + 1)=2$

Zadanie 6. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste p spełniające równość $9^{\log_3(p-1)} = 4$.

Zadanie 7. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ oraz określ dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe i równanie asymptoty , jeśli:

a) $f(x) = 3^{x+2} - 1$ b) $f(x) = \log_4(x+3) - 2$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Funkcja $g(x) = (0{,}4)^x$ dla argumentu $x = -1$ przyjmuje wartość:

A. -0,4 B. 0,8 C. 2,5 D. 4

Zadanie 2. Funkcja $g(x) = 8^x$ dla argumentu $x = -\frac{2}{3}$ przyjmuje wartość:

A.4 B. 2 C. 0,5 D. 0,25

Zadanie 3. Punktem wspólnym wykresu funkcji $y = 5^x$ i osi OY jest punkt

A.(0,0) B. (-1,0) C. (0,1) D. (0,5)

Zadanie 4. Do wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ należy punkt

A.$\left(1\frac{1}{2}, 4\right)$ B. $\left(1\frac{1}{2}, 6\right)$ C. $\left(1\frac{1}{2}, 8\right)$ D. $\left(1\frac{1}{2}, 12\right)$

Zadanie 5. Do wykresu funkcji $f(x) = 0{,}5^x$ należy punkt

A.$(-1{,}5)$ B. $(0; 0{,}5)$ C. $(2{,}25)$ D. $(-2{,}4)$

Zadanie 6. Funkcja $f(x) = 2^x$ **nie** przyjmuje wartości:

A.2010 B. $\sqrt{3}$ C. $-2\sqrt{2}$ D. $5^{-5\sqrt{5}}$

Zadanie 7. Dziedziną funkcji $g(x) = (0{,}2)^x$ jest zbiór:

A.R B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(1{,}2; +\infty)$

Zadanie 8. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^x$ jest zbiór:

A.$(0, +\infty)$ B. (0,1) C. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{4}{9}, +\infty\right)$

Zadanie 9. Wskaż wzór funkcji, która jest rosnąca:

A. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ B. $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ C. $f(x) = \left(\frac{6}{5}\right)^x$ D. $f(x) = \left(\frac{7}{8}\right)^x$

Zadanie 10. Funkcja $f(x) = 3^x$

A. Jest malejąca i ma miejsce zerowe

B. Jest malejąca i nie ma miejsc zerowych

C. Jest rosnąca i ma miejsce zerowe

D. Jest rosnąca i nie ma miejsc zerowych

Zadanie 11. Liczba punktów wspólnych wykresu funkcji $f(x) = 3^x$ i prostej o równaniu y = 0 jest:

A. równa 0 B. równa 1 C. równa 2 D. większa od 2

Zadanie 12. Wykres funkcji $f(x) = 4^{x-1,5}$ przecina oś OY w punkcie:

A. (0; 0,125) B. (1,5; 0) C. (0; -1,5) D. (0; 0,5)

Zadanie 13. Miejscem zerowym funkcji $f(x) = 25^{x-1} - 5$ jest:

A. 0 B. 0,5 C. 1 D. 1,5

Zadanie 14. Wskaż funkcję, która ma miejsce zerowe:

A. $f(x) = -3^x$ B. $f(x) = 3^{x-2}$ C. $f(x) = 3^x + 1$ D. $f(x) = 3^x - 2$

Zadanie 15. Wiemy, że $log_2 a = \sqrt{2}$ i $log_2 b = -\sqrt{2}$. Zatem liczbą niewymierną jest liczba:

A. $log_2 ab$ B. $log_2 \sqrt{2} ab$ C. $\frac{log_2 a}{log_2 b}$ D. $log_2 \frac{a}{b}$

Zadanie 16. Dane są liczby: $x = log_3 9$, $y = log_{16} \frac{1}{4}$, $z = log_{\frac{1}{5}} 25$, $t = log_4 2$. Najmniejszą spośród tych liczb jest:

A. x B. y C. z D. t

Zadanie 17. Liczba $log_2(log 20 + log 5)$ jest równa:

A. 5 B. 2 C. 1 D. 0

Zadanie 18. Jeżeli $log 2 = 0{,}30$, to wartość $log 32$ jest równa:

A. $16 \cdot 0{,}30$ B. $5 \cdot 0{,}30$ C. $8 \cdot 0{,}30$ D. $10 \cdot 0{,}30$

Zadanie 19. Jeżeli $a = log_7 40$ i $b = 4$, to suma $a + b$ należy do przedziału:

A. (3,4) B. (4,5) C. (5,6) D. (6,7)

Zadanie 20. Jeżeli $log_2 a = 4$ i $log_4 b = 2$, to wartość wyrażenia $\sqrt{ab}$ jest równa:

A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

Zadanie 21. Jeżeli $log2 = a \ i \ log3 = b$, to $log6$ jest równy:

A.ab B. $a + b$ C. $a - b$ D. $\frac{a}{b}$

Zadanie 22. Jeżeli $log9 = 0{,}95$, to wartość $log900$ jest równa:

A.95 B. $2 \cdot 0{,}95$ C. $2 + 0{,}95$ D. 0,95

11. CIĄGI LICZBOWE

Temat: POJĘCIE CIĄGU LICZBOWEGO I SPOSOBY JEGO OKREŚLANIA

Ciągiem liczbowym skończonym nazywamy funkcję a określona w zbiorze liczb {1, 2, …, n} o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych i oznaczamy $(a_1, a_2, ..., a_n)$ lub $(a_k)_{k=1}^{n}$.

$a_1, a_2, ..., a_n$ - wartości ciągu nazywane wyrazami ciągu liczbowego

a_n - n -ty wyraz ciągu lub wyraz ogólny ciągu

Ciągiem liczbowym nieskończonym nazywamy funkcję a określona na zbiorze liczb Naturalnych dodatnich N^+ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych R i oznaczamy $(a_1, a_2, a_3 ...)$ lub (a_n).

$a_1, a_2, a_3 ...$ - kolejne wyrazy ciągu (a_n)

a_n - n -ty wyraz ciągu (a_n)

Każdy ciąg liczbowy jest funkcją, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich (ciąg nieskończony) lub jego podzbiór (ciąg skończony).

Ciąg można określić między innymi poprzez:
- podanie wzoru ogólnego na n –ty wyraz ciągu,
- podanie wszystkich wyrazów ciągu, jeżeli jest to ciąg skończony,
- podanie wzoru na sumę jego n początkowych wyrazów,
- podanie jego pierwszego wyrazu lub kilku początkowych wyrazów i reguły wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu w zależności od poprzednich.

Sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) nazywamy wyrażenie $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$, gdzie $n \in N^+$.

Między sumą n początkowych wyrazów ciągu, a wzorem na n-ty wyraz ciągu zachodzi zależność:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Zadanie 1. Naszkicuj wykres ciągu o podanych wyrazach:

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, … $b)\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \ldots$

$c)\ 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots$ d) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

Zadanie 2. Odgadnij regułę, według której powstają kolejne wyrazy ciągu i uzupełnij:

$a)\ 2, 4, 6, \quad , \quad , 12, 14, \ldots$ $c)\ 1, \quad , \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \quad , \frac{1}{729}, \ldots$

$b)\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \quad , \frac{1}{5}, \quad , \ldots$ $d)\ 1, -4, 9, -16, \quad , \quad , 49, -64, \ldots$

Zadanie 3. Podaj cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n):

$a)\quad a_n = 3n - 2$ $b)\quad a_n = n^2$

$c)\quad a_n = n^3 - n^2$ $d)\quad a_n = (-1)^n \cdot 2^n$

$e)\ a_n = |n-2|$ f) $a_n = 4n + 1$

Zadanie 4. Podaj sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n):

$$a)\ a_n = \begin{cases} n & dla\ n\ nieparzystych \\ \frac{1}{n} & dla\ n\ parzystych \end{cases}$$

$$b)\ a_n = \begin{cases} n^2 & dla\ n\ nieparzystych \\ (-1)^n \cdot n^2 & dla\ n\ parzystych \end{cases}$$

Zadanie 5. Ciąg (a_n) podany jest wzorem rekurencyjnym. Wyznacz wyrazy drugi, trzeci i czwarty tego ciągu:

$a)\ \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1\ dla\ n \geq 1 \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 + a_n\ dla\ n \geq 1 \end{cases}$

Zadanie 6. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (wzór ogólny ciągu) o podanych wyrazach:

$a)\ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ $b)\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ $c)\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

d) -2, -4, -6, -8, …   e*)* 5, 8, 11, 14, 17,…   f) 1, 4, 9, 16, 25,…

$g)\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$ h) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

Zadanie 7. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

$a)\ a_n = (n-3)(n+2)$ $b)\ a_n = -2n + 6$

$c)\ a_n = n^2 - 6n + 5$ *d)* $a_n = \dfrac{n^3 - 9n^2 + 14n}{n^2 + 4}$

Zadanie 8. Rozstrzygnij, czy liczba 20 jest wyrazem nieskończonego ciągu (a_n), jeśli:

a) $a_n = 4n - 2$

b) $a_n = \dfrac{4n-8}{n+2}$

c) $a_n = 4n^2 - 16$

d) $a_n = \dfrac{n}{2} + 8$

Zadanie 9. Wyznacz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n), wiedząc, że suma n początkowych wyrazów tego ciągu dana jest wzorem:

a) $S_n = 5n(n-2)$

b) $S_n = (-1)^n \cdot n^2$

Zadanie 10. Oblicz dwudziesty wyraz ciągu (a_n), wiedząc, że suma n jego początkowych wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n = \dfrac{2n(n-1)}{3}$

b) $S_n = 2n^2 + n$

Temat: MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU LICZBOWEGO

Ciąg liczbowy (a_n) jest:

- rosnący, gdy $a_{n+1} - a_n > 0$,
- niemalejący, gdy $a_{n+1} - a_n \geq 0$
- malejący, gdy $a_{n+1} - a_n < 0$
- nierosnący, gdy $a_{n+1} - a_n \leq 0$.
- stały, gdy $a_{n+1} - a_n = 0$

Zadanie 1. Określ monotoniczność ciągu o podanych wyrazach:

$a)$ $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \ldots$

$b)$ $-1, -1, -2, -2, -3, -3, -4, -4, \ldots$

$c)$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

d) 2, 4, 6, 8, 10,…

e) 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8,…

f) 5, 5, 5, 5, 5, 5, …

Zadanie 2. Wykaż, że ciąg $\left(a_n\right)$ jest rosnący:

$a)$ $a_n = 2n - 4$

b) $a_n = 4 - 2n$

$b)$ $a_n = \frac{n^2}{2}$

Zadanie 3. Wykaż, że ciąg $a_n = n - n^2$ jest malejący:

Zadanie 4. Wykaż, że ciąg $a_n = 5 - 3n$ jest malejący:

Zadanie 5. Wykaż, że ciąg $a_n = 3n - n^2$ jest nierosnący:

Temat: CIĄG ARYTMETYCZNY I JEGO WŁASNOŚCI

Ciągiem arytmetycznym (a_n) nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu.
W ciągu arytmetycznym (a_n) **różnica r** określona jest wzorem
r = $a_{n+1} - a_n$, gdzie $n \in N^+$.

