Ćwiczenia z matematyki – semestr 5LM

Wersja sierpień 2016

Wydruk październik 2018

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c:
Sinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta ostrego do długości przeciwprostokątnej.
Cosinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie ostrym do długości przeciwprostokątnej.
Tangensem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej.
Cotangensem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości drugiej przyprostokątnej.

ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI TEGO SAMEGO KĄTA

$sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1$ (jedynka trygonometryczna)

$tg \propto = \frac{sin\propto}{cos\propto}, \; gdy \;\; cos \propto \neq 0$

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DLA KĄTÓW $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

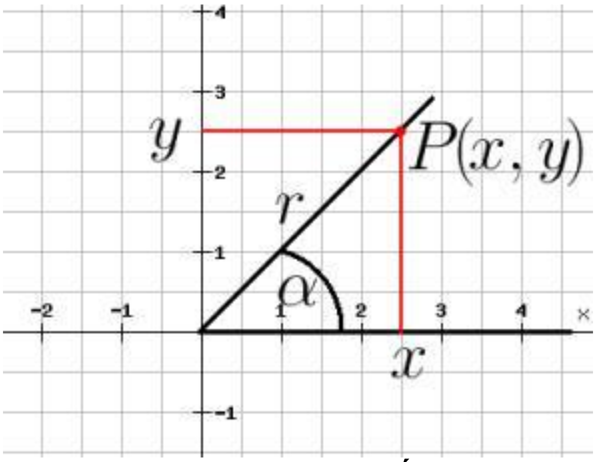
	30°	45°	60°
$sin \propto$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos \propto$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg \propto$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg \propto$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW O MIARACH OD 0° DO 180°

W celu określenia funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od 0° do 180° umieszcza się kąt w układzie współrzędnych w taki sposób, że:

• wierzchołek kąta pokrywa się z początkiem układu współrzędnych (punktem (0,0))
• jedno ramię, zwane **ramieniem początkowym** pokrywa się z dodatnią półosią x,
• drugie ramię, zwane **ramieniem końcowym**, w zależności od miary kąta, umieszcza się w I lub II ćwiartce układu współrzędnych albo na półosiach x lub y układu współrzędnych.

Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych kąta umieszczonego w układzie współrzędnych, obieramy na ramieniu końcowym tego kąta dowolny punkt P, różny od 0 = (0,0), taki, że P = (x, y)



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \qquad 0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$$

$$(x \ne 0)$$

ZNAKI I WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH KĄTA α

	0°	I ćwiartka	90°	II ćwiartka	180°
sin x	0	+	1	+	0
cos x	1	+	0	—	-1
tg x	0	+	nie istnieje	—	0

Jeśli kąt α jest kątem ostrym, to:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad tg(180^\circ - \alpha) = -tg\alpha$

Miarą łukową kąta α nazywamy stosunek długości łuku l, wyznaczonego przez ten kąt, do długości promienia r okręgu:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

l – długość łuku, r – długość promienia

Jednostkę miary łukowej nazywamy **radianem**, w skrócie piszemy **rad.**

Aby zamienić miarę łukową kąta (x) na miarę stopniową (α) lub odwrotnie, możemy skorzystać z proporcji:

$$\frac{\alpha}{360^0} = \frac{x}{2\pi}$$

Funkcję f określoną na zbiorze D nazywamy **okresową,** jeśli istnieje liczba $T \neq 0$ taka, że dla każdego argumentu $x \in D$ i dowolnej liczby całkowitej k:

$$x + kT \in D \ \ oraz \ f(x + kT) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji.**

Dla dowolnego $x \in R$: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \ \ gdzie \ k \in C.$

Dla dowolnego $x \in R$: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \ \ gdzie \ k \in C.$

Dla dowolnego $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, gdzie \ n \in C: tg(x + k\pi) = tgx; gdzie \ k \in C.$

Dla dowolnego $x \in R$: $\sin(-x) = -\sin x$.
Dla dowolnego $x \in R$: $\cos(-x) = \cos x$

Dla dowolnego $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, gdzie\ k \in C: tg(-x) = -tgx$

<u>Twierdzenie.</u> Dla dowolnych $\alpha, \beta \in R$ prawdziwe są poniższe wzory:

Sinus sumy kątów: $\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$

Sinus różnicy kątów: $\sin(\alpha - \beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$

cosinus sumy kątów: $\cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$

cosinus różnicy kątów: $\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$

Dla dowolnego $\alpha \in R$:

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$$
$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

<u>Twierdzenie.</u> Dla dowolnych $\alpha, \beta \in R$ prawdziwe są poniższe wzory:

Suma sinusów: $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Różnica sinusów: $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Suma cosinusów: $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Różnica cosinusów: $cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

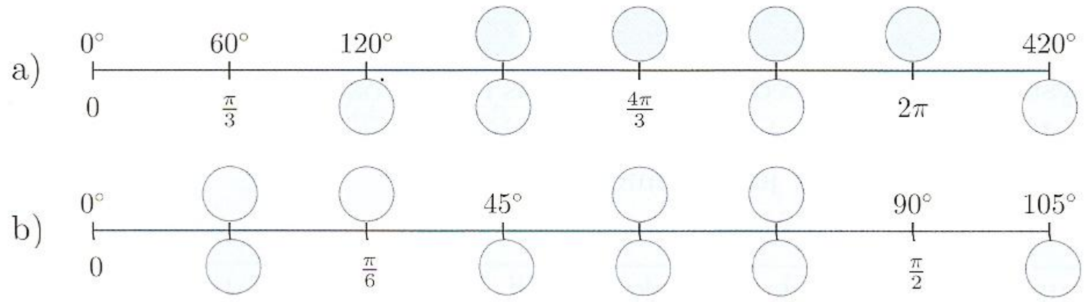
T. Miara łukowa kąta

Zadanie 1. Korzystając z przedstawionej poniżej metody uzupełnij tabelkę.

$$270^o = 270^o \cdot \frac{\pi}{180^o} = \frac{3}{2}\pi \qquad\qquad \frac{7}{18}\pi = \frac{7}{18}\pi \cdot \frac{180^o}{\pi} = 70^o$$

W stopniach	5^o	10^o		36^o				225^o	315^o		
W radianach			$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{6}$			$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$

Zadanie 2. Na rysunku poniżej przedstawiono dwie miary: stopniową i łukową. Uzupełnij puste miejsca.



Zadanie 3. Oblicz miarę łukową kątów:

a) $70°$,
b) $20°$,
c) $130°$,
d) $38°$
e) $310°$,
f) $180°$,
g) $360°$,
h) $150°$
i) $270°$,
j) $60°$,
k) $27°$,
l) $34°$,

Zadanie 4. Wyznacz miarę łukową kątów wewnętrznych następujących wielokątów foremnych:

a) trójkąta,

b) kwadratu,

c) pięciokąta,

d) sześciokąta

Zadanie 5. Jaką miarę stopniową ma kąt

a) $\frac{\pi}{3}$ rad,

b) $\frac{\pi}{9}$ rad,

c) $\frac{3}{2}\pi$ rad,

d) $\frac{5}{6}\pi$ rad,

e) $\frac{\pi}{4}$ rad,

f) $\frac{5}{3}\pi$ rad,

Zadanie 6. Oblicz miarę stopniową kątów:

a) $\frac{2}{3}\pi$,

b) $\frac{\pi}{9}$,

c) $\frac{7}{12}\pi$,

d) $\frac{11}{12}\pi$,

e) $\frac{5}{3}\pi$,

f) $\frac{28}{15}\pi$.

..

T: Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Zadanie 1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią osi x, a na drugim ramieniu leży punkt P.

a) P = (-3,4), b) P = (4,-3),

c) P = $(-\sqrt{3},1)$, d) P = (-2,-1),

e)P = (-2,4), f) P = $(-\sqrt{2},2)$.

Zadanie 2. Skreśl punkty, które nie należą do ramienia końcowego kąta α.

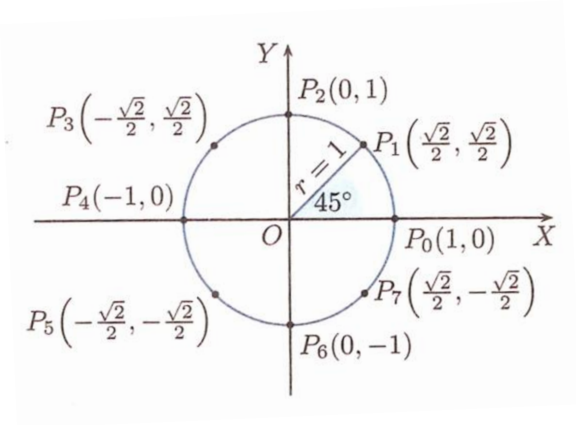
a) $tg\alpha = -\frac{3}{5},\quad \alpha \in (90^o; 180^o)$ P = (-5,3), Q = (5,-3), R = (-3,5)

b) $tg\alpha = \frac{7}{5},\quad \alpha \in (180^o; 270^o)$ P = (5,7), Q = (-7,-5), R = (-5,-7)

c) $tg\alpha = -2,\quad \alpha \in (270^o; 360^o)$ P = (2,-4), Q = (-2,1), R = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

d) $ctg\alpha = \frac{1}{6},\quad \alpha \in (180^o; 270^o)$ P = (-1,-6), Q = (-6,-1), R = $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

Zadanie 3. Na rysunku obok przedstawiono okrąg jednostkowy z zaznaczonymi punktami: $P_o, \dots, P_7$.



a) Podaj miarę kąta α_i, do którego ramienia końcowego należy punkt P_i dla i = 0, 1, … , 7.

- $\alpha_0 =$
- $\alpha_1 =$
- $\alpha_2 =$
- $\alpha_3 =$
- $\alpha_4 =$
- $\alpha_5 =$
- $\alpha_6 =$
- $\alpha_7 =$

b) Uzupełnij tabelę.

α	0^o	45^o	90^o	135^o	180^o	225^o	270^o	315^o
sin α								
cos α								
tg α			×				×	

T: Znaki wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Zadanie 1. Wpisz +, gdy funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz -, gdy funkcja przyjmuje wartości ujemne.

	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\alpha \in (0^o; 90^o)$				
$\alpha \in (90^o; 180^o)$	+	-	-	-
$\alpha \in (180^o; 270^o)$				
$\alpha \in (270^o; 360^o)$				

Zadanie 2. W miejsce $\square$ wpisz znak < lub >.

a) $sin190^o$ $\square$ 0 b) $tg230^o$ $\square$ 0 c) $sin295^o$ $\square$ 0

d) $cos150^o$ $\square$ 0 e) $ctg290^o$ $\square$ 0 f) $cos305^o$ $\square$ 0

Zadanie 3. W której ćwiartce układu współrzędnych leży ramię końcowe kąta α, jeśli:

a) sin α > 0 i cos α < 0,

b) sin α < 0 i tg α < 0,

c) tg α < 0 i cos α > 0,

d) cos α > 0 i tg α < 0,

e) cos α < 0 i sinα·cos α < 0,

f) sin α < 0 i cos α < 0,

g) sin α < 0 i tg α > 0,

h) sin α > 0 i tg α > 0

i) sin α > 0 i cos α > 0,

Zadanie 4. Uzasadnij, ze:

a) $sin\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^o; 180^o)$,

b) $cos\alpha > 0$ dla $\alpha \in \langle 0^o; 90^o) \cup (270^o; 360^o\rangle$,

c) $tg\alpha > 0$ dla $\alpha \in (0^o; 90^o) \cup (180^o; 270^o)$,

T. Okresowość funkcji trygonometrycznych

Zadanie 1. Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^o + \alpha$, gdzie $k \in C, \alpha \in< 0^o, 360^o$). Podaj miarę główną kąta skierowanego α, którego miara jest równa:

a) $1400^o =$

b) $-1080^o =$

c) $-3590^o =$

d) $850^o =$

e) $1439^o30' =$

f) $730^o10' =$

g) $1413^o =$

h) $-1079^o25' =$

i) $-700^o =$

j) $-695^o =$

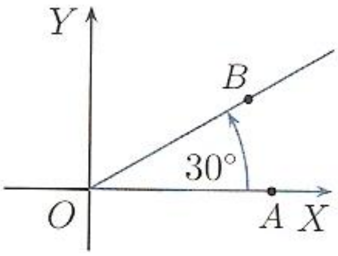
k) $630^o15' =$

Zadanie 2. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej kąt skierowany α, którego miara jest równa:

a) $\alpha = 315^o$ b) $\alpha = 570^o$ c) $\alpha = -2130^o$

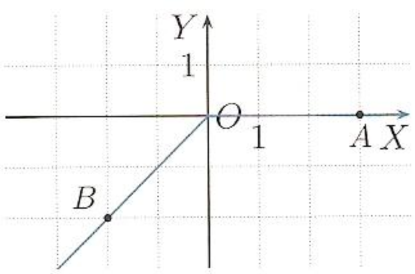
$d)$ $\alpha = -120^o$ e) $\alpha = -1305^o$ f) $\alpha = 4260^o$

Zadanie 3. O który z podanych kątów można obrócić półprostą *OA*, aby pokryła się ona z półprostą *OB* (rysunek obok)? Zakreśl te kąty.