Od różnicy r ciągu arytmetycznego (a_n) zależy jego **monotoniczność**. Jeżeli
r > 0, to ciąg (a_n) jest **rosnący,**
r < 0, to ciąg (a_n) jest **malejący**,
r = 0, to ciąg jest **stały.**

Jeżeli w ciągu arytmetycznym (a_n) wyrazem pierwszym jest a_1 i różnicą jest r, to ciąg ten określony jest wzorem $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n, nie mniejszej niż 2, spełniony jest warunek $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.
Wyznaczyć ciąg arytmetyczny (a_n) to znaczy znaleźć jego wyraz pierwszy a_1 i różnicę r.

Zadanie 1. Podaj różnicę poniższego ciągu arytmetycznego. Wypisz jego dwa następne wyrazy:

a) 3, 12, 21,…..,…..,….

b) $1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 3,...$ ..,……,…..

c) 7, 3, -1, …..,……,….

d) $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2},...$

Zadanie 2. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) i określ jego monotoniczność:

a) $a_n = 6 - 7n$

b) $a_n = 2n + 5$

c) $a_n = \dfrac{5n-1}{2}$

d) $a_n = \dfrac{2+3n}{4}$

Zadanie 3. Wyznacz wzór ogólny podanego ciągu arytmetycznego. Oblicz setny wyraz tego ciągu:

a) 1, 3, 5, 7, …

b) $6, 6\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3}, 7, 7\frac{1}{3},...$

c) 6, 2, -2, -6, -10,…

d) 4, 1, -2, -5, …

Zadanie 4. Oblicz wskazane wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli r jest jego różnicą.

a) $a_1 = -10,\ r = 3,\ a_5 = ?,\ a_{10} = ?$

b) $a_1 = 5,\ r = -\frac{2}{3},\ a_7 = ?,\ a_{13} = ?$

Zadanie 5. Uzupełnij tak, aby otrzymać kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego:

a) 18, ….. , 32

b) -7, ….. , -19

c) 10, ….. , ….. , 34

d) 5, ….. , ….. ,32

e) 34, ….. ,…… ,….. , 10

f) ….., 2, ….., ……, ……, 14

g) ….. , ….. , ….. , 18, ….. , 19

h) 10, ….. , ….. , …… , ……, ….., 34

Zadanie 6. Oblicz a_{19} i a_{28} ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli r jest różnicą tego ciągu:

a) $a_1 = 14, r = -3$

b) $a_1 = -2, r = \frac{1}{6}$

c) $a_1 = 12, r = -\frac{1}{3}$

Zadanie 7. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego:

a) 8, 5, 2, … , -25

b) 6, 10, 14, …, 42

c) -5, -2, 1, 4, … , 286

d) $6, 5\frac{1}{2}, 5, 4\frac{1}{2}, ..., -18\frac{1}{2}$

Zadanie 8. Oblicz a_1 i r ciągu arytmetycznego (a_n):

a) $a_2 = -7, a_8 = 11$

b) $a_9 = 60, a_{21} = 0$

c) $a_4 = 1\frac{2}{3}, a_{11} = 4$

d) $a_2 = -6,\ a_8 = 54$

e) $a_3 = 0,\ a_8 = 15$

f) $a_7 = -2,\ a_{13} = 2$

Zadanie 9. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego poniższe warunki:

$a)\begin{cases} a_5 = -13 \\ a_{11} = -31 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_3 = 7 \\ a_5 = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_4 = -8 \end{cases}$

$d)\begin{cases} a_1 + a_4 = 12 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 27 \end{cases}$

Zadanie 10. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym:

a) $a_n = \frac{1}{2}n - 5$

b) $a_n = \sqrt{3}n + 1$

c) $a_n = -5n + 9$

d) $a_n = \frac{3-5n}{2}$

Zadanie 11. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj różnicę tego ciągu:

$a)\ x+1,\ 4x-1,\ 3x+5$ $\quad$ $b)\ 3x+3,\ 4x-1,\ 5x-4$

c) $-x,\ 3x+1, -6-x$ $\quad$ d) $2x+5, 4, 3x+2$

e) $x+3, x^2, 4x$ $\quad$ f) $x^2-1,\ (x+1)^2, 4x^2+1$

Zadanie 12. Oblicz, ile jest liczb naturalnych:

a) czterocyfrowych,

b) podzielnych przez 6 i należących do przedziału <7;126>

c) dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3.

Temat: SUMA POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określona jest wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Zadanie 1. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:

a) $a_1 = 3,\ r = -2,\ n = 10$ $\quad$ b) $a_1 = -4,\ r = 3,\ n = 20$

c) $a_1 = 21,\ r = -5,\ n = 15$ $\quad$ d) $a_1 = 1{,}5,\ r = 2,\ n = 30$

Zadanie 2. Oblicz sumę szesnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

a) 3, 7, 11, 15, 19,… $\quad$ b) $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$

c) 13, 10, 7, 4, 1,… $\quad$ d) -6, -4, -2, 0, 2, 4, …

Zadanie 3. Oblicz sumę trzydziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem:

$a)\ a_n = 3n-4$ $\quad$ $b)\ a_n = -4n+1$

c) $a_n = 2n+7$ $\quad$ c) $a_n = 3-5n$

Zadanie 4. Oblicz sumę, której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego:

a) 6 + 11 + 16 + … + 101 $\quad$ b) 1 + 3 + 5 + …+201

c) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{7}{3} + \ldots + \frac{25}{3}$ $\quad$ d) $5\frac{1}{2} + 6 + 6\frac{1}{2} + \ldots + 21$

Zadanie 5. Oblicz sumę wszystkich liczb:

a) dwucyfrowych podzielnych przez 3 $\quad$ b) czterocyfrowych nieparzystych

c) dwucyfrowych podzielnych przez 7 $\quad$ d) trzycyfrowych parzystych

Zadanie 6. Podaj wzór na n- ty wyraz ciągu (a_n), którego suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n = \frac{n+1}{2}$ b) $S_n = -3n^2 + 6n$

c) $S_n = \frac{n}{3n+1}$ d) $S_n = n^2$

Zadanie 7. Wyznacz dla ciągu arytmetycznego (a_n):

a) liczbę n wyrazów, gdy $S_n = 204, r = 6, a_n = 49$

b) różnicę r, gdy $S_n = 518, a_1 = 50, n = 14$

c) wyraz pierwszy a_1 , gdy $r = -2$ i $S_{23} = -598$.

Zadanie 8. Zakładając, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, oblicz brakujące dane w tabeli:

a_1	r	n	a_n	S_n
2	-3	7		
3		2	17	
2			20	110
-5	2			0
		7	25	21

Zadanie 9. Rozwiąż równanie przyjmując, że jego lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego:

a)2 + 5 + 8 +…+ x = 392 b) 1 + 2 + 3 + … + x = 78

c) 1 + 3 + 5 + … + x = 81 d) 6 + 10 + 14 + …+(4n + 2) = 20400

Temat: CIĄG ARYTMETYCZNY – ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ TEKSTOWYCH

Zadanie 1. Cegły ułożono w stos tak, że w pierwszej dolnej warstwie jest ich 85, w drugiej 79, w trzeciej 73 itd.

a) ile jest cegieł w 12 warstwie?

b) Ile jest cegieł w dwunastu dolnych warstwach stosu?

Zadanie 2. Pewien pan spłacił dług w wysokości 5100 zł w dwunastu ratach, z których każda była mniejsza od poprzedniej o 50 zł. Ile wynosiła pierwsza, a ile ostatnia rata?

Zadanie 3. Pewna firma specjalizująca się w kopaniu studni oferuje klientom następujący sposób obliczenia kosztu robót ziemnych: wykopanie pierwszego metra głębokości studni kosztuje 300 złotych, a wykopanie każdego następnego metra studni kosztuje o 30zł więcej niż poprzedniego metra. Sprawdź, czy 7500 złotych wystarczy na wykopanie studni głębokości 15 metrów.

Zadanie 4. Stadion sportowy ma miejsca dla kibiców ułożone w rzędach. W pierwszym rzędzie jest 40 miejsc, w drugim 42, w trzecim 44 itd. aż do dziesiątego rzędu. Dalej jest jeszcze 10 rzędów po 100 miejsc w każdym. Ile jest miejsc dla kibiców na tym stadionie?

Zadanie 5. Miary kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica wynosi 5°. Najmniejszy kąt ma miarę 120°. Wyznacz liczbę boków wielokąta.

Zadanie 6. Ania przeczytała książkę w ciągu 13 dni przy czym każdego dnia czytała o taka sama liczbę stron więcej niż w dniu poprzednim. Ile stron miała ta książka, jeżeli wiadomo ze w trzecim dniu Ania przeczytała 28 stron a w ostatnim 68 stron?

Zadanie 7. Dachówki ułożone są na jednej połaci dachu w 16 rzędach. Najniższy rząd składa się ze 130 dachówek a w każdym następnym rzędzie leży o 5 dachówek mniej niż w rzędzie poprzednim. Ile dachówek leży w najwyższym rzędzie? Ile dachówek leży na całej połaci dachu?

Zadanie 8. Koszt wykopania pierwszego metra studni wynosi 100 zł. Za wykopanie każdego kolejnego metra trzeba zapłacić o 10 zł więcej niż za wykopanie poprzedniego. Oblicz koszt wykopania 15 metrów studni.

Zadanie 9. Jurek ma zamiar kupić drukarkę do komputera za 300 zł. Postanowił, że z otrzymywanych od rodziców co miesiąc pieniędzy na własne wydatki będzie systematycznie odkładał pewną kwotę. W pierwszym miesiącu odłożył 20 zł, a w każdym następnym o 5 zł więcej niż w poprzednim miesiącu. Po ilu miesiącach oszczędzania Jurek będzie mógł kupić drukarkę?

Zadanie 10. Pani Ewa wpłaciła na konto swego syna Szymona 150 zł w dniu jego pierwszych urodzin. Na każde następne urodziny wpłacała o 50 zł więcej niż w roku poprzednim.
a) jaką kwotę pieniędzy wpłaci na konto syna w dniu jego osiemnastych urodzin?
b) jak będzie suma wpłat w dniu osiemnastych urodzin Szymona, licząc również wpłatę w tym dniu?

Zadanie 11. Tomek kupuje komputer na raty. Oblicz, na ile rat została rozłożona spłata, jeśli Tomek wpłacił na początku 800 zł, pierwsza rata wynosiła 195 zł, każda następna jest o 5 zł mniejsza, a opłata za komputer wynosi w sumie 3750 złotych.