390°, 750°, 1100°, 0°, 1470°, -330°, -690°, -1050°, -1440°.

Zadanie 4. Półprosta *OA* po obrocie o kąt α pokryła się z półprostą *OB* (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta α, jeśli:



a) $\alpha \in \langle 0^o, 360^o \rangle$, b) $\alpha \in \langle 1080^o, 1440^o \rangle$,

c) $\alpha \in \langle 360^o, 720^o \rangle$, d)$\alpha \in \langle -1080^o, -720^o \rangle$.

Zadanie 5. Czy ramię końcowe kąta α pokrywa się z ramieniem końcowym kąta β?

a) $\alpha = 735^o$, $\beta = 475^o$,

b) $\alpha = 290^o$, $\beta = 1370^o$,

c) $\alpha = -225^o$, $\beta = 865^o$,

d) $\alpha = -310^o$, $\beta = -410^o$,

e) $\alpha = 620^o$, $\beta = -440^o$,

f) $\alpha = 150^o$, $\beta = -930^o$.

Zadanie 6. Oblicz.

a) $\sin 390^o$

b) $\sin 765^o$

c) $\operatorname{tg} 3660^o$

d) $\cos 1125^o$

e) $\operatorname{tg} 780^o$

f) $\sin (-300^o)$,

g) $\operatorname{tg} (-675^o)$

h) $\sin 1500^o$

i) $\operatorname{tg} 3630^o$

j) $\cos(-660^o)$

k) $tg\ 1440^o$

l) $tg(-690^o)$

m) $\cos(-330^o)$

n) $tg(-1035^o)$

o) $\sin 1140^o$

p) $cos\frac{7}{3}\pi$

q) $sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$

r) $\cos\frac{17}{4}\pi$

s) $tg\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$

T. Wzory redukcyjne

Zadanie 1. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych:

a) $\sin 210^{o}$

b) $\cos 660^{o}$

c) $\sin 1020^{\circ}$

d) $\sin 120^{\circ}$

e) $\cos 420^{\circ}$

f) $\sin(-330^{o})$

g) $\cos 480^{o}$

h) $\sin 300^{o}$

i) $\operatorname{tg}(-210^{o})$

j) $\cos(-960^{o})$

k) $\operatorname{tg} 225^{o}$

l) $\operatorname{tg}(-300^{\circ})$

m) $\sin(-495^{o})$

n) $\operatorname{tg}(-315^{o})$

o) $\operatorname{tg}(-240^{o})$

Zadanie 2. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, oblicz:

a) $sin\frac{3}{4}\pi$

b) $cos2\frac{5}{6}\pi$

c) $tg\,\frac{17}{6}\pi$

d) $tg\,\frac{19}{4}\pi$

e) $sin\frac{11}{6}\pi$

f) $sin\frac{4}{3}\pi$

g) $cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$

h) $tg\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$

Zadanie 3. Oblicz stosując wzory redukcyjne:

a) $\frac{\sin 210°\cos 480°}{\mathrm{tg}120°}$

b) $\frac{\sin(360°-30°)-\mathrm{tg}135°}{\cos(-405°)\mathrm{tg}\,240°} =$

c) $\frac{2\cos 55^0 \sin 45^0}{\sin 35^0 \cos 60^0} =$

d) $sin^2 45^o + cos^2 135^o =$

e) $sin^2 120^o + cos^2 150^o =$

f) $tg 135^o - tg 225^o =$

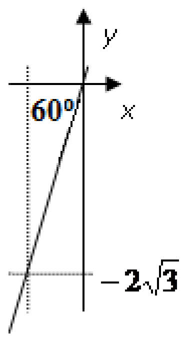
g) $cos 330^o + tg 120^o tg 330^o =$

h) $\frac{\cos 120^o}{\sin^2 330^o} + \frac{tg 150^o}{tg 210^o} =$

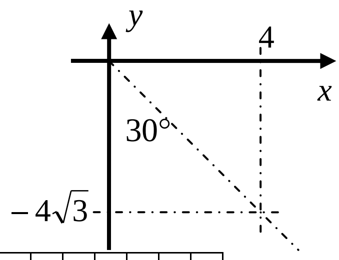
i) $\frac{cos^2 150^o tg 210^o tg 135^o}{sin^2 150^o + cos^2 210^o}$

Zadanie 4. Oblicz $\sin 240°$, $\cos 240°$, $\text{tg}\, 240°$

(możesz skorzystać z rysunku zamieszczonego obok).



Zadanie 5. Oblicz $\sin 300°$, $\cos 300°$, $\mathrm{tg}\, 300°$ i $\mathrm{ctg}\, 300°$ (możesz skorzystać z rysunku zamieszczonego obok).



T. Związki między funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta

Zadanie 1. Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in$ II ćw. wyznacz $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Zadanie 2. Oblicz $\sin\beta$, gdy $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, $\beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

Zadanie 3. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych danego kąta wiedząc, że

a) $\sin\gamma = -\frac{3}{5}$ i $\gamma \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$,

b) $\cos\alpha = 0{,}8$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

c) $\sin\beta = -\frac{4}{5}$ i $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

d) $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

Zadanie 4. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin\alpha = -0{,}25$;

b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Zadanie 5. Wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

c) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{10}$, oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha$.

d) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{3}$, oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 6. Udowodnij tożsamość:

a) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = \sin^2\alpha$

b) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

c) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

d) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

e) $2\sin(90° - \alpha)\sin\alpha = \sin 2\alpha$

Zadanie 7. Uzasadnij, że jeżeli $\cos\alpha \neq 0$ to prawdą jest, że

$$(1 + \sin\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \cos\alpha.$$

Zadanie 8. Sprawdź, czy prawdziwa jest następująca tożsamość $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$. Podaj konieczne założenia.

Zadanie 9. Uzasadnij, że jeżeli α jest kątem ostrym, to $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha$.

T. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Zadanie 1. Oblicz.

a) sin 75^o, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów,

b) cos 75^o, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów,

c) sin 105^o, korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów,

d) $cos\,\frac{\pi}{12}$, korzystając ze wzoru na cosinus sumy kątów.

Zadanie 2. Oblicz.

a) $sin15^o$,

b) $sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)$,

c) $cos375^o$,

d) $cos(-435^o)$

e) $sin105^o$

f) $sin\left(\frac{19}{12}\pi\right)$

e) $cos855^o$

f) $cos1155^o$

Zadanie 3. Oblicz.

a) $cos28^o \cdot cos17^o - sin28^o \cdot sin17^o$=

b) $sin\frac{3}{10}\pi \cdot cos\frac{1}{5}\pi + cos\frac{3}{10}\pi \cdot sin\frac{1}{5}\pi$ =

c) $sin85^o \cdot cos25^o - sin25^o \cdot cos85^o$=

d) $sin33^o \cdot cos12^o - sin12^o \cdot cos33^o$=

e) $cos\frac{8}{7}\pi \cdot cos\frac{1}{7}\pi + sin\frac{8}{7}\pi \cdot sin\frac{1}{7}\pi$=

f) $sin\frac{\pi}{18} \cdot sin\frac{4}{9}\pi - cos\frac{\pi}{18} \cdot cos\frac{4}{9}\pi$=

Zadanie 4. Wyprowadź podane niżej wzory na sinus kąta podwojonego i cosinus kąta podwojonego.

Dla dowolnego kata $\alpha \in \boldsymbol{R}$
$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$$
$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

Zadanie 5. Wykaż, ze dla dowolnego $\alpha \in \boldsymbol{R}$:

a) $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$, b) $cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$.

Zadanie 6. Oblicz sin $(\alpha + \beta)$ i cos $(\alpha + \beta)$, jeśli:

a) $sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\beta = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$,

c) $sin\alpha = \frac{1}{3}$, $cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Zadanie 7. Oblicz: $sin\alpha$, $cos\alpha$ i $tg\alpha$, jeśli:

a) $cos2\alpha = \frac{3}{4}$ i $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $cos2\alpha = \frac{3}{4}$ i $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$,

c) $cos2\alpha = -\frac{1}{3}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

d) $cos2\alpha = -\frac{1}{3}$ i $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

T: Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

Zadanie 1. Oceń prawdziwość każdego zdania. Wskaż **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub **F**, jeśli jest fałszywe.

1) $sin32^o + sin28^o = cos2^o$ **P / F**

2) $sin77^o - sin17^o = sin43^o$ **P / F**

3) $cos69^o + cos51^o = cos9^o$ **P / F**

4) $cos84^o - cos24^o = sin54^o$ **P/ F**

Zadanie 2. Korzystając ze wzorów na sumę lub różnicę odpowiednich funkcji trygonometrycznych, oblicz.

$a)\ sin5x + sin3x$

b) $cos7x - cos5x,$

c) $sin8x - sin4x,$

d) $cos8x + cos2x,$

e) $sinx - sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

f) $sinx - sin\frac{\pi}{7}$

Zadanie 3. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\frac{sin24^o + sin66^o}{cos24^o + cos66^o}$,

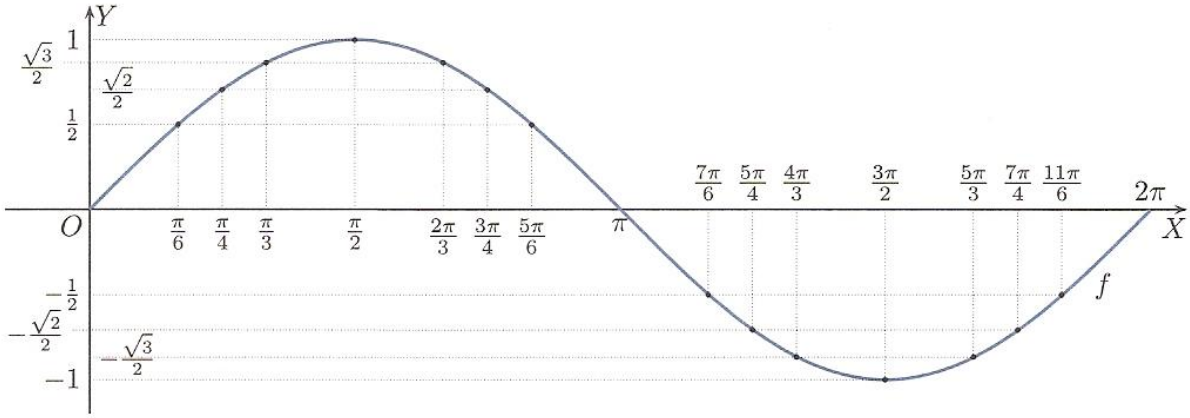
b) $\frac{sin52^o - sin38^o}{cos52^o - cos38^o}$,

c) $\frac{sin13^o + sin47^o}{cos13^o + cos47^o}$,

d) $\frac{sin35^o - sin25^o}{cos35^o - cos25^o}$.

T: Wykres i własności funkcji sinus

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = sinx$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Uzupełnij własności:

a) dziedzina

b) przedziały, w których funkcja rośnie

c) przedziały, w których funkcja maleje

d) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie

e) przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne

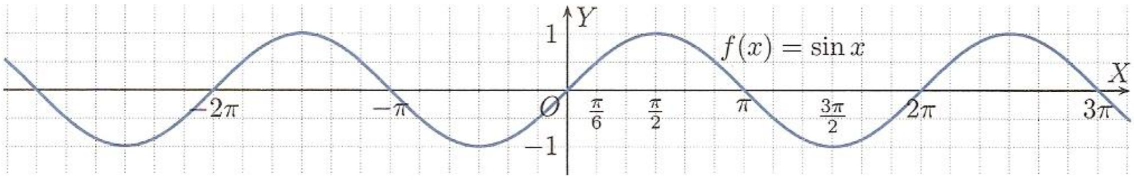
f) $sinx = \frac{1}{2}$ dla x = ____ lub x = ____

g) $sinx = -\frac{1}{2}$ dla x = ____ lub x = ____

h) $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dla x = ____ lub x = ____

i) $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dla x = ____ lub x = ____

Zadanie 2. Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = sinx$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Określ prawdziwość poniższych zdań na podstawie wykresu.