Temat: CIĄG ARYTMETYCZNY – POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ podać przykład ciągu arytmetycznego,
- ✓ wskazać pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego, mając dane:
  - wzór ogólny ciągu,
  - kilka jego początkowych wyrazów,
  - dwa dowolne wyrazy ciągu,
- ✓ obliczyć dowolny wyraz ciągu, mając dany pierwszy wyraz i różnicę,
- ✓ wyznaczyć ilość wyrazów podanego ciągu arytmetycznego,
- ✓ zapisać wzór ogólny ciągu arytmetycznego , mając dane pierwszy wyraz i różnicę ciągu,
- ✓ stosować wzór na wyraz środkowy ciągu arytmetycznego,
- ✓ obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego znając:
  - pierwszy i ostatni wyraz ciągu
  - pierwszy wyraz i różnicę ciągu.
- ✓ stosować wzory na ogólny wyraz i sumę ciągu arytmetycznego do rozwiązywania zadań.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Który z podanych układów liczb jest ciągiem arytmetycznym?

A) $\frac{2}{3},\frac{5}{6},\frac{8}{9}$ B) $\sqrt{3},3\sqrt{3},5\sqrt{3}$ C) $2,4,8$ D) $3,-6,9$

Zadanie 2. Ciąg (-3, 2, 7,...) jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz dwudziesty piąty wyraz tego ciągu.

Zadanie 3. Ile wyrazów ma ciąg arytmetyczny (11, 19, 27,…, 83)?

Zadanie 4. Podaj różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_{13} = -10,\ a_{21} = 6$.

Zadanie 5. Wyznacz ciąg arytmetyczny, w którym $a_5 = 36,\ a_{26} = 6$.

Zadanie 6. Liczby x - 2, 3, x + 6 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Zadanie 7. Sprawdź, czy liczby $2-3\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}+2}, 2+\sqrt{3}$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Zadanie 8. Oblicz sumę:

a) 12-tu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 9, r = -2$

b) trzydziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $a_n = 8 - 5n$.

Zadanie 9. Oblicz, ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 8.

Zadanie 10. Między liczby 304 i 80 wstaw takie trzy liczby, aby łącznie z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny.

Zadanie 11. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli przeciwprostokątna jest długości 54cm.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 5n + 6.$ Wyrazy ciągu równe zero to:

A. $a_2 \ i \ a_7$ B. $a_6 \ i \ a_8$ C. $a_3 \ i \ a_6$ D. $a_2 \ i \ a_3$

Zadanie 2. Liczba 0,5 jest trzecim wyrazem ciągu (a_n) danego wzorem:

A. $a_n = \frac{n^2 - 3}{n}$ B. $a_n = \left(\sqrt{5}\right)^n - \sqrt{5}$ C. $a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ D. $a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

Zadanie 3. Ile wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = 2(n-1)+1$ należy do przedziału (-2, 8)?

A.4 B. 5 C. 8 D. 9

Zadanie 4. Ciąg o wzorze $a_n = 3 - 5n$ jest ciągiem:

A. rosnącym B. malejącym C. stałym D. niemonotonicznym

Zadanie 5. Ciąg $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$,... można opisać wzorem:

A. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ B. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$ C. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ D. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$

Zadanie 6. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = (-1)^n \cdot (n^2 - 2n)$. Wtedy:

A. $a_3 > 3$ B. $a_3 = 3$ C. $a_3 < 2$ D. $a_3 = 2$

Zadanie 7. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$. Wtedy.

A. $a_3 = -81$ B. $a_3 = -27$ C. $a_3 = 0$ D. $a_3 > 1$

Zadanie 8. Który z podanych ciągów jest arytmetyczny?

A. $a_n = n^2 - 3$ B. $a_n = (-1)^n (n+1)$ C. $a_n = \dfrac{n}{n+2}$ D. $a_n = 3n - 7$

Zadanie 9. Ciągiem arytmetycznym o początkowych wyrazach 5 i 9 jest ciąg:

A. $a_n = 4n + 1$ B. $a_n = 5n + 9$ C. $a_n = n + 4$ D. $a_n = 5n + 1$

Zadanie 10. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy -2, a ósmy 12. Zatem:

A. $a_4 < 0$ B. $a_4 = 0$ C. $a_4 = 3$ D. $a_4 > 3$

Zadanie 11. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny oraz $a_3 = 2$ i $a_4 = 5$. Wskaż, który z podanych wyrazów tego ciągu został błędnie wyznaczony:

A. $a_1 = -4$ B. $a_5 = 8$ C. $a_2 = 1$ D. $a_8 = 17$

Zadanie 12. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 7, a różnica 4. Który wyraz tego ciągu jest równy 35?

A. szósty B. siódmy C. ósmy D. dziewiąty

Zadanie 13. Ciąg arytmetyczny (a_n), którego początkowe kolejne wyrazy są równe 3, $\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 2, 1\frac{2}{3}, ...$ jest określony wzorem:

A. $a_n = n + \dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{10-n}{3}$ C. 3 - $\dfrac{1}{3}n$ D. $a_n = \dfrac{10+n}{3}$

Zadanie 14. Dany jest ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 5n + 3$. Różnica tego ciągu jest równa:

A. r = 3 B. r = -3 C. r = 5 D. r = -5

Zadanie 15. Dziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 25, a jedenasty wyraz jest równy 30. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

A. -20 B. 20 C. 25 D. -25

Zadanie 16. Liczby 4x + 5, x, 7 tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Wskaż liczbę x:

A. $x = \frac{7}{4}$ B. $x = -\frac{7}{4}$ C. x = 6 D. x = -6

Zadanie 17. Dany jest ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 3n - 5$. Różnica tego ciągu jest równa:

A. r = 3 B. r = 5 C. r = -3 D. r = -5

Zadanie 18. Dany jest ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie (-7) i różnicy (-2). Drugi wyraz tego ciągu jest równy:

A. -9 B. -5 C. 14 D. -14

Zadanie 19. Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 17, a różnica (-2). Drugi wyraz tego ciągu jest równy:

A. 9 B. 11 C. 23 D. 25

Zadanie 20. W ciągu arytmetycznym $a_1 = 3$ oraz $a_{20} = 7$. Wtedy suma $S_{20} = a_1 + a_2 + ... + a_{19} + a_{20}$ jest równa:

A. 95 B. 200 C. 230 D.100

Zadanie 21. Ciąg arytmetyczny określony jest wzorem $a_n = 4n - 1$. Suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 19 B. 49,5 C. 33 D. 55

Zadanie 22. Jakie dwie liczby trzeba wstawić między 5 i 26, aby tworzyły ciąg arytmetyczny?

A. 12 i 9 B. 10 i 20 C. 13 i 18 D. 11 i 17

Zadanie 23. Jaki jest 99 wyraz ciągu arytmetycznego o początkowych wyrazach 3, 7, 11, 15?

A. 395 B. 298 D. 99 D. 196

Zadanie 24. Suma 5 + 8 + 11 +…+122 wynosi:

A. 1270 B. 2476 D. 2540 D. 5080

Zadanie 25. Wiemy, że 1 + 2 + …+ n = 8n. Zatem liczba n jest równa:

A. 15 B. 8 C. 16 D. 30

Zadanie 26. Między liczby -3 i 5 wstawiono siedem liczb. Wszystkie liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Różnica tego ciągu jest równa:

A. -1 B. 1 C. $\frac{8}{7}$ D. $-\frac{8}{7}$

Zadanie 27. Wskaż pięćdziesiąty pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz jest równy $\frac{4}{5}$, a różnica wynosi 0,004:

A. -0,596 B. 1 C. $-\frac{4}{5}$ D. -0,596

Zadanie 28. Dany jest ciąg arytmetyczny o wzorze $a_n = 7n - 1$. Różnica tego ciągu jest równa:

A. 1 B. -1 C. 7 D. 6

Zadanie 29. Ile wyrazów ciągu arytmetycznego $a_n = 2 - 5n$ jest większych od -143?

A. 30 B. 29 C. 28 D. 26

Zadanie 30. Wskaż wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_6 = 3$ i $a_{30} = 23$.

A. $a_n = \frac{5}{6}n - 2$ B. $a_n = \frac{5}{6}n - \frac{2}{6}$ C. $a_n = n - 3$ D. $a_n = n - 7$

Zadanie 31. Suma wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych jest równa:

A. 2750 B. 2475 C. 2430 D. 4905

Zadanie 32. Wskaż liczbę składników w sumie -5 + 3 +…+235 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

A. 8 B. 30 C. 31 D. 47

Zadanie 33. Suma stu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie pierwszym równym 2 wynosi -19600. Różnica tego ciągu jest równa:

A. 4 B. -4 C. 2 D. -3,94

Temat: CIĄG GEOMETRYCZNY

Ciągiem geometrycznym (a_n) nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną **ilorazem** ciągu geometrycznego.

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to n – ty wyraz ciągu określony jest wzorem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

W ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich każdy wyraz a_n, oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego, jest **średnia geometryczną** wyrazów sąsiednich, czyli wyrazu poprzedniego a_{n-1} i następnego a_{n+1}.

$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg geometryczny jest :

- malejący, gdy $\begin{cases} q \in (0,1) \\ a_1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} q > 1 \\ a_1 < 0 \end{cases}$

- rosnący, gdy $\begin{cases} q \in (0,1) \\ a_1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} q > 1 \\ a_1 > 0 \end{cases}$

- stały, gdy $\begin{cases} q = 1 \\ a_1 \in R \end{cases} \vee \begin{cases} q \in R \\ a_1 = 0 \end{cases}$

- naprzemienny, gdy $\begin{cases} q < 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases}$

Zadanie 1. Podaj iloraz poniższego ciągu geometrycznego. Wypisz jego dwa następne wyrazy:

a) 3, 6, 12, ……,……,…

b) $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{7}$, ……,……

c) 4, 2, 1, ……,……,…

d) 1, -2, 4,….., …….,…

e) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$,... …, ……..,…

f) $\frac{1}{2}, -1, 2$,…., …., …..