A. Funkcja $f(x) = sinx$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. TAK / NIE

B. Funkcja $f(x) = sinx$ rośnie w przedziale $(0; 2\pi)$. TAK / NIE

C. Oś OY jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = sinx$. TAK / NIE

D. Wykres funkcji $f(x) = sinx$ ma nieskończenie wiele osi symetrii. TAK / NIE

E. Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = sinx$. TAK / NIE

Zadanie 3. Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = \sin x$ w podanym przedziale?

a) $\langle 0; 2\pi \rangle$, b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ c) $(0; 5\pi \rangle$, d) $(0; 32\pi)$

Zadanie 4. Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$, wskaż wszystkie te liczby $x \in (-\pi; \pi)$ takie, że $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 5. W oparciu o wykres funkcji sinus, w przedziale $\langle 0°; 360° \rangle$ znajdź wszystkie kąty α, dla których $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 6. Korzystając z wykresu $y = \sin\alpha$ dla $0° \le \alpha \le 360°$, określ:

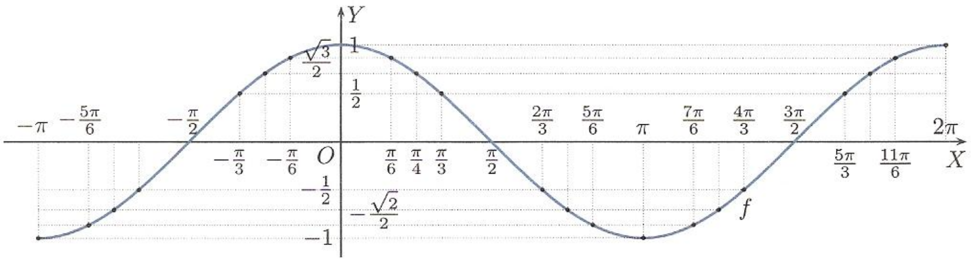
a) dla jakich argumentów spełniających warunek $0° \le \alpha \le 360°$ funkcja jest malejąca i jednocześnie przyjmuje wartości ujemne?

b) która z liczb: $\sin 60°$, $\sin 100°$, $\sin 265°$ jest mniejsza od $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

c) rozwiąż: $\sin\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0° \le \alpha \le 360°$.

T. Wykres i własności funkcji cosinus

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = cosx$ dla $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$.



Rozwiązaniami równania:

a) $cosx = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ są liczby: ________________________________

$cosx = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ są liczby: ________________________________

b) $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ są liczby: ________________________________

$cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ są liczby: ________________________________

c) $cosx = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ są liczby: ________________________________

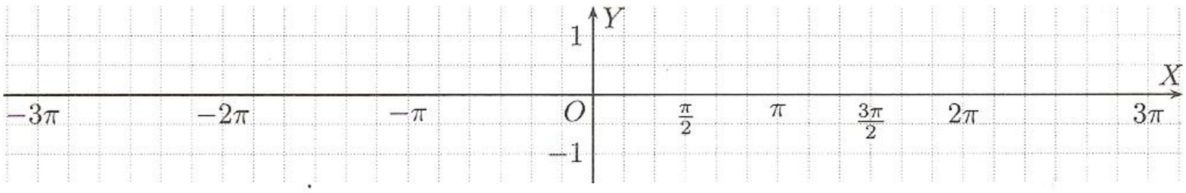
$cosx = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ są liczby: ________________________________

Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji $y = \cos x$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$,

oraz podaj:

- dziedzinę,
- przedziały, w których funkcja rośnie,
- przedziały, w których funkcja maleje,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = cosx$ w przedziale $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$.



Odpowiedz na pytania, korzystając z wykresu funkcji $f(x) = cosx$.

a) Ile miejsc zerowych w przedziale $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$ ma funkcja $f(x) = cosx$?

b) Dla jakich $x \in \langle -3\pi; 3\pi \rangle$ spełnione jest równanie $cosx = 1$?

c) Ile rozwiązań w przedziale $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$ ma równanie $\cos x = \frac{3}{4}$?

Zadanie 4. Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = \cos x$ należące do przedziału:

a) $\langle 0; 2\pi \rangle$, b) $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ c) $\left(-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi \right\rangle$, d) $\left(-\frac{9}{2}\pi; \frac{15}{2}\pi \right)$.

Zadanie 5. Korzystając z wykresu $y = \cos\alpha$ wskaż wszystkie wartości $\alpha \in \langle -180°; 360° \rangle$ takie, że $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 6. Korzystając z wykresu funkcji $y=\cos x$, wskaż wszystkie liczby $x \in (0;3\pi)$ takie, że $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 7. Naszkicuj wykres funkcji $y=\cos x$ dla $0° \le x \le 360°$, a następnie korzystając z wykresu, określ:

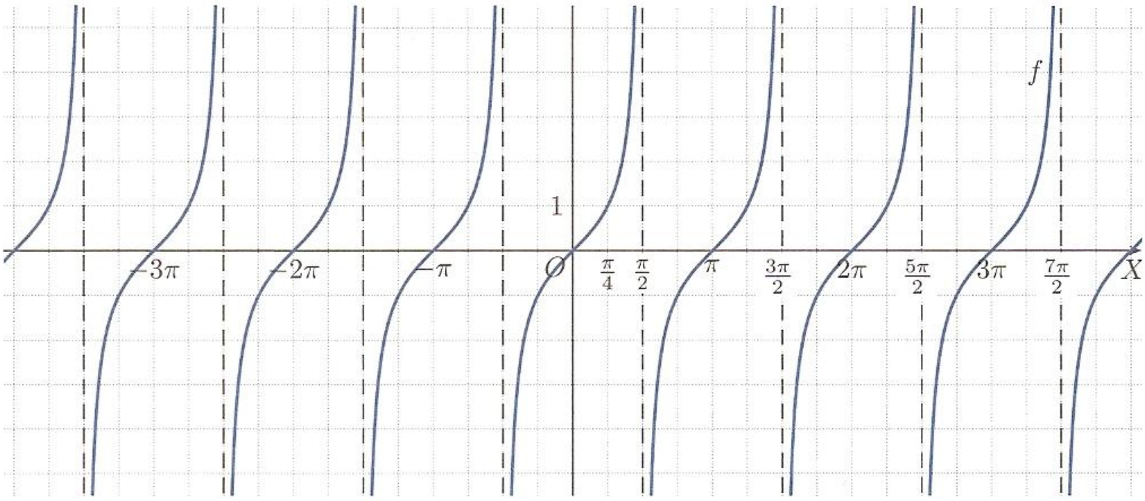
a) dla jakich argumentów spełniających warunek $0° \le x \le 360°$ funkcja jest malejąca i jednocześnie przyjmuje wartości ujemne?

b) która z liczb: $\cos 45°$, $\cos 182°$, $\cos 325°$ jest mniejsza od $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

c) rozwiąż: $\cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0° \le \alpha \le 360°$.

T. Wykres i własności funkcji tangens

Zadanie 1. Poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = tgx$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\right\}$.



Określ prawdziwość zdań na podstawie wykresu.

A. Okresem podstawowym funkcji $f(x) = tgx$ jest liczba $T = \pi$. TAK / NIE

B. Równanie $tgx = 0$ jest spełnione dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. TAK / NIE

C. Asymptotami wykresu funkcji f są proste $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$. TAK / NIE

D. Punkt $O(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = tgx$. TAK / NIE

Zadanie 2. Podaj rozwiązania równania należące do przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$.

a) $tgx = 0$

c) $tgx = -\sqrt{3}$

b) $tgx = 1$

d) $tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = tgx$, $x \in \langle 0;2\pi \rangle$,

oraz podaj:

- dziedzinę,

- przedziały, w których funkcja rośnie,

- przedziały, w których funkcja maleje,

- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,

- przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

- równania asymptot pionowych jej wykresu.

Zadanie 4. Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \text{tg}\, x$, wyznacz rozwiązanie równania:

a) $tg\, x = \sqrt{3}$,

b) $tg\, x = -\sqrt{3}$,

c) $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadanie 5. Wskaż wszystkie liczby x spełniające równanie:

a) $tg\,x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$,

b) $tg\,x = \sqrt{3}$ i $x \in \langle -3\pi; -2\pi \rangle$,

c) $tg\,x = -1$ i $x \in \langle 4\pi; 5\pi \rangle$,

Zadanie 6. Oblicz sumę pierwiastków równania należących do przedziału $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$.

a) $\operatorname{tg} x = 0$,

b) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

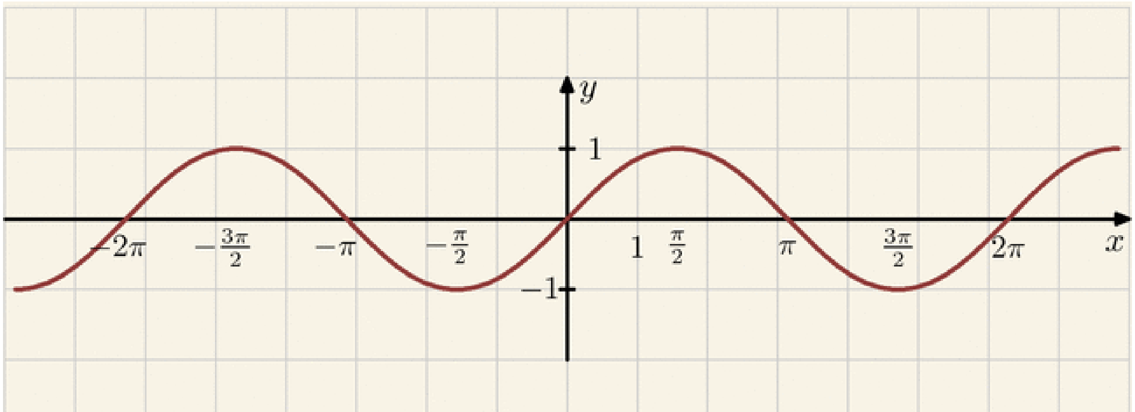
c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$,

d) $\operatorname{tg} x = 1$

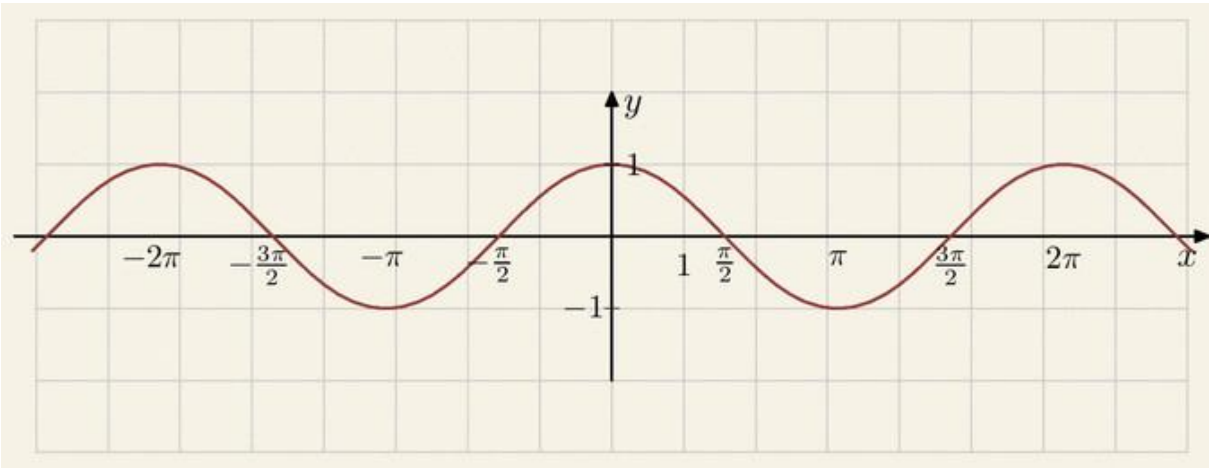
e) $\operatorname{tg} x = -1$,

<u>T: Przesunięcie wykresu funkcji trygonometrycznej o wektor</u>

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = sinx$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = sinx + 1$ i $h(x) = sinx - \frac{1}{2}$ oraz podaj ich zbiory wartości.

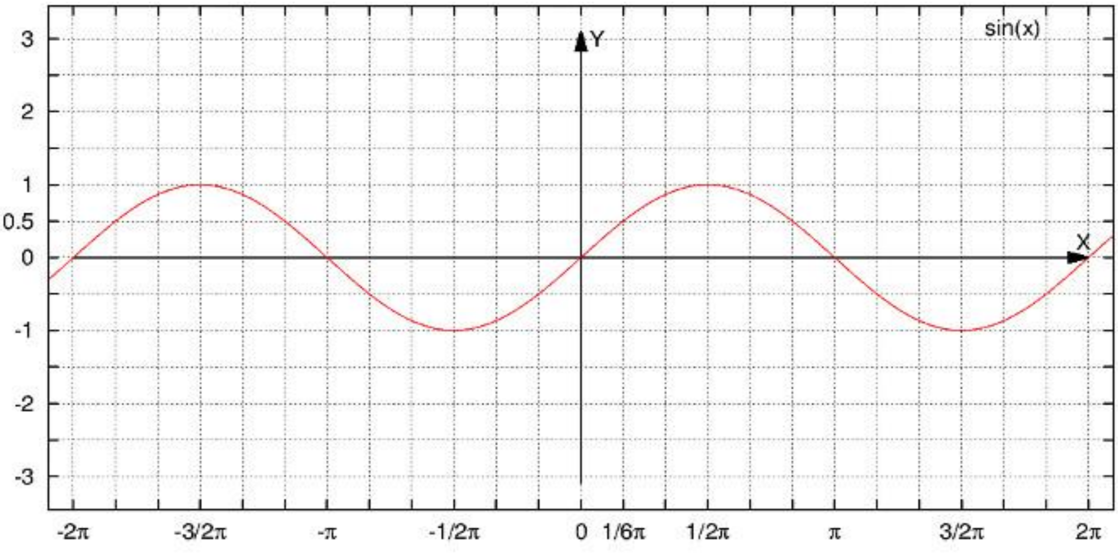


Zadanie 2. Dany jest wykres funkcji $f(x) = cosx$. Naszkicuj wykresy funkcji: $f(x) = cosx$, $g(x) = cosx + \frac{3}{2}$ i $h(x) = cosx - 1$ oraz podaj ich zbiory wartości.

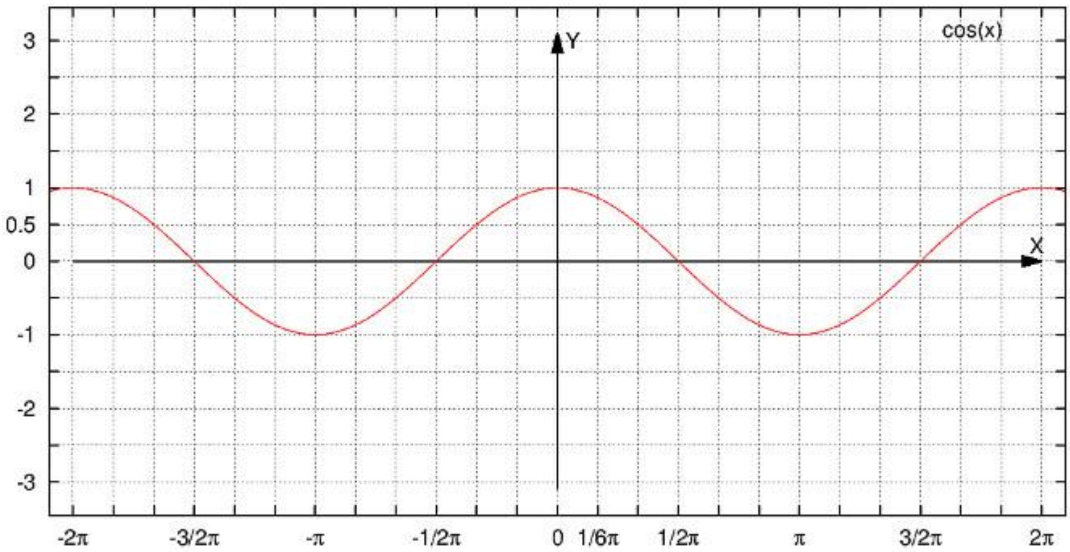


Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji *f*. Podaj jej zbiór wartości oraz okres podstawowy.

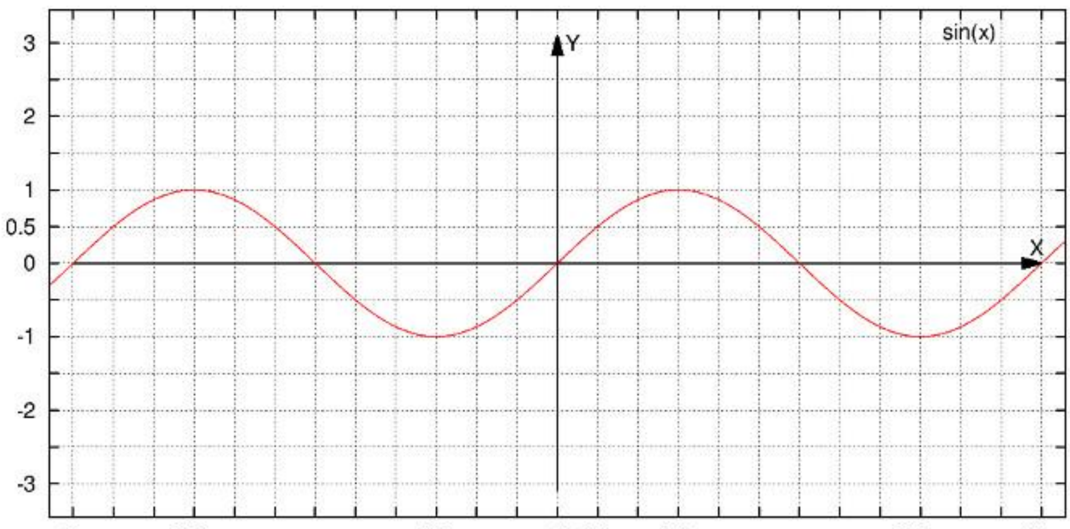
$a)\ f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$,



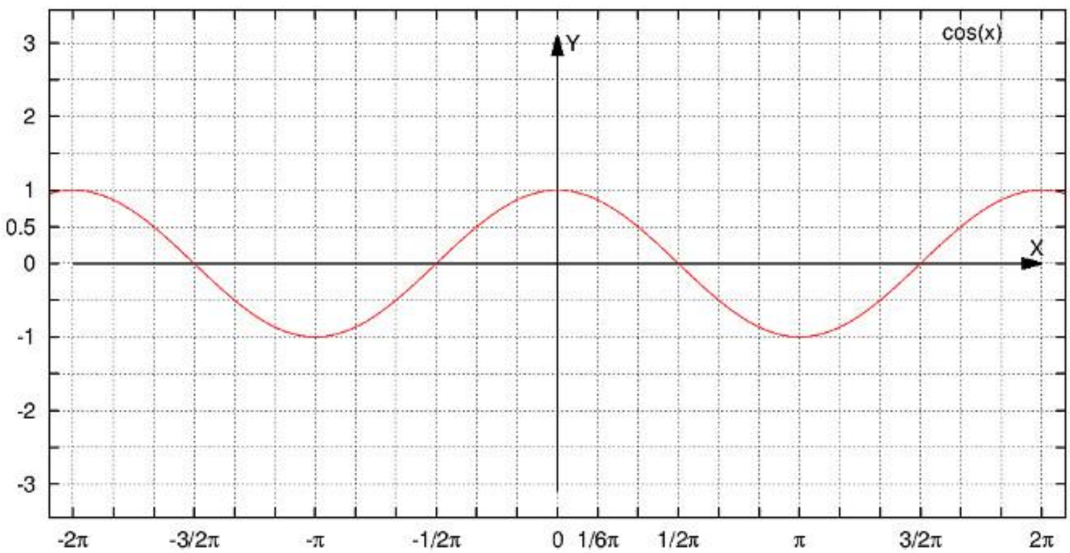
$b)\ f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$



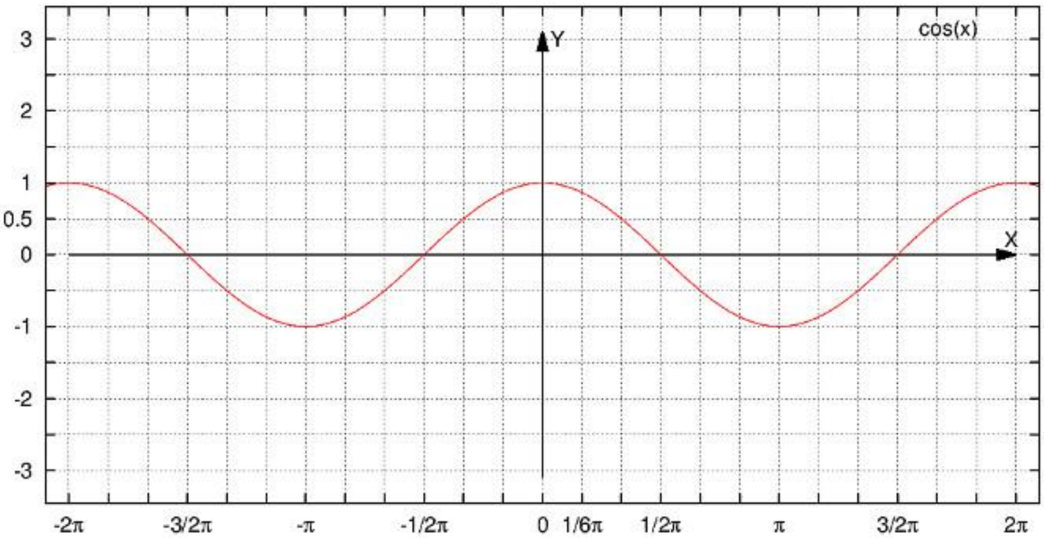
c) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



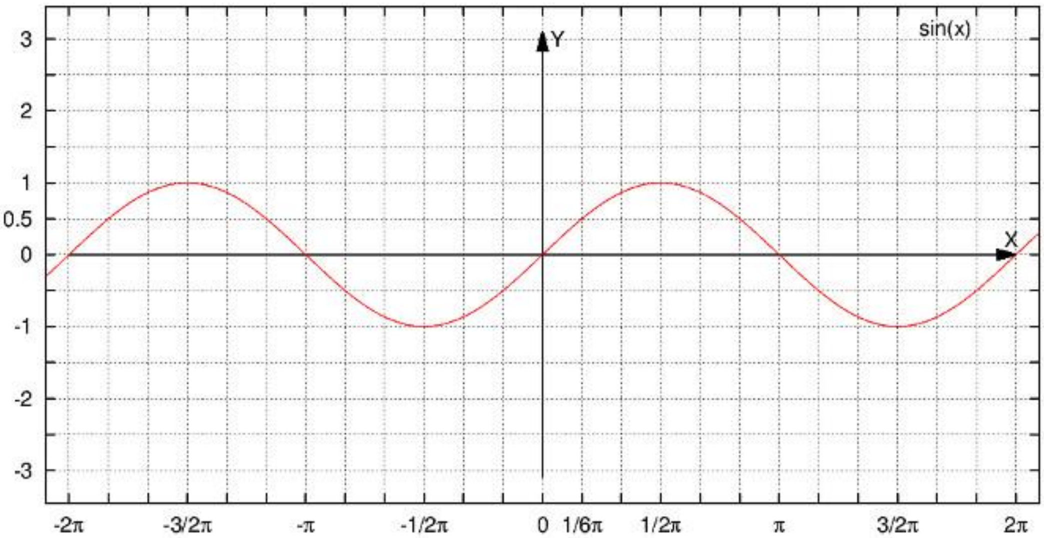
d) $f(x) = \cos(x + \pi),$



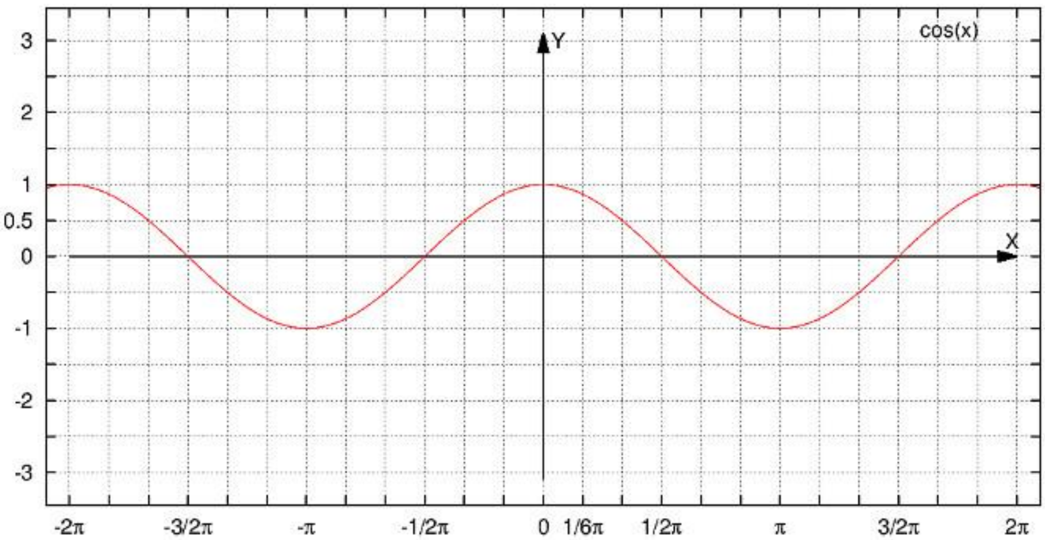
e) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