Zadanie 2. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o podanym ilorazie q :

a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2$

b) $a_1 = 1, q = \sqrt{2}$

c) $a_1 = -3, q = -1$

d) $a_1 = 16, q = -\frac{1}{4}$

Zadanie 3. Wyznacz wzór ogólny podanego ciągu geometrycznego. Oblicz jego jedenasty wyraz:

a) $9, 3, \frac{1}{3}, 1, ...$

b) $-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, ...$

c) $-\frac{1}{32}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, 2, ...$

d) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, ...$

Zadanie 4. Uzupełnij tak, aby otrzymać kolejne wyrazy ciągu geometrycznego:

a) ...., $\frac{2}{5}$, 2,...., ..., ...

b) ....., ..., -3, 9,....., ...

c) ….,16,….,……, 1024

d) 5, ….., ….., ….., ….., -160

e) ….., 2….., ….., 54, …..

f) $\frac{1}{2}$, ….,……,……,…….,……, $\frac{1}{128}$

Zadanie 5. Oblicz iloraz i wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n):

a) $a_3 = -12,\ a_4 = 24$ b) $a_4 = 4,\ a_7 = 8\sqrt{2}$

c) $a_3 = 4,\ a_8 = -\frac{1}{8}.$ d) $a_2 = -27,\ a_5 = -8$

Zadanie 6. Wyznacz wzór na n- ty wyraz ciągu geometrycznego, w którym:

a) $a_1 = 2,\ q = 3$ b) $a_1 = 4,\ q = \frac{4}{3}$ c) $a_1 = -\frac{1}{2},\ q = -\frac{1}{8}$

Zadanie 7. Wyznacz ciąg geometryczny, w którym:

a) $a_3 = 18\ i\ a_5 = 162$ b) $a_2 = 125\ i\ a_5 = 64$

Zadanie 8. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n):

a) $\begin{cases} a_6 = -4 \\ a_{10} = -\frac{1}{64} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_3 = -3a_4 \\ a_2 - a_1 = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 + 8a_5 = 0 \end{cases}$

Zadanie 9. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

a) -36, x, -1 b) 1, x, 100 c) 2, x, 18

d) x – 1, x + 2, 3x e) x – 3, 2x, 5x + 18 f) x, x+ 1, 2x + 2

g) x – 1, 2x, 2x – 6 h) -2, x + 1, -50 i) $x - 3, 2x - 6, 4x.$

Zadanie 10. Wykaż, że ciąg o podanym wzorze ogólnym jest geometryczny:

a) $a_n = 2 \cdot 3^n$ b) $a_n = 3^{2n-1}$ c) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Temat: SUMA N POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q **suma n początkowych wyrazów ciągu** określona jest wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{gdy} \quad q \neq 1$$

$$S_n = n \cdot a_1, \quad \text{gdy} \quad q = 1$$

Zadanie 1. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, jeśli:

a) $a_1 = -3,\ q = 2,\ n = 8$ b) $a_1 = 5,\ q = \frac{1}{2},\ n = 10$

c) $a_1 = 4,\ q = 5,\ n = 6$ d) $a_1 = 0{,}6,\ q = -\frac{1}{4},\ n = 20$

e) $a_1 = 1,\ \ q = -2,\ \ n = 5$ f) $a_1 = \sqrt{5},\ \ q = \sqrt{5},\ \ n = 8$

Zadanie 2. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów podanego ciągu geometrycznego:

a) 4, 8, 16, 32, … b) 1, 3, 9, 27,… c) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, ...$

Zadanie 3. Oblicz sumę:

$a)\ 4+3+\frac{9}{4}+\frac{27}{16}+\frac{81}{64}$ $b)\ 8-4+2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$

Zadanie 4. Oblicz wartość wyrażenia:

a) 1 + 3 + 9 +… + 243 b) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1-...+16$

Zadanie 5. Zakładając, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym, oblicz brakujące dane w tabeli:

a_1	q	n	a_n	S_n
16	$\frac{1}{4}$	6		
2	$\sqrt{2}$		32	
	2	6	1	

Zadanie 6. W ciągu geometrycznym q = 2, zaś suma 8 początkowych wyrazów jest równa 765. Wyznacz a_1 .

Zadanie 7. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $\frac{77}{8}$. Iloraz tego ciągu jest równy $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

Zadanie 8. Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a iloraz 4. Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.

Zadanie 9. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n) oraz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu wiedząc, że:

a) $a_2 = 28$ i $a_5 = 3\frac{1}{2}$ b) $a_4 = -16$ i $a_9 = 512$

c) $a_2 = 36$ i $a_5 = 4\frac{1}{2}$ d) $a_2 = 6$, $a_3 = 18$.

Temat: CIĄG GEOMETRYCZNY – ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ TEKSTOWYCH

Zadanie 1. Po rozstrzygnięciu konkursu rozdzielono 15500zł na nagrody, z których najmniejszą była kwota 500zł, a każda następna była dwa razy większa niż poprzednia. Oblicz liczbę nagród oraz podaj ich wartości.

Zadanie 2. Piłka odbijając się od ziemi, osiągała za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{2}{3}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po szóstym odbiła się na wysokość 32cm?

Zadanie 3. Tomek rozwiązywał przed egzaminem z fizyki zadania testowe. Pierwszego dnia rozwiązał 40 zadań, a każdego następnego dnia 1,5 razy więcej. W sumie Tomek rozwiązał 325 zadań testowych. Przez ile dni rozwiązywał te zadania?

Zadanie 4. Wygrałeś konkurs sponsorowany przez lokalne radio. Możesz wybrać jeden z dwóch sposobów otrzymania nagrody pieniężnej:

I sposób:10 zł pierwszego dnia, 20 zł drugiego, 30 zł trzeciego itd. przez dwa tygodnie,

II sposób:1 zł pierwszego dnia, 2 zł drugiego, 4 zł trzeciego itd. przez dwa tygodnie.

Który sposób przyniesie więcej pieniędzy i o ile?

Zadanie 5. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 61zł. Za pierwszą i drugą razem zapłacono o 11zł więcej niż za trzecią. Ile zapłacono za każdą książkę?

Zadanie 6. Balon wzniósł się w pierwszej minucie na wysokość 32 m. W każdej następnej minucie przyrost wysokości, na jaką wznosił się balon, był dwa razy mniejszy niż w minucie poprzedniej. Na jakiej wysokości znajdował się balon po siedmiu minutach wznoszenia?

Zadanie 7. Między liczby 2 i 64 wstawiono trzy liczby, w ten sposób, że trzy pierwsze liczby, których suma wyniosła 27, utworzyły ciąg arytmetyczny, a trzy ostatnie utworzyły ciąg geometryczny. Jakie liczby wstawiono?

Zadanie 8. Liczby x, y, 1 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby x, y, x + y + 1 w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu geometrycznego.

Zadanie 9. Trzy liczby, których suma jest równa 36 tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 3, a do trzeciej dodamy 7, to otrzymane liczby utworzą ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

Zadanie 10. Trzy liczby, których suma jest równa 48, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli do pierwszej i do drugiej dodamy2, a do trzeciej 11, to otrzymane liczby utworzą ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

Zadanie 11. Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli od pierwszej odejmiemy 1, od drugiej 4, a od trzeciej 3, to otrzymane różnice utworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

Temat: CIĄG GEOMETRYCZNY – POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ podać przykład ciągu geometrycznego,
- ✓ wskazać pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego, mając dane:
    - wzór ogólny ciągu,
    - kilka jego początkowych wyrazów,
    - dwa dowolne wyrazy ciągu,
- ✓ obliczyć dowolny wyraz ciągu, mając dany pierwszy wyraz i iloraz,
- ✓ wyznaczyć ilość wyrazów podanego ciągu geometrycznego,
- ✓ zapisać wzór ogólny ciągu geometrycznego , mając dane pierwszy wyraz i iloraz ciągu,
- ✓ stosować wzór na wyraz środkowy ciągu geometrycznego,
- ✓ obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego znając:
    - pierwszy i ostatni wyraz ciągu
    - pierwszy wyraz i iloraz ciągu.
- ✓ stosować wzory na ogólny wyraz i sumę ciągu geometrycznego do rozwiązywania zadań.

Zadanie1. Podaj trzeci i siódmy wyraz ciągu geometrycznego wiedząc, że $a_1 = -64,\ a_2 = 32$.

Zadanie 2.W ciągu geometrycznym dane są: $a_1 = -4 \quad i \quad a_7 = -108$. Oblicz iloraz tego ciągu.

Zadanie 3. Wyznacz czwarty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), w którym: $a_{10} = 24,\ q = \sqrt{2}$.

Zadanie 4. Dla jakiej wartości x liczby: 2, x+1, x+4 tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

Zadanie 5. Wyznacz ciąg geometryczny (b_n), w którym $b_4 = -40,\ b_9 = 1280$.

Zadanie 6. Uzasadnij, że ciąg określony wzorem $a_n = (\sqrt{3})^n$ jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 7. Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\frac{1}{3}$, a suma jego pięciu początkowych wyrazów wynosi -605. Znajdź pierwszy wyraz ciągu (a_n) oraz określ jego monotoniczność.

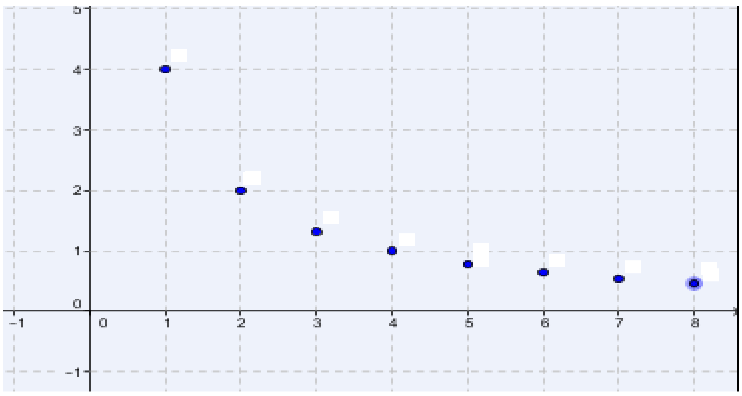
Zadanie 8. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62, a ich iloczyn jest równy 1000. Wyznacz ten ciąg.

12. GRANICA CIĄGU LICZBOWEGO

<u>Intuicyjne pojęcie granicy ciągu.</u>

Na rysunku przedstawiono wykres ciągu o wzorze $a_n = \frac{4}{n}$. Kolejne wyrazy tego ciągu :

$4, 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, ...$ są coraz bliżej liczby 0.



Ta liczba, do której zbliżają się kolejne wyrazy ciągu jest **granicą ciągu.** Jeśli ciąg a_n ma granicę *g*, to piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Temat: CIĄGI ZBIEŻNE. CIĄG GEOMETRYCZNY ZBIEŻNY DO ZERA I JEGO SUMA

Ciąg, który ma granicę nazywamy **ciągiem zbieżnym.** O ciągu, który nie ma granicy, mówimy, że jest **rozbieżny.** Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy ciągi rozbieżne do $+\infty$ i ciągi rozbieżne do $-\infty$.

Twierdzenia:

- Jeśli $q \in (-1, 1)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
- Jeśli *k*>0, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
- Jeśli $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$
- Jeśli *k*>0, to $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$.

Wyrażenie $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ...$ nazywamy **szeregiem geometrycznym** o wyrazach $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3,...$ i ilorazie *q*.

Sumę $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1}$ nazywamy **n – tą sumą częściową** tego szeregu.

Jeśli istnieje granica właściwa $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, to granicę tę nazywamy **sumą szeregu,** szereg ten nazywamy zbieżnym i piszemy $S = a_1 + a_1q + a_1q^2 ...$

Twierdzenia:

- Szereg geometryczny o ilorazie $q \in (-1,1)$ jest zbieżny. Jeśli a_1 jest pierwszym wyrazem szeregu, to **suma szeregu** wyraża się wzorem: $S = \frac{a_1}{1-q}$
- Szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 \neq 0$ i ilorazie *q* jest zbieżny, gdy $|q| < 1$ i rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

Zadanie 1. Naszkicuj wykres ciągu (a_n). Czy ciąg ten ma granicę?

a) $a_n = 2 - \frac{4}{n}$ b) $a_n = \frac{8}{2^n} + 3$ c) $a_n = 3 \cdot (-1)^n$

Zadanie 2. Naszkicuj wykres ciągu (a_n) i na jego podstawie podaj granicę tego ciągu:

a) $a_n = -\frac{3}{n}$ b) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

c) $a_n = \frac{6}{n} - 3$ d) $a_n = 4 - \frac{1}{2^n}$

Zadanie 3. Spośród ciągów geometrycznych wskaż te, które są zbieżne do zera:

a) $a_n = 3^n$

b) $b_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n$

c) $c_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

d) $d_n = \left(-\frac{6}{5}\right)^n$

Zadanie 4. Napisz szereg geometryczny, którego wyrazami są wyrazy nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, gdy:

a) $a_1 = 2, \quad q = \frac{1}{4}$

b) $a_1 = 1, \quad q = 3$

c) $a_1 = 3, \quad q = -\frac{1}{2}$

Zadanie 5. Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

a) $16+8+4+2+...$

b) $1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{64}{125}+...$

c) $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...$

d) $4-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...$

Temat: GRANICA CIĄGU

Przy obliczaniu granic korzystać będziemy z poniższego twierdzenia:

Jeżeli ciągi $(a_n)\ i\ (b_n)$ są zbieżne oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to:

- $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot a$, gdzie $c \in R$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a+b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a-b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a-b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ gdy $b \neq 0\ i\ b_n \neq 0$ dla $n \in N^+$

Twierdzenie: Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych.

- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{g}$
- Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \infty$

Zadanie 1. Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) =$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}) =$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{3}{n}}{10-\frac{6}{n}}=$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{6}{n}-8}{\frac{4}{n}-3}=$

Zadanie 2. Oblicz granicę ciągu (a_n)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n+2}{6n-4}=$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n}{2n^2+1}=$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-3n+1}{3n^3+4n}=$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n^2+5}{3n^3-6n+2}=$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n^2}{n^3+n^2-3}=$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+n-1}{2n^2+3n-12}=$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2-3n}=$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-n}{n^3+n+1}=$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^6-n^4+7}{n^7+2n+5}=$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^4}{1+n^4}=$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-4}{2-n}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-4}{3n^2+1}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n}{n^2-4n}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n-n^2}{n^2-2n+5}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^4-5n}{n^4+n}$

Zadanie 3. Oblicz granicę ciągu (a_n):

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-1}{3^n+1}=$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+6^n}{3^n-2\cdot 6^n}=$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-5^n}{8+8^n}=$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-5^n}{4^{n+1}+4\cdot 5^n}=$

Temat: GRANICA NIEWŁAŚCIWA CIĄGU

Dla ciągów mających granice niewłaściwą ∞ zachodzą poniższe własności:

- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty$
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b>0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty$
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b<0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=-\infty$
- Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ (lub $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$), to $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$

(zakładamy, że $b_n\neq 0$ dla $n\in N^+$)

UWAGA: Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to granica ciągu $(a_n \cdot b_n)$ może nie istnieć. Natomiast, gdy istnieje, nie możemy podać jej wartości bez szczegółowej analizy danego przykładu. Mówimy, że mamy do czynienia z **symbolem nieoznaczonym** $[\infty \cdot 0]$, $[\infty - \infty]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ oraz $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Zadanie 1. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ lub do ∞:

a) $a_n = -\frac{1}{10}n$ b) $a_n = 3^n$ c) $a_n = 0{,}1^{-n}$ d) $a_n = -n^3$

Zadanie 2. Oblicz granicę ciągu (a_n):

a) $\lim_{n\to\infty}(n^3 - 10n^2 + 4) =$

b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4}n^2 - 8n - 3) =$

c) $\lim_{n\to\infty}(-6n^3 + 9n^2 + n) =$

d) $\lim_{n\to\infty}(5n^2 + n - 1) =$

e) $\lim_{n\to\infty}(-n^3 + 2n + 3) =$

f) $\lim_{n\to\infty}(2 - 3n - 2n^2)$

Zadanie 3. Oblicz granicę ciągu (a_n):

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3 + 7n^2}{2n + 6} =$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3 - 2n}{5 - n^2} =$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3 - 4n + 3}{2n^2 - 3n + 1} =$

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{0{,}1n^6 + n^3 - 1}{10n^4 + n + 2} =$

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 - 4}{3n - 2} =$

f) $\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^3 + 2n - 1}{3n + 5} =$

Zadanie 4. Oblicz granicę ciągu (a_n):

a) $\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt{n}) =$

b) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2 + 1} - n) =$

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. Ile wynosi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{21}}$:

A. $\frac{1}{21}$ B. 0 C. $\frac{1}{n}$ D. inna odpowiedź

Zadanie 2. Suma szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 1 i ilorazie równym 5:

A. wynosi $-\frac{1}{4}$

C. jest nieskończona

B. wynosi $\frac{1-5^n}{-4}$

D. ma skończoną wartość dodatnią

Zadanie 3. Wskaż szereg geometryczny, którego suma jest równa 2:

A. $1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+...$ C. $\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\frac{4}{27}+...$

B. $-1+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}+\frac{27}{8}-...$ D. $\frac{4}{3}-\frac{4}{9}+\frac{4}{27}-...$

Zadanie 4. Wskaż ciąg, którego granicą jest (-3):

A. $a_n=-\frac{3}{n}$ B. $a_n=3-\frac{1}{n}$ C. $a_n=-\frac{1}{3^n}$ D. $a_n=-\frac{(-1)^n}{n}-3$

Zadanie 5. Granicą ciągu $a_n=\frac{-n+2}{n+2}$ jest liczba:

A. 2 B. 1 C.0 D – 1

Zadanie 6. Wskaż ciąg, w którym $\lim_{n\to\infty} a_n=-2$:

A. $a_n=-2n+1$ B. $a_n=\frac{2n-4}{2n+1}$ C. $a_n=\frac{2-n}{2n+1}$ D. $a_n=\frac{2-4n}{2n+1}$

Zadanie 7.Wskaż ciąg rozbieżny:

A. $a_n=1+\frac{1}{n}$ B. $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$ C. $a_n=2^{-n}$ D. $a_n=(0{,}2)^n$

Zadanie 8. Wskaż ciąg, który nie ma granicy niewłaściwej:

A. $a_n=-3^n$ B. 3^n C. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$ D. $(-3)^n$

Zadanie 9. Wskaż ciąg, którego $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$:

A. $a_n=3n-2$ B. $a_n=\frac{2+5n}{n^2-7}$ C. $a_n=\frac{n^2+4n+1}{n^2-3}$ D. $a_n=\frac{2-4n^2}{2n+3}$

13. GRANICA I CIĄGŁOŚC FUNKCJI

Intuicyjne pojęcie granicy funkcji

Przez stwierdzenie, że „liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0" rozumiemy, że wartość funkcji f „zbliża się" do g, gdy x „zbliża się" do x_0.

Piszemy wówczas $\lim_{x\to x_0} f(x)=g$

Twierdzenie:

Jeżeli funkcje f i g mają w punkcie x_0 granicę $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ oraz $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ to:

$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$ $\quad\quad$ $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \ gdy \ b \neq 0$

Jeżeli $c \in R$, to:

$\lim_{x \to x_0} [c + f(x)] = c + a$ $\quad\quad$ $\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot a$

$\lim_{x \to x_0} \frac{c}{f(x)} = \frac{c}{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \frac{c}{a}, \ gdy \lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$

Temat: GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE

<u>**Oznaczenie**</u>: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ - granica lewostronna funkcji f

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ - granica prawostronna funkcji f

UWAGA:

- Funkcja f ma granicę g w punkcie x_0, gdy $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- Jeśli $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$ i $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g$, to $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej granicę w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x) = x + 3, \quad x_0 = 0$

b) $f(x) = -x^2 + 2, \quad x_0 = -1$

c) $f(x) = 2x - 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = x^2 + 4x, \quad x_0 = -2$,

e) $f(x) = |x + 1|, \quad x_0 = -2$

f) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}, \quad x_0 = -1$

Zadanie 2. Oblicz granicę:

a) $\lim_{x \to 3} x^2$

b) $\lim_{x \to -1} \frac{3}{x^2}$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 7}{x + 2}$

e) $\lim_{x \to -3} \frac{x}{x + 2}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$

g) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

h) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

i) $\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

j) $\lim_{x \to 3} \frac{9 + 3x}{2x + 6}$

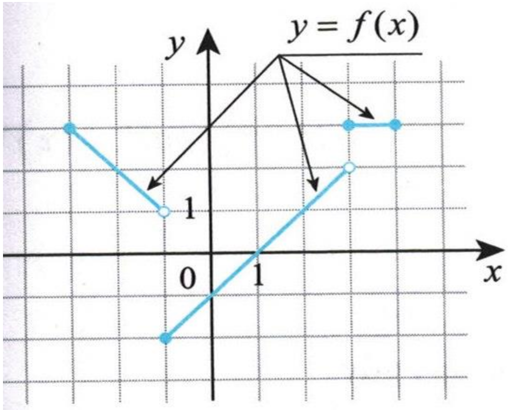
k) $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 + 3x}$

l) $\lim_{x \to 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

m) $\lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

n) $\lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{2\sqrt{x} - 1}{1 - 4x}$

Zadanie 3. Odczytaj z wykresu funkcji f wartości podanych granic jednostronnych:

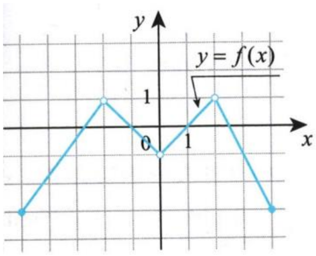


$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 4. Odczytaj z wykresu funkcji f wartości wskazanych granic:



1 $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$, **2** $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$,

3 $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$, **4** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$,

5 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, **6** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$,

7 $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, **8** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$,

9 $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$.