$f)$ $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

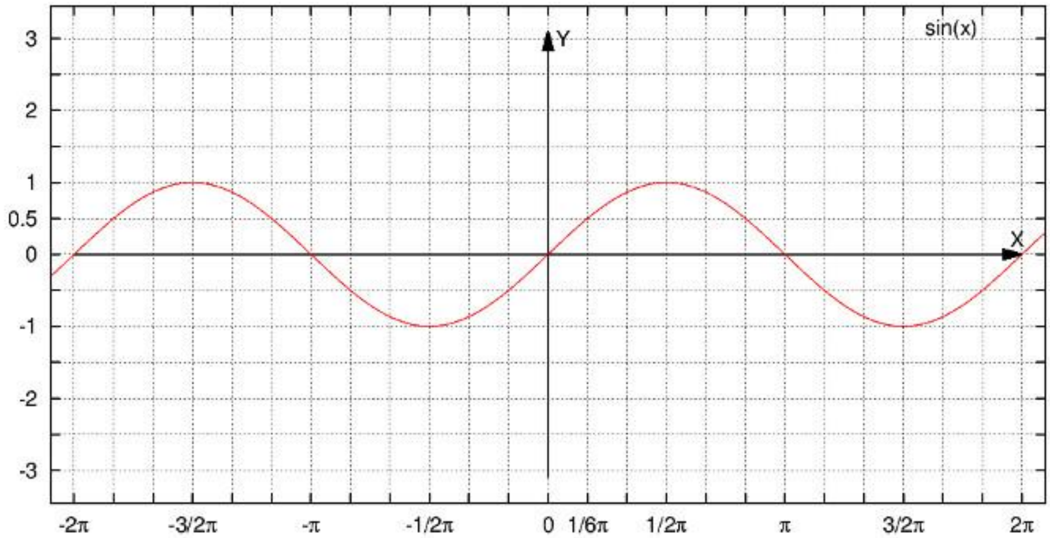


g) $f(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

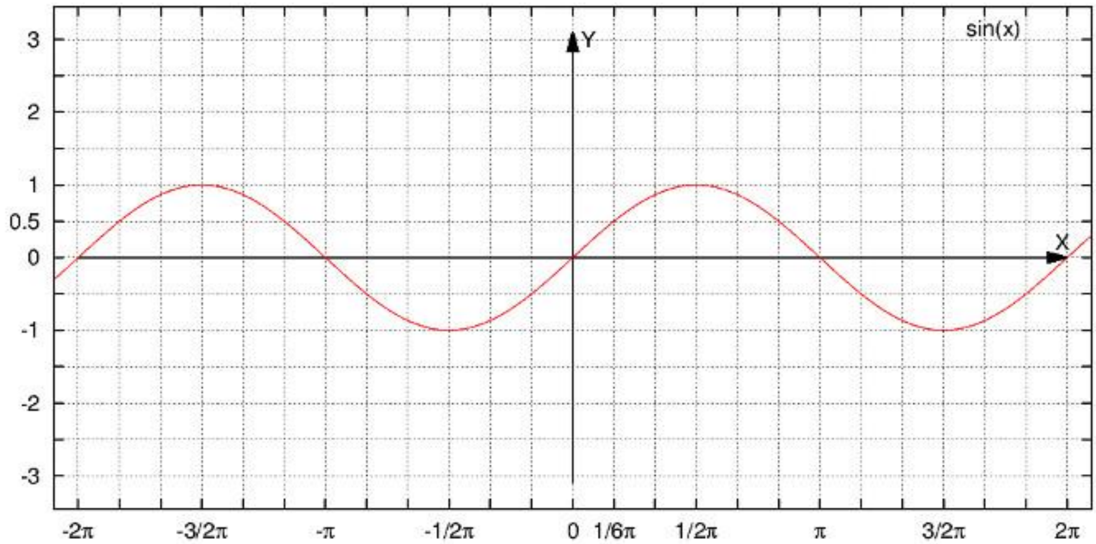


Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

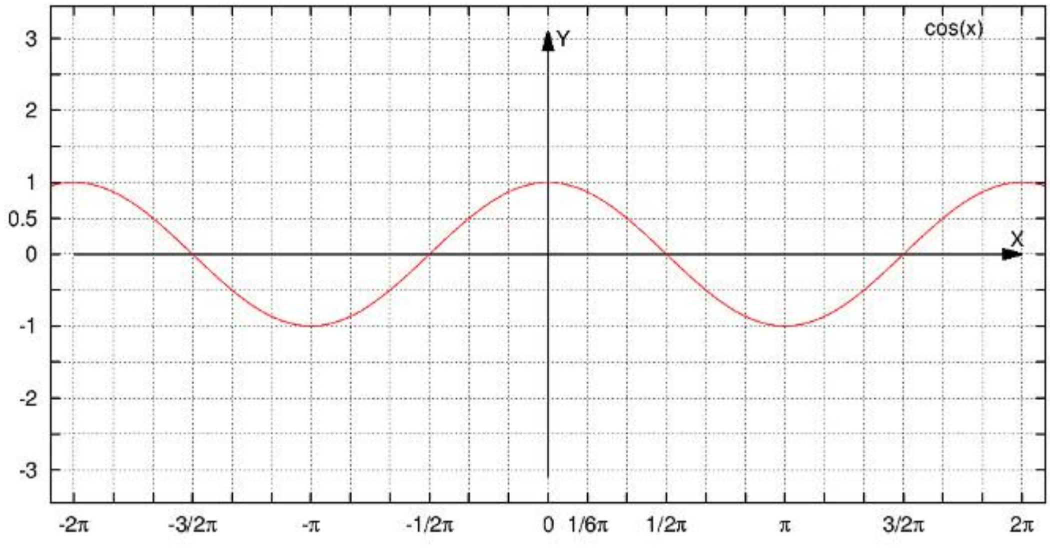
a) $f(x) = \sin x - 1$,



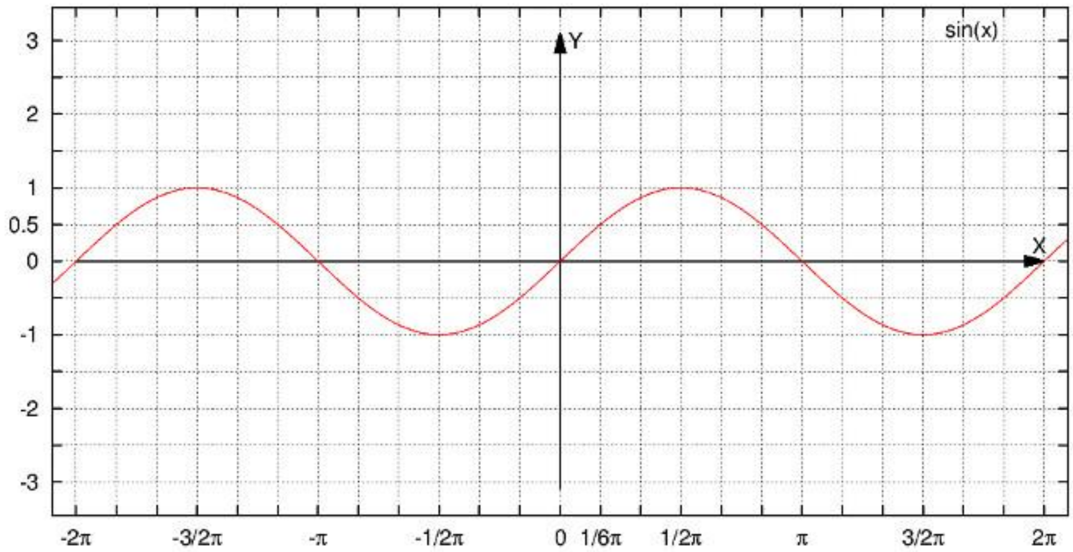
b) $f(x) = \sin x - 2$,



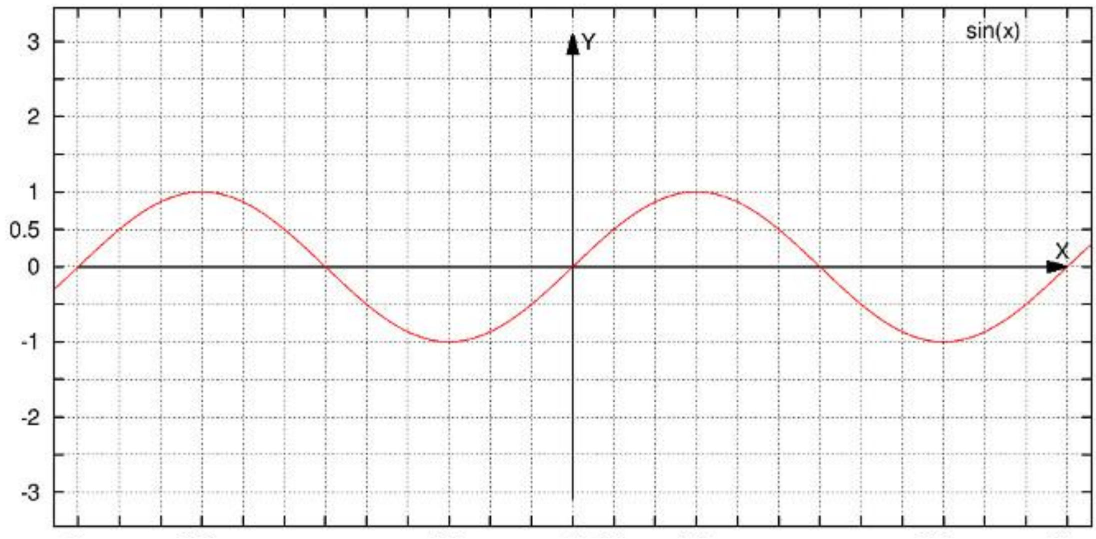
c) $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}$,