Zadanie 5. Zbadaj czy funkcja f ma granicę w punkcie x_0, gdy:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & gdy\ x < -1 \\ x^2 - 1, & gdy\ x \geq -1 \end{cases}, \quad x_0 = -1$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & gdy\ x < 0 \\ x+1, & gdy\ x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

Temat: GRANICA NIEWŁAŚCIWA FUNKCJI W PUNKCIE

• Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$), to funkcja w punkcie x_0 ma **granice niewłaściwą lewostronną** $-\infty$ $(+\infty)$

• Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$) to funkcja w punkcie x_0 ma **granice niewłaściwą prawostronną** $-\infty$ $(+\infty)$

• Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty\,(+\infty)$ to funkcja w punkcie x_0 ma **granice niewłaściwą** $-\infty\,(+\infty)$

__Oznaczenie:__ Jeżeli $x_0 \notin D_f$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ to zapis:

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = 0^-$ oznacza, że wartości funkcji f zbliżają się do 0 przez wartości ujemne

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0^-$ oznacza, że wartości funkcji f zbliżają się do 0 przez wartości ujemne

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = 0^+$ oznacza, że wartości funkcji f zbliżają się do 0 przez wartości dodatnie

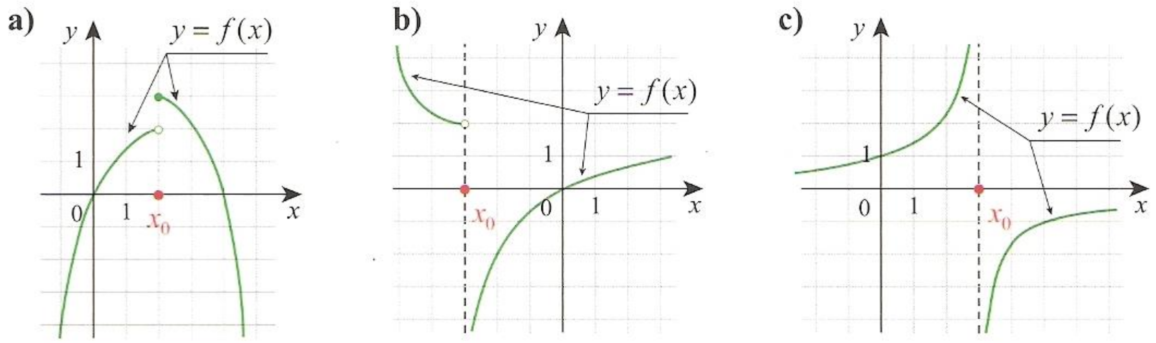
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0^+$ oznacza, że wartości funkcji f zbliżają się do 0 przez wartości dodatnie

Uwaga: Jeżeli $a > 0,\ x_0 \notin D_f$ i $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = 0^-$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0^+$, to:

• $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{a}{f(x)} = \left[\dfrac{a}{0^-}\right] = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{-a}{f(x)} = \left[\dfrac{-a}{0^-}\right] = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{a}{f(x)} = \left[\dfrac{a}{0^+}\right] = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{-a}{f(x)} = \left[\dfrac{-a}{0^+}\right] = -\infty$

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji f. Odczytaj z wykresu wskazane granice:



$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x),\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x),\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x),\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

Zadanie 2. Oblicz granicę:

$a)\ \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x}{(x-1)^2}$ $c)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x+5}{x^2}$

$b)\ \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2-x}{(x-3)^2}$ $d)\ \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{x^2+4x+4}$.

Zadanie 3. Oblicz granice jednostronne:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3}{x}$ $b)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-4}{x}$ $c)\ \lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x}{x+1}$ $d)\ \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{x+1}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3-x}{x^2}$ $f)\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-2}{x^2-x}$ $g)\ \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2+6x}{3-x}$ $h)\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{3-x^2}{4-x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{3}{x-1}$ j) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{3}{x-2}$, k) $\lim\limits_{x\to --3^-}\frac{x}{x+3}$, l) $\lim\limits_{x\to --5^+}\frac{x}{x+5}$

Zadanie 4. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punktach, które nie należą do jej dziedziny:

a) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+4}$ b) $f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$

c) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{8-x}$ d) $f(x)=\frac{4-x}{x^2-9}$

Temat: CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Funkcję f, określoną w otoczeniu punktu x_0, gdzie $x_0\in D_f$, nazywamy funkcją **ciągłą** w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Uwaga: Ciągłość funkcji f w punkcie x_0, gdy $x_0\in D_f$ badamy

• obliczając $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ i\ f(x_0)$

• sprawdzając, czy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Uwaga: Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to:

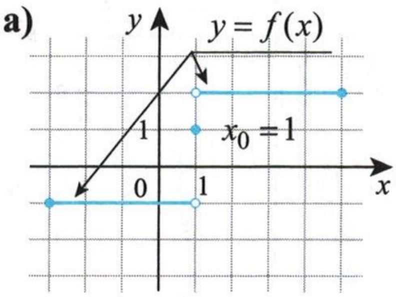
• funkcje $f+g$, f - g, $f\cdot g$ są ciągłe w punkcie x_0

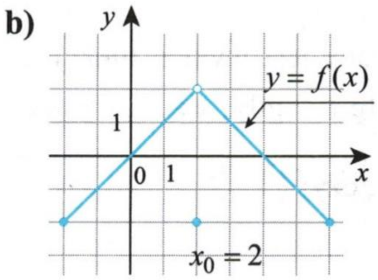
• funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli $g(x_0)\neq 0$.

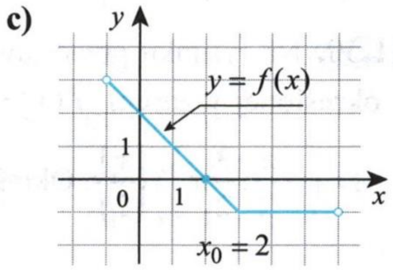
Uwaga: Funkcję *f* nazywamy ciągłą w przedziale (a, b) (zbiorze), jeżeli jest ona ciągła w każdym punkcie tego przedziału (zbioru). Przykładami funkcji ciągłych w całej swojej dziedzinie są:

• funkcje liniowe • funkcje wielomianowe • funkcje wymierne
• funkcje kwadratowe • funkcje wykładnicze • funkcje logarytmiczne

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Określ dziedzinę D_f funkcji f. Odczytaj z wykresu wartość funkcji f w punkcie x_0. Ustal, czy funkcja f ma granicę w punkcie x_0 i jeśli tak, to porównaj wartości tej granicy z wartością funkcji w punkcie x_0.







Zadanie 2. Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & dla\ x\le 1 \\ 4-x & dla\ x>1 \end{cases}$ $\quad x_0=1$

b) $f(x)=\begin{cases} 6-x^2 & dla\ x<2 \\ x & dla\ x\ge 2 \end{cases}$ $\quad x_0=2$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & dla\ x<2 \\ (x-3)^3 & dla\ x\ge 2 \end{cases}$ $\quad x_0=2$

d) $f(x)=\begin{cases} -x & dla\ x\le 0 \\ x^2+1 & dla\ x>0 \end{cases}$ $\quad x_0=0$

e) $f(x)=\begin{cases} 0 & dla\ x=0 \\ x^2-1 & dla\ x\ne 0 \end{cases}$ $\quad x_0=0$

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+6x+9}{x+3}, & gdy\quad x\ne -3 \\ 0, & gdy\quad x=-3 \end{cases}, \quad x_0=-3,$

g) $f(x)=\begin{cases} 4x+5, & gdy\ x\le -1 \\ 5x-4, & gdy\ x>-1 \end{cases}$ $\quad x_0=-1$

Temat: GRANICA FUNKCJI W NIESKOŃCZONOŚCI

Jeżeli dla każdego ciągu (x_n), takiego, że $x_n \in (a,+\infty)\ i\ (a,+\infty) \subset D_f$, $i\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ oraz:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = g$, to funkcja f ma w $+\infty$ granicę g, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = g$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$, to funkcja f ma w $+\infty$ granicę niewłaściwą $+\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$, to funkcja f ma w $+\infty$ granicę niewłaściwą $-\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = -\infty$

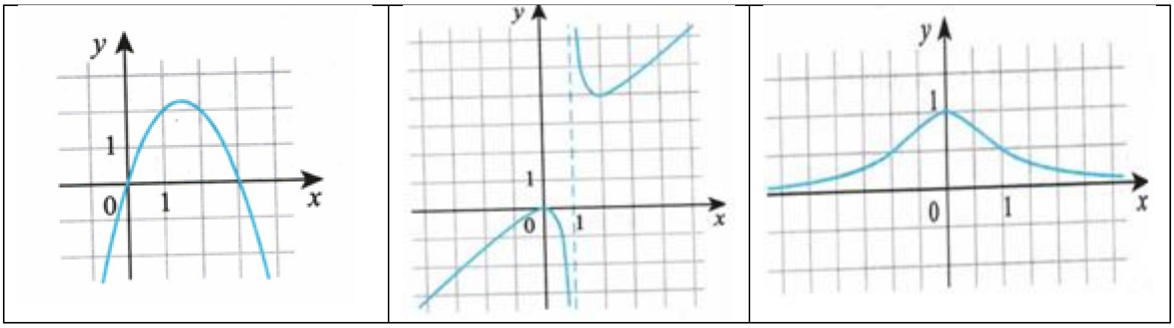
Analogicznie określamy granicę funkcji f w minus nieskończoności ($-\infty$), gdy $x_n \in (-\infty, a)\ i\ (-\infty, a) \subset D_f$.

Uwaga: Jeżeli $n \in N^+$, to badając zachowanie funkcji w $-\infty$ oraz w $+\infty$, korzystamy ze wzorów:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & gdy\ n - liczba\ parzysta \\ -\infty, & gdy\ n - liczba\ nieparzysta \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$, gdy n jest liczbą nieparzystą.

Zadanie 1. Podaj wartości granic $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ funkcji, której wzór i fragment wykresu przedstawiono poniżej:

a) $f(x) = -x^2 + 3x$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



Zadanie 2. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3 - 4x^2 + 6)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4 - 6x^3 - 2x + 8)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(6x^3 - 2x^2 + 8x + 1)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}(4 - x - x^2 - x^3)$

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x-1}{x^3-3x^2+2}$ f) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x^3}{3x^3-2x+5}$

g) $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3-6x+8}{2x^4+2x-5}$ h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^3-11}{2x^3+5x+15}$

i) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x^2-8}{4x-x^3}$ j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x-6}{x^3+3x-4}=$

14. POCHODNA FUNKCJI I JEJ INTERPRETACJA

Temat: ILORAZ RÓŻNICOWY FUNKCJI

Oznaczenia:
$h=\Delta x=x_1-x_0$- przyrost argumentu funkcji *f* od x_0 do x_1
$\Delta f = f(x_1)-f(x_0)$ - przyrost wartości funkcji *f*, gdy przyrost argumentu jest równy Δx

Jeśli funkcja *f* jest określona w przedziale $(a,b)\ i\ x_0+\Delta x\in(a,b)$ i , gdzie $\Delta x\neq 0$, to iloraz $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji *f* w punkcie x_0 dla przyrostu Δx zmiennej x.

Geometrycznie iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ jest równy tangensowi kąta, jaki tworzy prosta przechodząca przez punkty A = $(x_0, f(x_0))$ i B = $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$.
Prostą AB nazywamy **sieczną wykresu** funkcji *f*.

Zadanie 1. Oblicz przyrost wartości funkcji *f* odpowiadający przyrostowi Δx argumentu od x_0 do x_1, gdy:
a) $f(x)=1-2x,\ x_0=-3,\ x_1=4$
b) $f(x)=4-x^2,\ x_0=-2,\ x_1=2$

Zadanie 2. Oblicz iloraz różnicowy funkcji *f* w punkcie x_0, gdy:
a) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=3,\ \Delta x=2$
b) $f(x)=x^2-4,\ x_0=2,\ \Delta x=-1$
c) $f(x)=3x^2+2x-1,\ x_0=0,\ \Delta x=-1$
d) $f(x)=\frac{1}{x^2+1},\ x_0=0,\ \Delta x=1$
e) $f(x)=\sqrt{x^2+3},\ x_0=-1,\ \Delta x=1$
f) $f(x)=\frac{1}{x+1},\ x_0=2,\ \Delta x=1$
g) $f(x)=-x^2+2x+3,\ x_0=-1,\ x_1=2$

Zadanie 3. Napisz równanie siecznej przecinającej wykres funkcji *f* punktach o odciętych x_0 i x_1, gdy:

a) $f(x) = x^2 + 1,\ \ x_0 = 1,\ x_1 = 3$

b) $f(x) = 4 - x^2,\ \ x_0 = -2,\ x_1 = 2$

c) $f(x) = \frac{4}{x},\ \ x_0 = -4,\ x_1 = 1$

d) $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1},\ \ x_0 = 1,\ x_1 = 3$

Temat: POCHODNA FUNKCJI W PUNKCIE

Definicja: Jeżeli istnieje skończona granica $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji *f* w punkcie** x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Jeśli funkcja *f* ma pochodną w punkcie x_0, to mówimy, że jest w tym punkcie **różniczkowalna.**

Zadanie 1. Oblicz na podstawie definicji pochodną funkcji *f* w punkcie x_0:

a) $f(x) = x^2,\ x_0 = 2$

b) $f(x) = x^3,\ x_0 = 3,$

c) $f(x) = x^2 - 2x,\ x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x},\ x_0 = -1$

e) $f(x) = 5x - 1,\ x_0 = 1$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2-1},\ x_0 = 0$

g) $f(x) = \frac{1}{x},\ \ x_0 = 4$

h) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4$

Zadanie 2. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 1$ w punkcie o odciętej x_0 . Podaj miarę kąta, jaki ta styczna tworzy z osią OX:

a) $x_0 = 1$

b) $x_0 = -\frac{1}{2}$

c) $x_0 = -2$

Zadanie 3. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej poprowadzonej do paraboli o równaniu $y = 0{,}5x^2$:

a) w początku układu współrzędnych,

b) w punkcie o odciętej x =2,

c) w punkcie o odciętej x =2,

d) w punktach przecięcia się paraboli z prosta o równaniu $y = 2{,}5x - 2$.

Temat: POCHODNA JAKO FUNKCJA

Funkcję, która każdej liczbie $x_0 \in D_f$ przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$ (o ile istnieje) nazywamy **funkcją pochodną funkcji *f*** lub pochodną funkcji *f* i oznaczamy f'.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $gdzie\ x \in D_f$

Uwaga:

- $(c)' = 0,\quad gdzie\ c -$ stała
- $(x^2)' = 2x$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \quad dla\ x \neq 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^3)' = 3x^2$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad dla\ x > 0$
- dla dowolnej różnej od zera liczby całkowitej n: $(x^n)' = nx^{n-1} \quad dla\ x \neq 0$

Zadanie 1. Wyznacz z definicji pochodną funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ b) $f(x) = 2x^2 - x$

Zadanie 2. Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = -2$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = -3x$

d) $f(x) = x^{21}$. e) $f(x) = 5x^3$. f) $f(x) = 5x^{13}$

g) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^4$. h) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^2$ i) $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$

j) $f(x) = \dfrac{3}{4x^4}$ k) $f(x) = \sqrt[3]{x}$. l) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Zadanie 3. Oblicz pochodną funkcji i podaj jej dziedzinę:

a) $f(x) = \pi - 2x$ b) $f(x) = 2 - 8x^2$

c) $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{5}$ d) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.

e) $f(x) = x^6 - 6x^5 + 2\sqrt{x} + \frac{3}{x}$ f) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} - 5x$

Zadanie 4. Oblicz $f'(1)$, gdy:

a) $f(x) = 1 + x^2$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

c) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Temat: POCHODNA SUMY, RÓŻNICY, ILOCZYNU I ILORAZU FUNKCJI

Jeśli funkcje *f* i *g* mają pochodne w punkcie x, to:

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, g(x) \neq 0$
- $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

Zadanie 1. Wyznacz pochodną funkcji *f*. Oblicz *f'(2)*:

a) $f(x) = 6x^2 - 3x + 4$

b) $f(x) = x^3 - 8x^2 - 1$

c) $f(x) = -2x^4 + 6x^3 - x$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

e) $f(x) = 2x^4 + x^3 - x$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$

g) $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - x$

h) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x$

Zadanie 2. Wyznacz pochodną funkcji *f*:

a) $f(x) = (x^4 - 6x^2)(x^3 + 2x)$

b) $f(x) = (x+1)(x^2 - 3)$.

c) $f(x) = (2 - 3x - x^2)(1 + x^2)$

d) $f(x) = (x^5 - 3x^4)(x^7 + 3x + 1)$.

e) $f(x) = \sqrt{x}(3 + 2x)$

f) $f(x) = (\sqrt{x} - 2)(4 - x)$

g) $f(x) = (x^4 - 2x^2)(x^3 - x + 2)$

h) $f(x) = (\sqrt{x} + 3)(x^2 + 3)$

i) $f(x) = (3x - 4)(5 - x)$

j) $f(x) = (x^4 - 3x)(x^2 - 5)$

k) $f(x) = \sqrt{x}(2x - 3)$

l) $f(x) = (\sqrt{x} - 4)(x - 3)$

m) $f(x) = x^4(3 - 8\sqrt{x})$

n) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1)$

Zadanie 3. Wyznacz pochodną funkcji *f* i określ jej dziedzinę:

a) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 8}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$

d) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^4 + 1}$.

e) $f(x) = \frac{2x - 5}{3x - 7}$

f) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 15}{x^2 - 2x}$.

g) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 4x}$

h) $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x + 1}$

Zadanie 4. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji *f* w punkcie o odciętej x_0 :

a) $f(x) = x^4 - 2x^3, \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}, \quad x_0 = -3$

Zadanie 5. Oblicz:

a) $f'(3),\ gdy\ \ f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

b) $f'(0),\ gdy\ f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$

Temat: INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA I FIZYCZNA POCHODNEJ W PUNKCIE

Jeżeli funkcja *f* ma w punkcie x_0 pochodną, to **styczną do wykresu tej funkcji** w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest prosta o równaniu $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Liczba $f'(x_0)$ jest jej współczynnikiem kierunkowym.

Zadanie 1. Napisz równanie stycznej do paraboli $y = -x^2 + 5x + 6$ w punkcie $A = (-1,0)$.

Zadanie 2. Wyznacz kąt nachylenia do osi OX stycznej do krzywej $y = \frac{1}{3}x^3$ w punkcie $A = \left(1, \frac{1}{3}\right)$.

Zadanie 3. Styczna do wykresu funkcji *f* jest równoległa do prostej *k*. Napisz równanie stycznej, gdy:

a) $f(x) = x^2, \quad k: y = x + 1$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad k: 2x - 3y = 0$

Zadanie 4. Oblicz kąt, jaki tworzy z osią x styczna do wykresu funkcji *f* w punkcie o odciętej x_0, gdy:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}, \ x_0 = 3$,

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 5, \ x_0 = 2$,

c) $f(x) = \sqrt{x}(x-1), \ x_0 = 1$.

Zadanie 5. Droga przebyta w ciągu *t* sekund przez punkt materialny, poruszający się ruchem niejednostajnym, określona jest wzorem $s(t) = 6t^3 - 8t^2 + 7t - 4$. Oblicz prędkość tego punktu w chwilach: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ i $t_3 = 3$.

Zadanie 6. Pewne ciało porusza się w czasie *t* po drodze *s* z prędkością *v* i przyśpieszeniem *a* . Napisz wzór opisujący prędkość i przyśpieszenie, gdy:

a) $s(t)=40t-5t^2$ b) $s(t)=30t+2t^2$ c) $s(t)=100t-t^2$.

Zadanie 7. Dla kilku pierwszych sekund prędkość v ruchu wystrzelonej rakiety określona jest $v(t) = 3t^2 - 6t$. Oblicz, z jakim przyspieszeniem będzie poruszała się rakieta po czterech sekundach lotu. W jakim przedziale czasu przyspieszenie będzie ujemne?

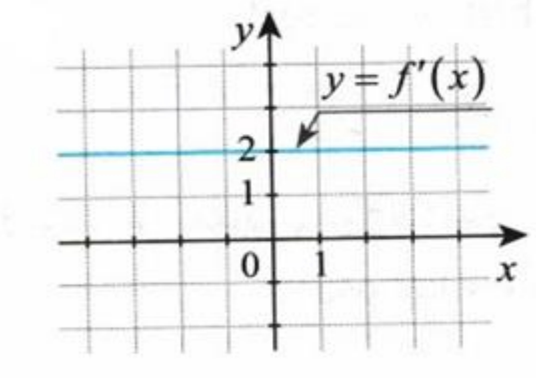
Temat: ZWIĄZEK POCHODNEJ Z MONOTONICZNOŚCIĄ FUNKCJI

Różniczkowe kryterium badania monotoniczności funkcji: Jeżeli funkcja *f* jest różniczkowalna w przedziale (a,b) oraz dla każdego argumentu $x \in (a,b)$:

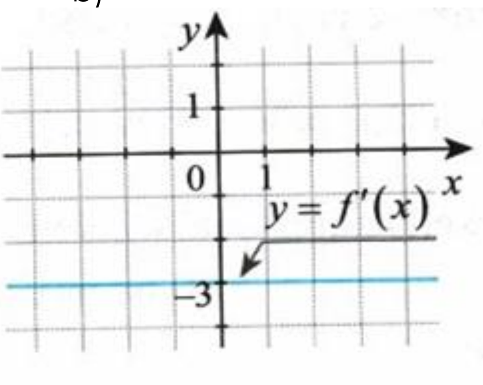
- $f'(x)=0$, to funkcja *f* jest **stała** w przedziale (a,b)
- $f'(x)>0$, to funkcja *f* jest **rosnąca** w przedziale (a,b)
- $f'(x)<0$, to funkcja *f* jest **malejąca** w przedziale (a,b)

Zadanie 1. Poniżej przedstawiony jest wykres pochodnej *f'*; funkcji *f*. Określ przedziały monotoniczności funkcji *f*:

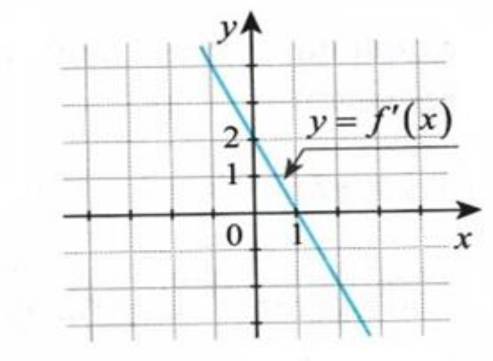
a)



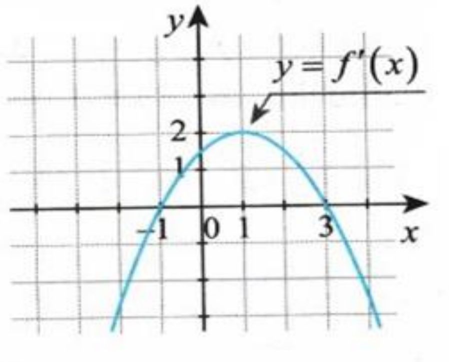
b)