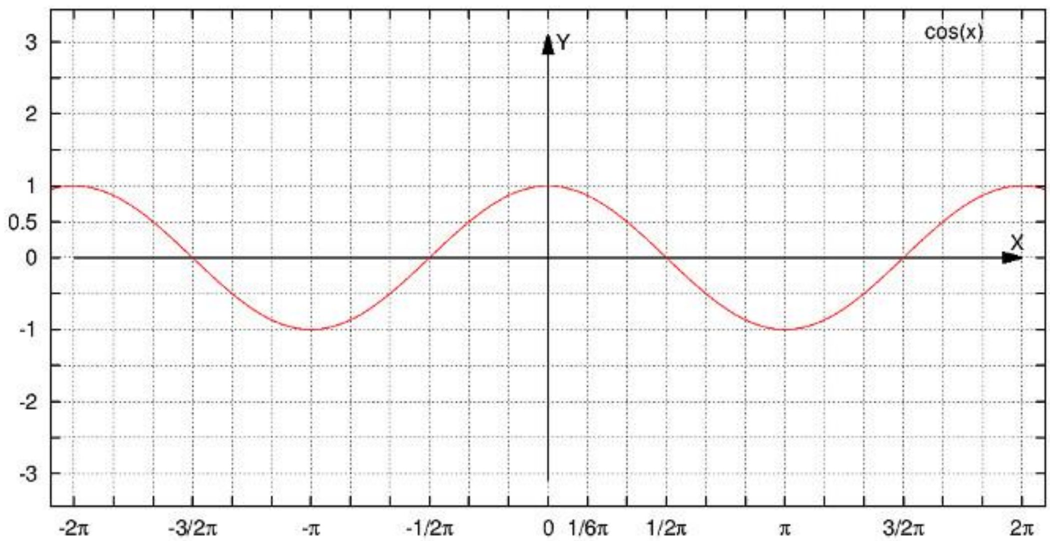
d) $f(x) = -\sin x - 2$



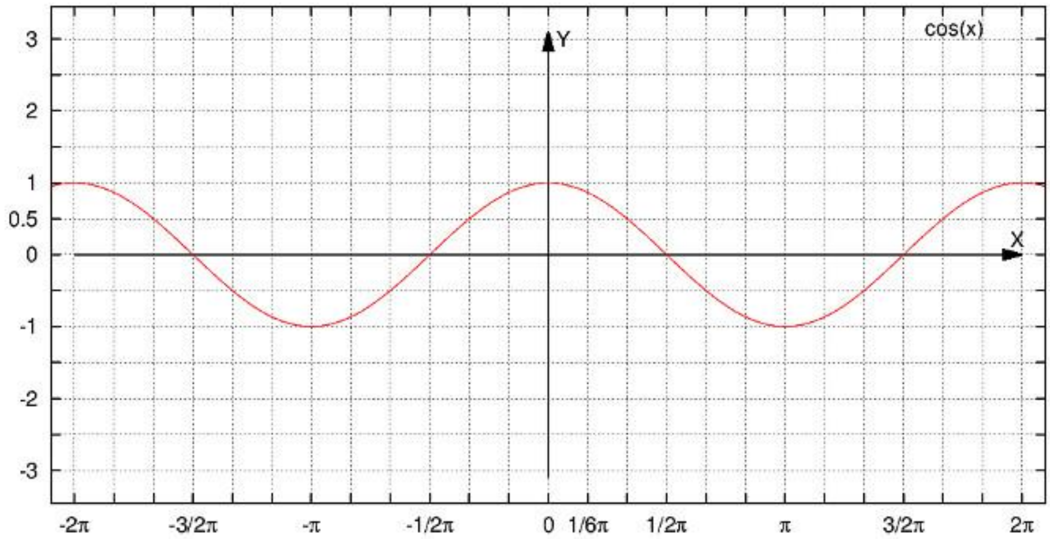
e) $f(x) = \sin x + 3,$



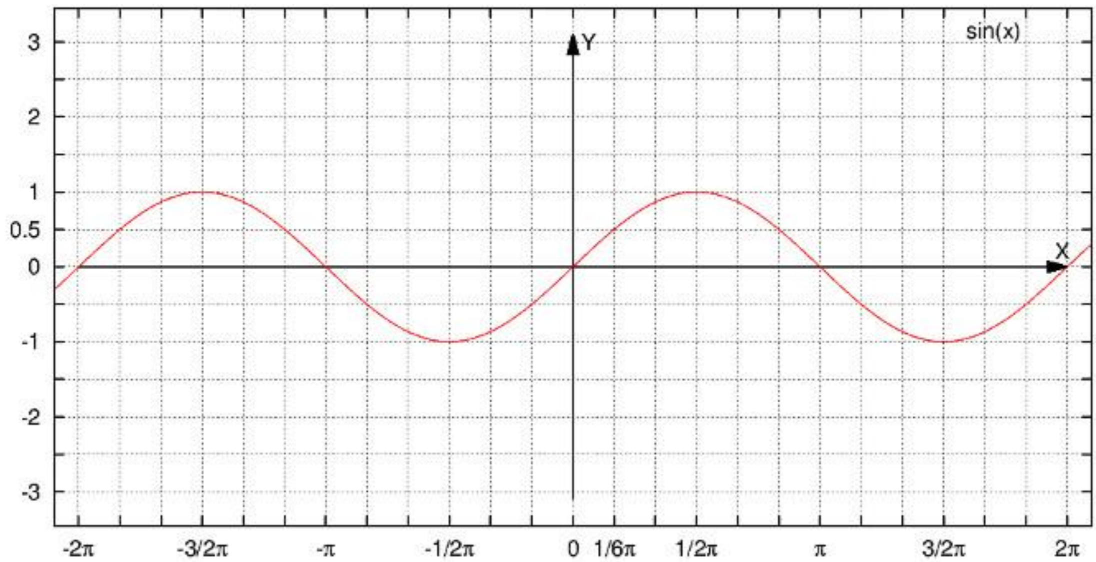
f) $f(x) = 2 - \cos x,$



g) $f(x) = \cos x + 2$,

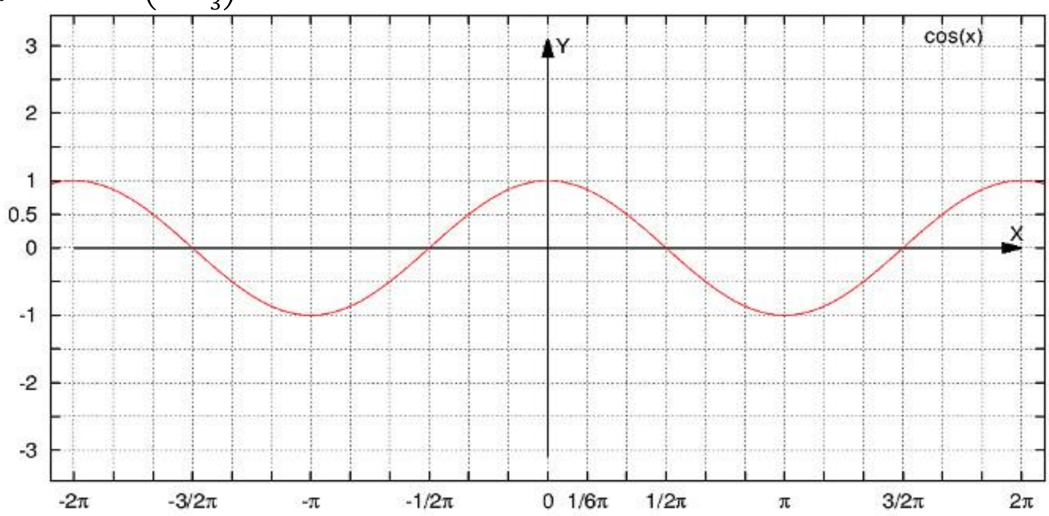


h) $f(x) = -\sin x - 3$.

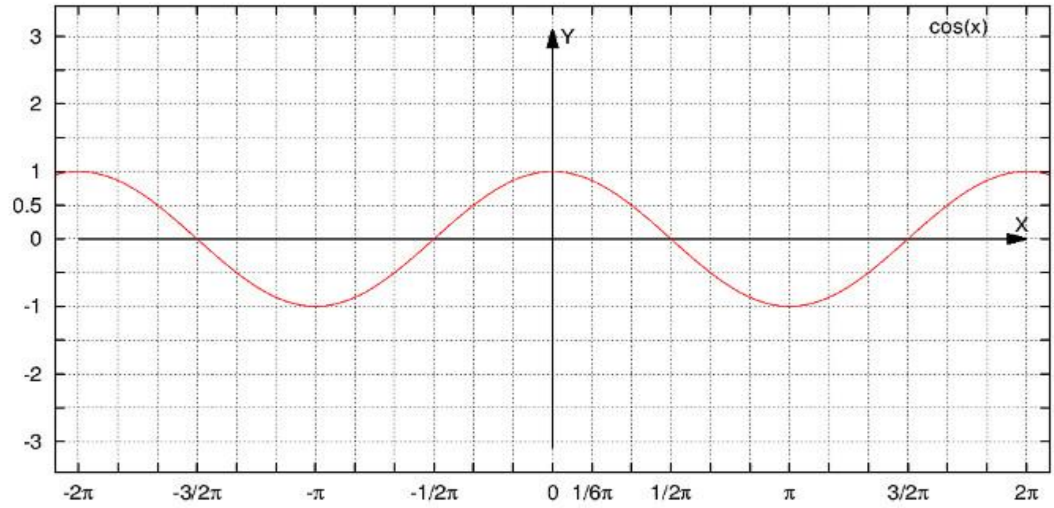


Zadanie 5. Naszkicuj wykres funkcji, podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

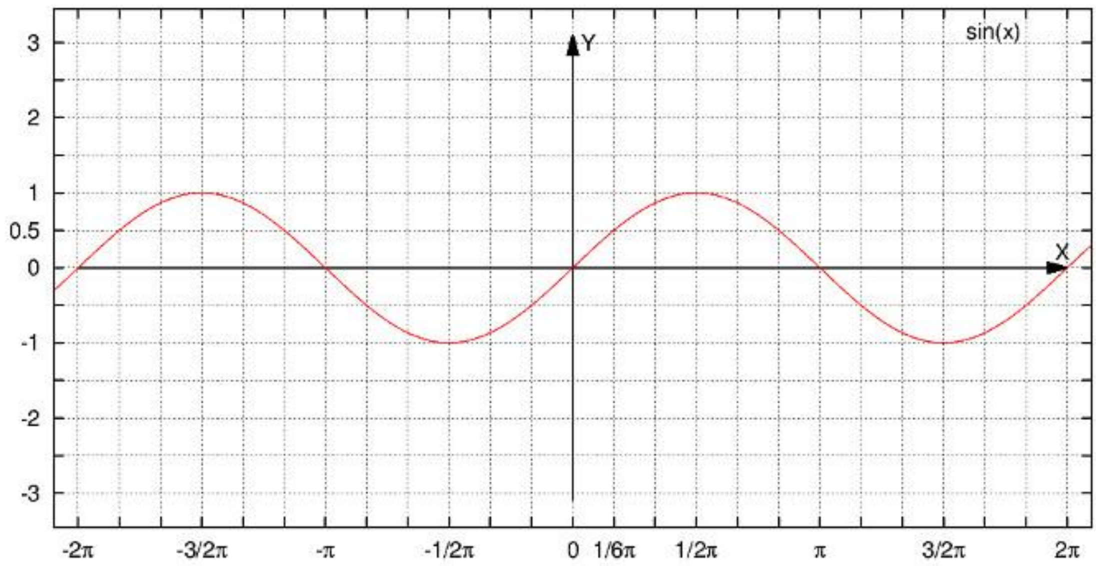
a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$,



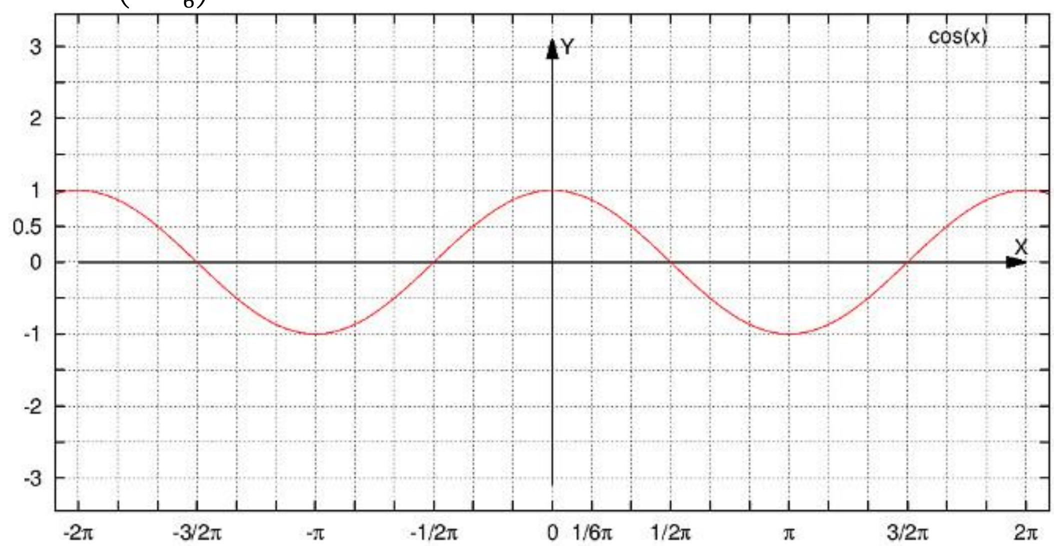
b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2,$



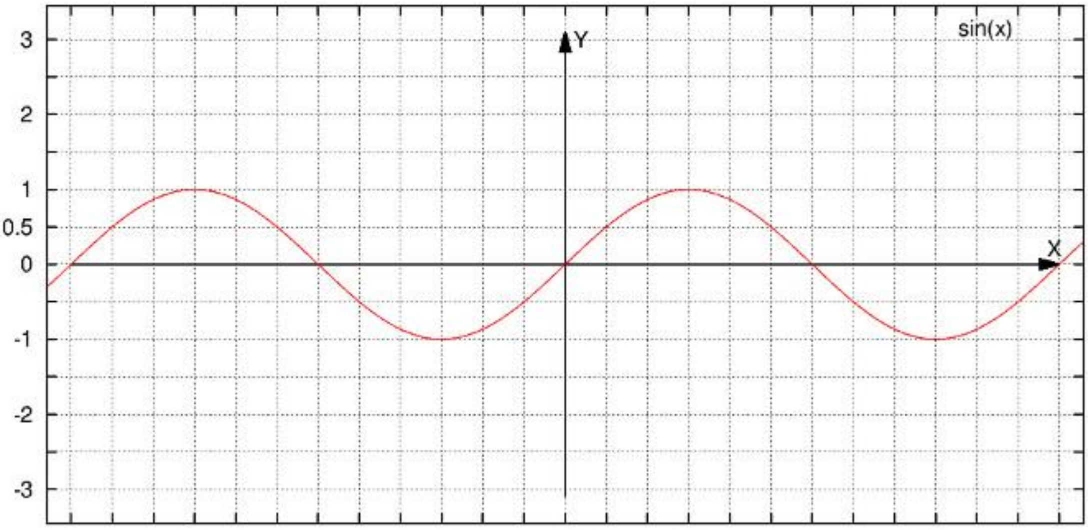
c) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2,$