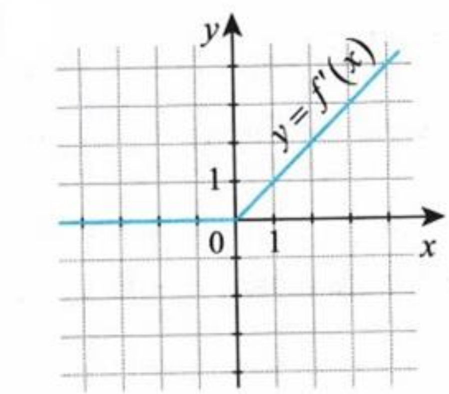
c)



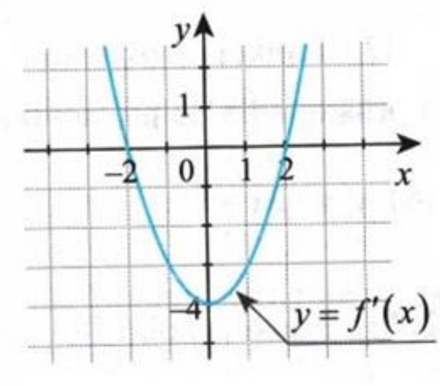
d)



e)



f)



Zadanie 2. W tabeli poniżej określony jest znak i wartości funkcji pochodnej *f'* funkcji *f*. Podaj przedziały monotoniczności funkcji *f* i określ rodzaj monotoniczności:

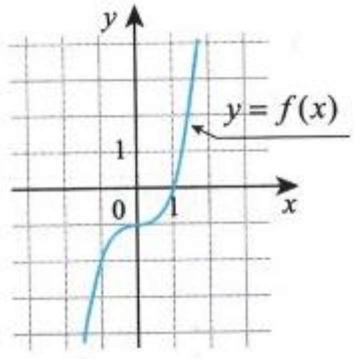
a)

x	(-∞; 3)	0	(0; 3)	3	(3; +∞)
f'(x)	-	0	+	0	+

b)

x	(-∞; -3)	-3	(-3; 1)	1	(1; +∞)
f'(x)	+	0	-	0	-

Zadanie 3. Fragment wykresu funkcji *f* określonej wzorem $f(x) = x^3 - 1$ przedstawiono na rysunku:



a) Określ dziedzinę i przedziały monotoniczności funkcji *f*.
b) Określ pochodna funkcji *f* i naszkicuj jej wykres.
c) Określ znak pochodnej funkcji w zbiorze **R**.

Zadanie 4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji *f*:

a) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

b) $f(x) = x^3 - 12x$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

d) $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x$

e) $f(x) = -x^3 + 6x^2$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}6x^2 - 2x + 4$

g) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

h) $f(x) = x - \frac{4}{x}$

i) $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$

j) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

k) $f(x) = \frac{1}{x} - 2x - x^3$

l) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

m) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

n) $f(x) = \frac{x-2-x^2}{x^2-x-2}$.

Temat: ZWIĄZEK POCHODNEJ Z EKSTREMUM FUNKCJI

Wśród ekstremum lokalnego funkcji wyróżniamy **minimum lokalne** (punkt, w którym funkcja przechodzi w rosnącą) oraz **maksimum lokalne** (punkt, w którym funkcja przechodzi w malejącą)

Oznaczenia: $y_{\min}$ - minimum lokalne

$y_{\max}$ - maksimum lokalne

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Jeżeli funkcja *f* jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D$ i ma w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$.

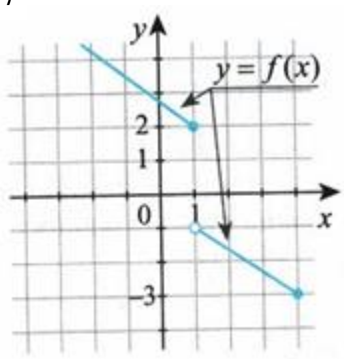
Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Jeżeli funkcja *f* jest różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz gdy :

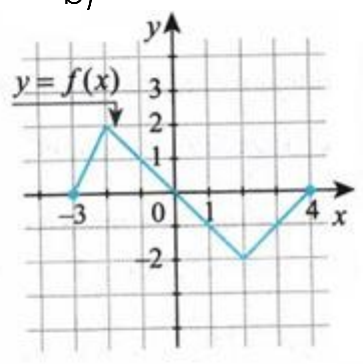
- $x \in (a, x_0)$ i $f'(x_0) > 0$ $oraz$ $x \in (x_0, b)$ i $f'(x) < 0$ to funkcja ma w punkcie x_0 **maksimum**
- $x \in (a, x_0)$ i $f'(x_0) < 0$ $oraz$ $x \in (x_0, b)$ i $f'(x) > 0$ to funkcja ma w punkcie x_0 **minimum**

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji *f*. Przeanalizuj ten wykres, podaj punkty, w których funkcja ma ekstrema lokalne i określ ich rodzaj:

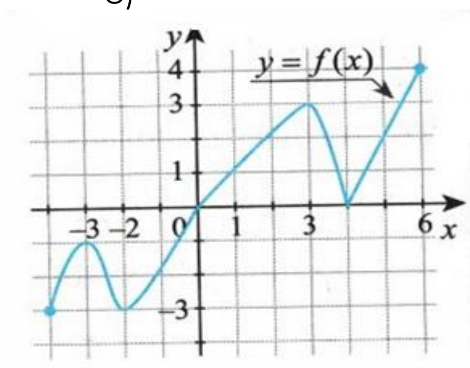
a)



b)



c)



Zadanie 2. Wyznacz ekstrema funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

c) $f(x) = x^3 - 12x$

d) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$,

e) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 8x$

f) $f(x) = \frac{x^2}{2x - 6}$

g) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \frac{x + 4}{x - 2}$

Zadanie 3. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - 9x$:

a) wyznacz dziedzinę funkcji,

b) oblicz miejsca zerowe,

c) wyznacz przedziały monotoniczności,

d) wyznacz ekstrema funkcji.

Zadanie 4. Dana jest funkcja $f(x)=x^4-2x^2-5$:

a) wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f

b) znajdź ekstrema funkcji.

Temat: WYZNACZANIE NAJMNIEJSZEJ I NAJWIĘSZEJ WARTOŚCI FUNKCJI

Zadanie 1. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w przedziale:

a) $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2-12x+5$ <-2, 2>

b) $f(x)=x^3-3x^2-24x$ $<-2,3>$

c) $f(x)=4x^3+3x^2-6x,$ $<0,2>$

d) $f(x)=x^3-3x^2+6x-2$ $<-2,3>$

e) $f(x)=x^3-2,$ $<-1;2>$

f) $f(x)=x^3+6x^2,$ $<-3;2>$

g) $f(x)=x^3-3x^2+6x-2,$ $<-1;1>$

Temat: POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI – POCHODNA FUNKCJI

SPRAWDŹ, CZY JUŻ UMIESZ:

- ✓ wyznaczać pochodną funkcji wielomianowej,
- ✓ wyznaczać pochodną sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji wielomianowej,
- ✓ zapisać równanie stycznej do wykresu funkcji w podanym punkcie,
- ✓ wyznaczać przedziały monotoniczności funkcji
- ✓ wyznaczać ekstrema funkcji,
- ✓ wyznaczać wartość najmniejszą i największą funkcji w przedziale domkniętym.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Zadanie 1. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x)=-3x^2+x+4$ *b)* $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

c) $f(x)=(x^3-1)(2x^2-5)$ *d)* $f(x)=\sqrt{x}(3x^5-x^2)$

e) $f(x)=\frac{4x+1}{2x+1}$ *f)* $f(x)=\frac{x^2-3x}{x+2}$

Zadanie 2. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x)=x^3-3x-5$.

Zadanie 3. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x)=-x^3+3x+2$.

Zadanie 4. Wyznacz wartość najmniejszą i największa funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ w przedziale <-1, 4>.

Zadanie 5. Napisz równanie stycznej w punkcie przecięcia się wykresu funkcji *f* z osią x, gdy $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$.

Bibliografia:

1. Antek M., Belka K., Grabowski P., *Prosto do matury-podręcznik do matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych- zakres podstawowy*, Wydawnictwo Nowa Era, 2012.
2. Babiański W., Chańko L., Ponczek D., *Matematyka 1- podręcznik dla szkół ponadgimnazjalnych- zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Nowa Era, 2011.
3. Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., *Matematyka 1 – ćwiczenia i zadania dla szkół ponadgimnazjalnych- zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Nowa Era, 2012.
4. Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., *Matematyka 2 – ćwiczenia i zadania dla szkół ponadgimnazjalnych- zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Nowa Era, 2012.
5. Cewe A., Nahorska H., Kruk M., Krawczyk M., *Matematyka w otaczającym nas świecie – podręcznik dla klasy 2- zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Podkowa, 2009.
6. Cewe A., Nahorska H., *Matematyka w otaczającym nas świecie – zbiór zadań dla klasy 2 – zakres podstawowy*, Wydawnictwo Podkowa, 2008.
7. Cewe A., Kobierowska J., Nahorska H., Stepuro I., Witkowska J., *Matura z matematyki od roku 2010 – zbiór zadań maturalnych z zakresu rozszerzonego*, Wydawnictwo Podkowa, 2009.
8. Gałązka K., *Obowiązkowa matura z matematyki 2012- zakres podstawowy*, Wydawnictwo Operon, 2011.
9. Gębura A., *Przed maturą – zadania z rozwiązaniami - zakres podstawowy*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, 2015.
10. Karpiński M., Dobrowolska M., Braun M., Lech J. *Matematyka 1 – podręcznik dla liceum i technikum – zakres podstawowy*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2002.
11. Masłowska D., Masłowski T., Makowski A., Nodzyński P., Słomińska E., Strzelczyk A., *Testy maturalne dla poziomu podstawowego*, Wydawnictwo Aksjomat, 2009.
12. Molęda A., Gawrońska – Popa D., *Procenty w otaczającym nas świecie*, Wydawnictwo Podkowa, 2011.
13. Przychodna A., Łaszczyk Z., *Matematyka poznać zrozumieć – podręcznik dla klas 1-zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo WSiP, 2013.
14. Wesołowski M., *Zbiór zadań z matematyki, część 1 - zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Nowa Era, 2013.
15. Zamek-Gliszczyński T., *Zadania powtórkowe przed maturą- zakres podstawowy*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, 2014.
16. Arkusze maturalne dostępne na stronie internetowej Centralnej Komicji Egzaminacyjnej www.cke.pl

Zespół redakcyjny:

Wiesława Fiszeder, Agata Gawrońska, Ludmiła Grzegórska, Agata Niezgoda, Anna Piotrowska, Ewa Tomaszewska-Guttfeld, Anna Tuczyńska, Joanna Wojtczak-Różańska.

Rok szkolny 2017/2018