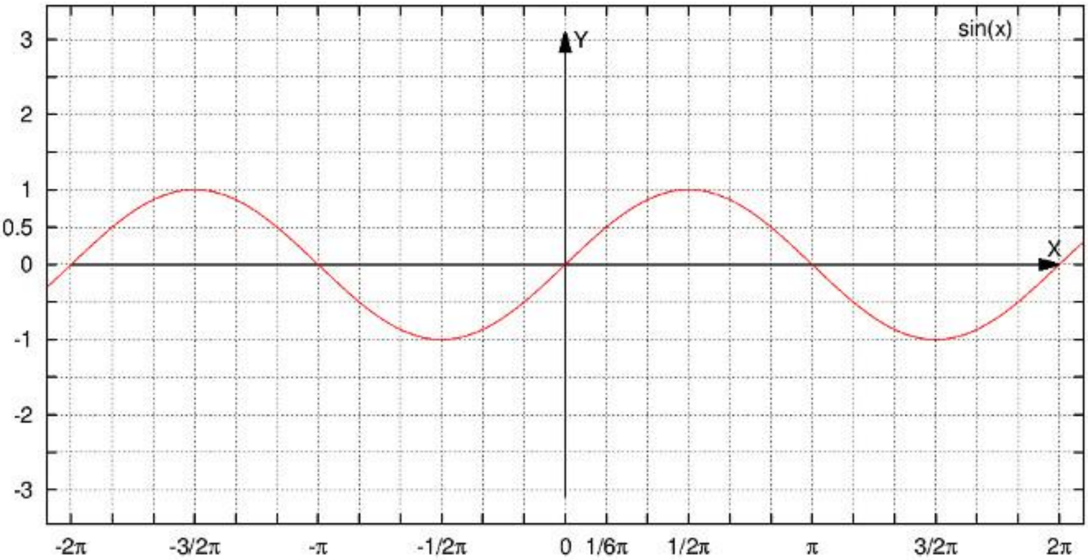
d) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2,$



e) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1,$

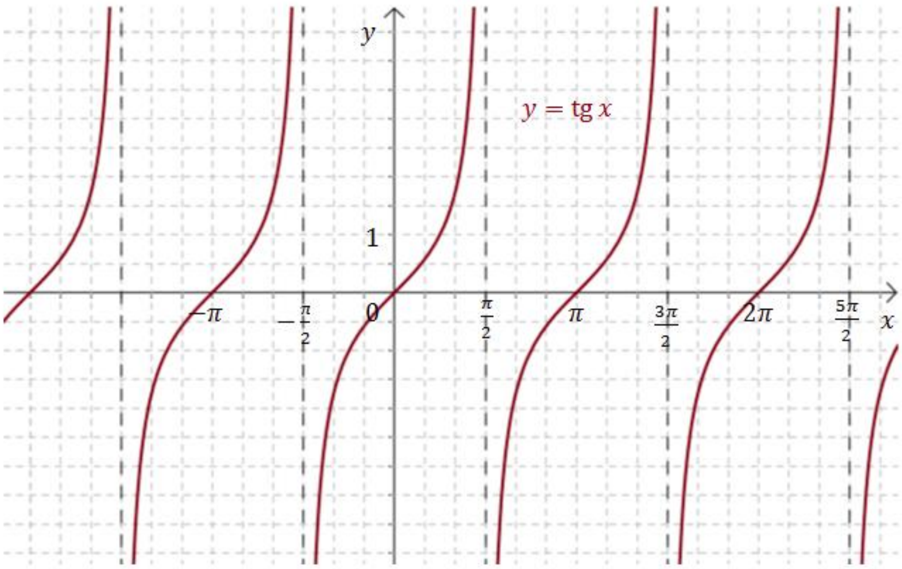


f) $f(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1\frac{1}{2}$

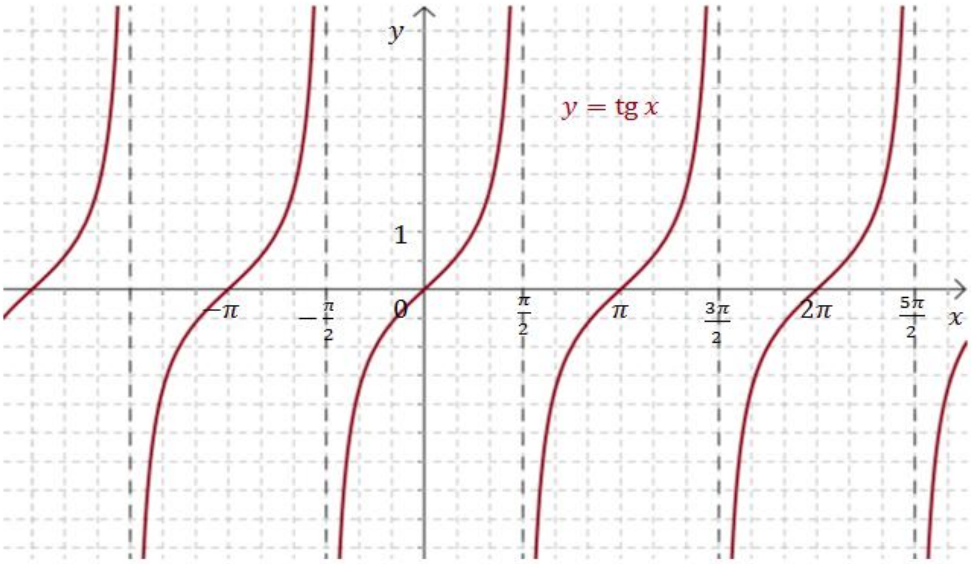


Zadanie 6. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej dziedzinę.

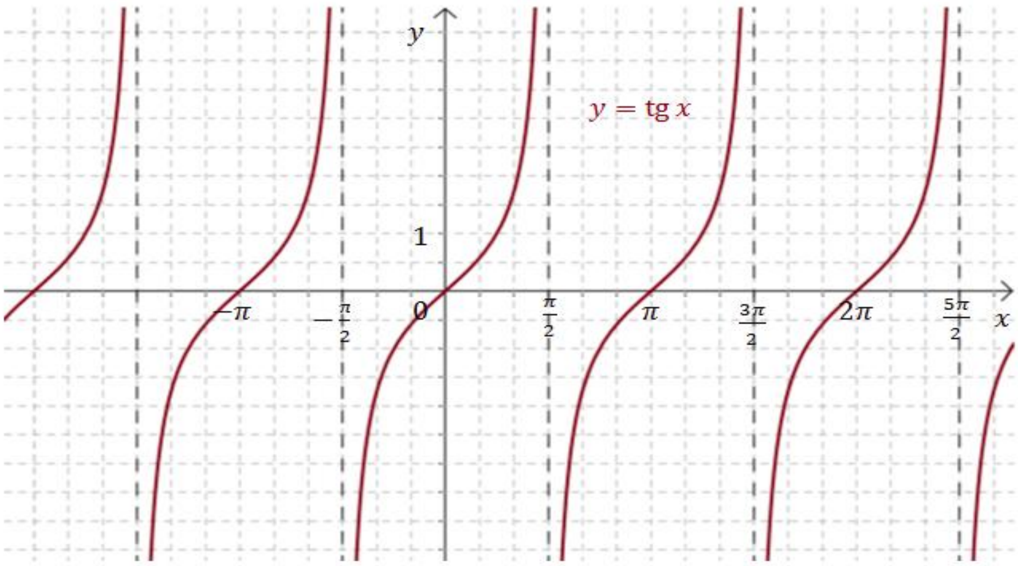
a) $f(x) = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$



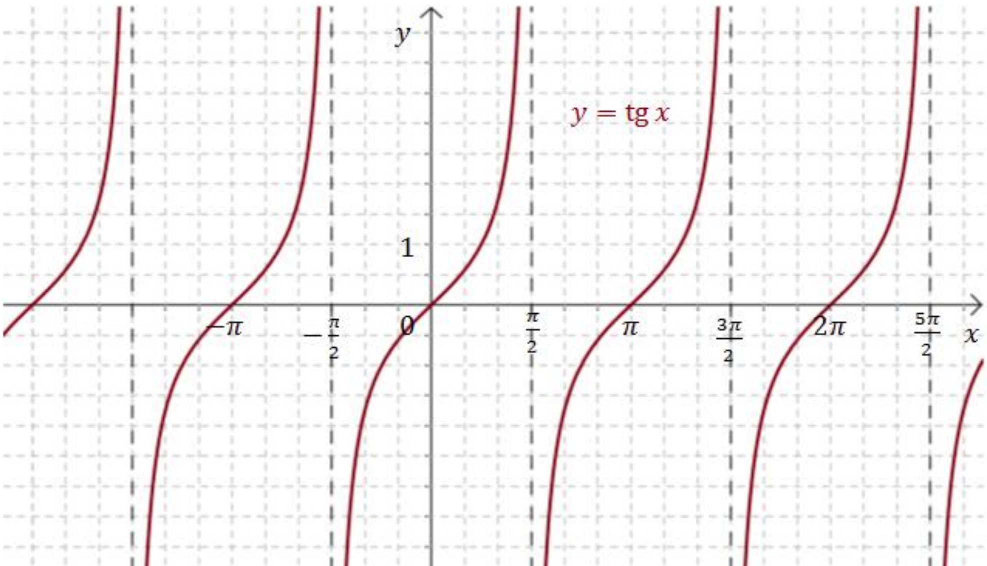
b) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$,



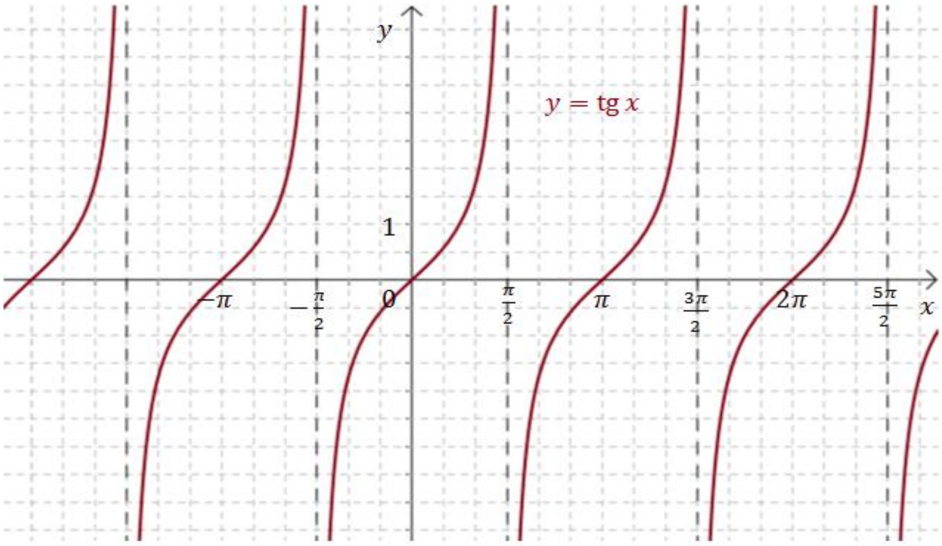
c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,



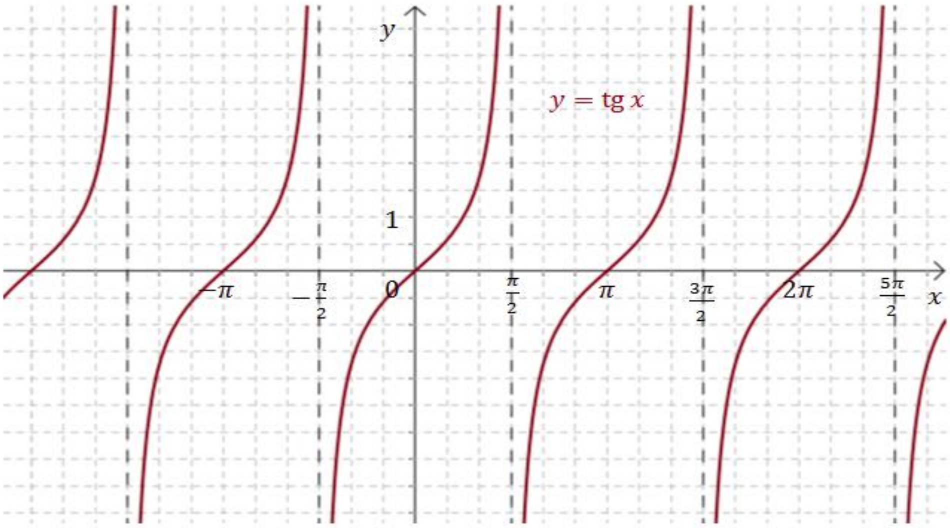
d) $f(x) = tgx - 2$



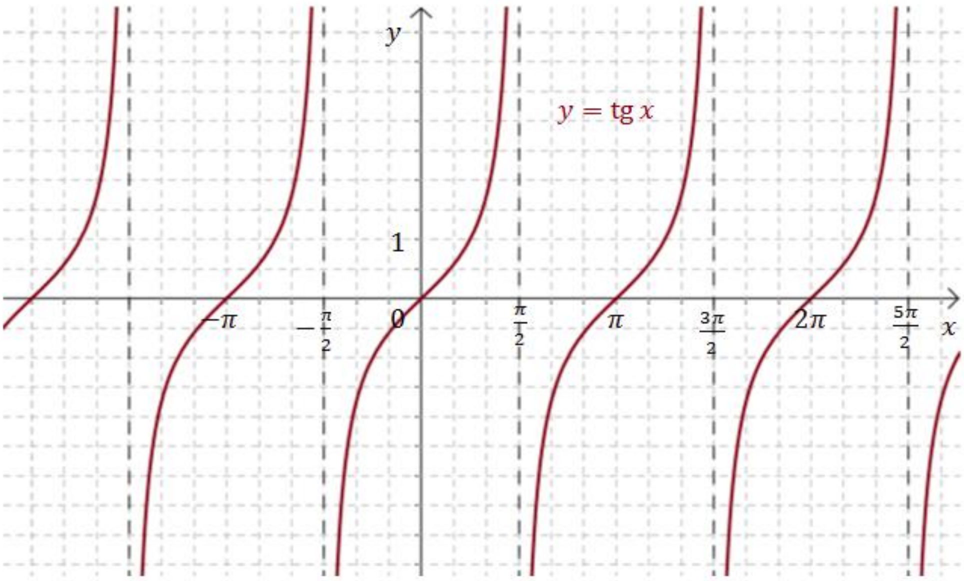
e) $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,



f) $f(x) = tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

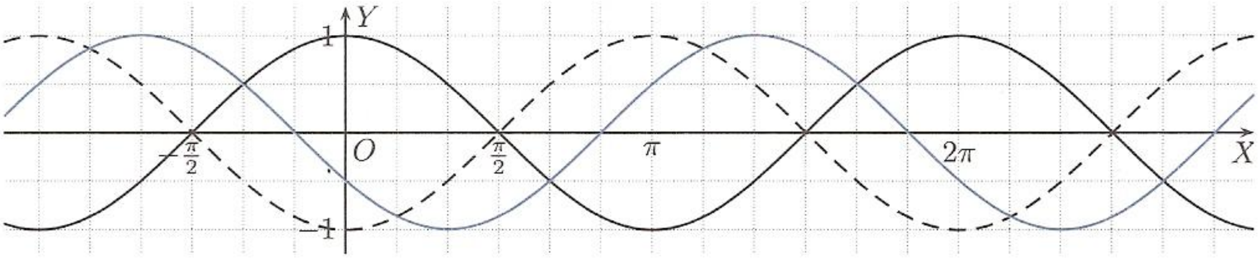


g) $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



Zadanie 7. Podpisz przedstawione poniżej wykresy funkcji:

$$f(x) = cosx, \quad g(x) = -cosx, \quad h(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

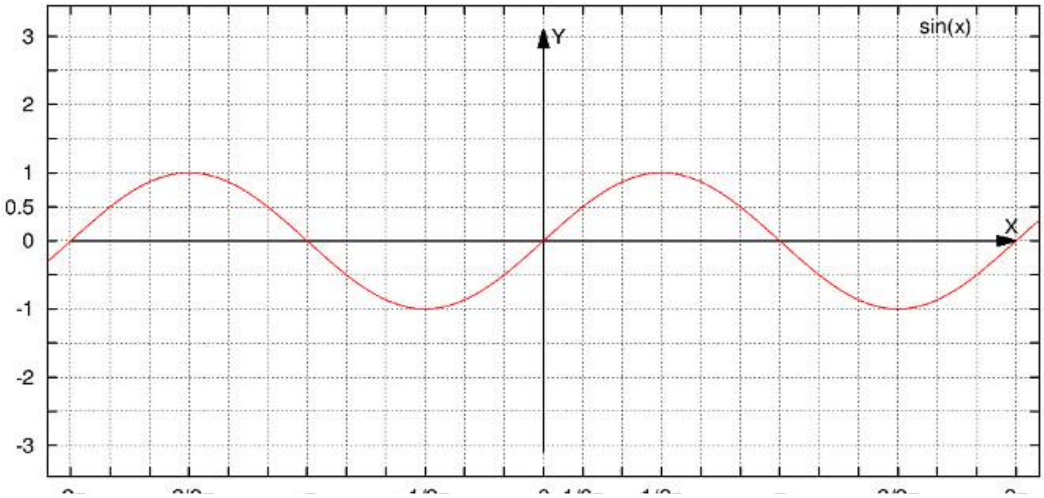


Dla jakich $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ zachodzi równość: $-\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$?

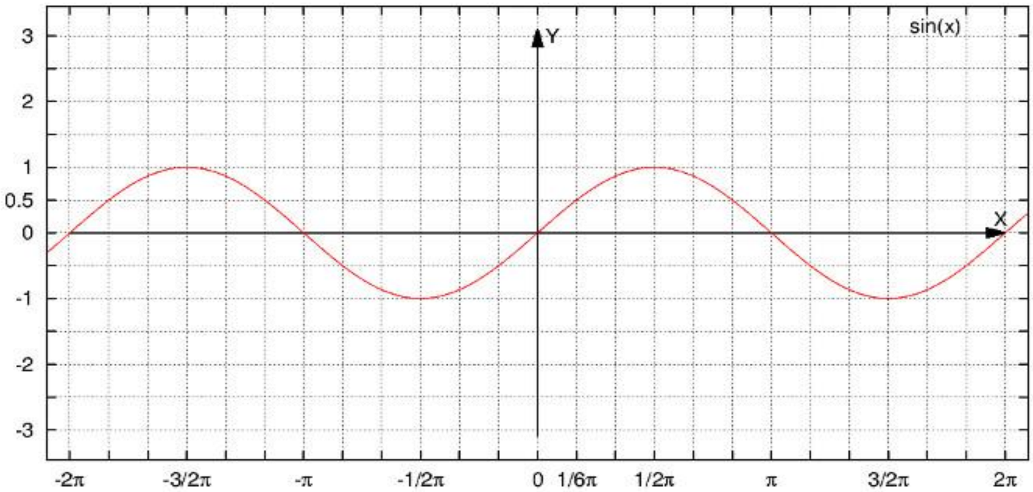
T: Przekształcenia wykresu funkcji trygonometrycznej $y = af(x)$

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji, podaj jej zbiór wartości i amplitudę jej wykresu.

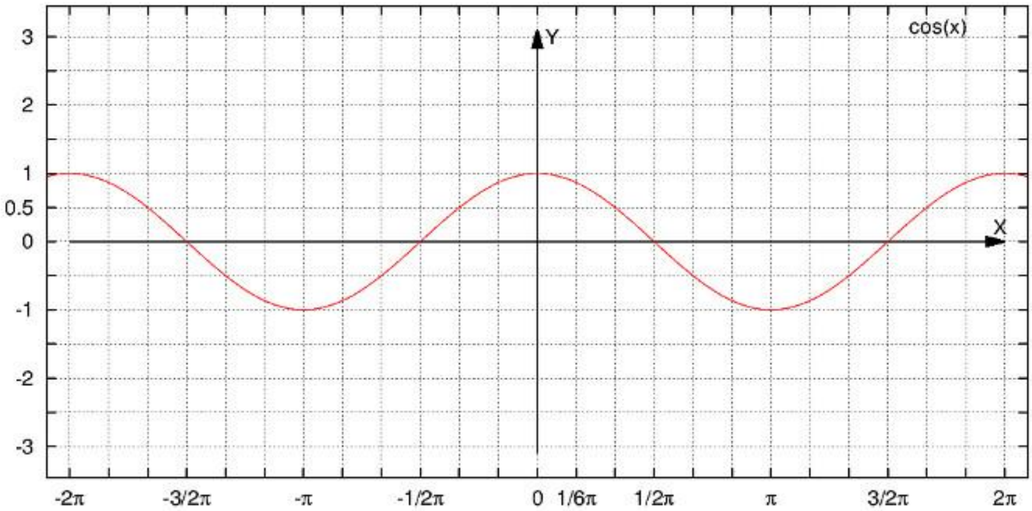
$a)\ f(x) = 3sinx,$



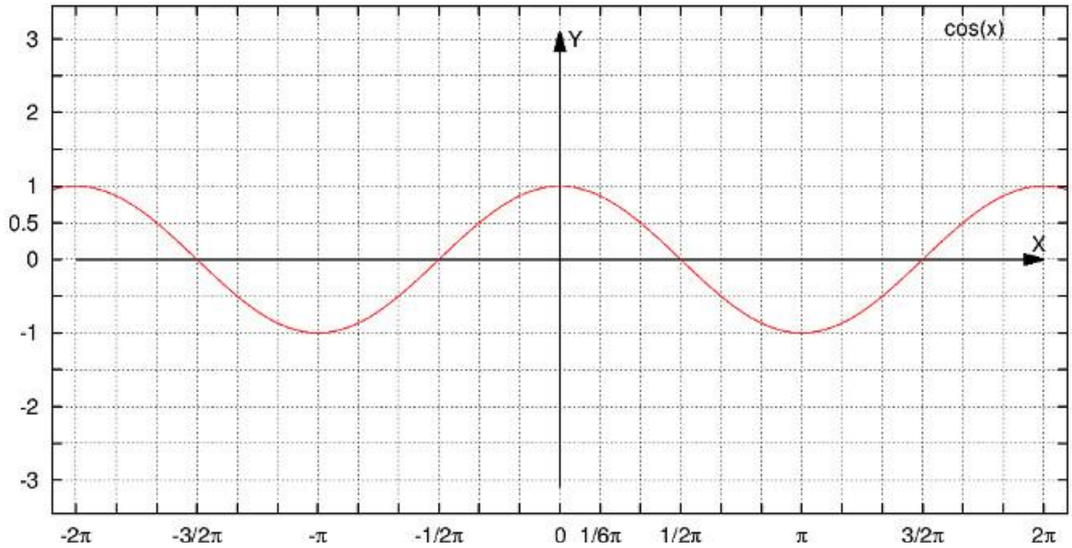
$b)\ f(x) = \frac{3}{2}sinx,$



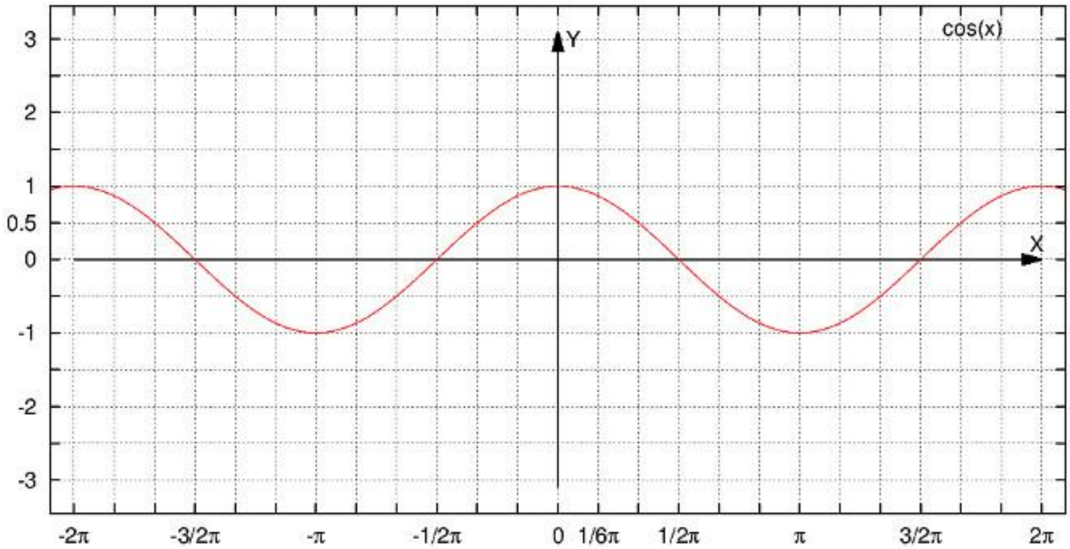
$c)\ f(x) = -\frac{1}{2}cosx$



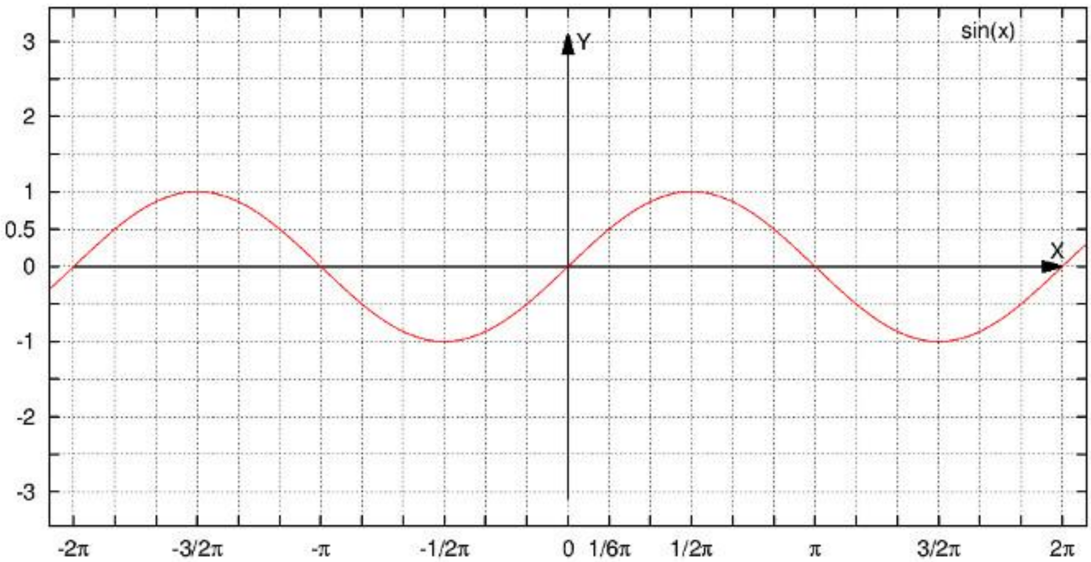
$d) \ f(x) = 4cosx$



$e) \ f(x) = -2cosx,$



$f) \ f(x) = -2{,}5 \ sinx.$



Zadanie 2. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji *f*, *g* i *h*.

a) $f(x) = 2\sin x$, $\quad g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $\quad h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

b) $f(x) = 3\cos x$, $\quad g(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\quad h(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $\quad g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad h(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

d) $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$, $h(x) = 2\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 3$

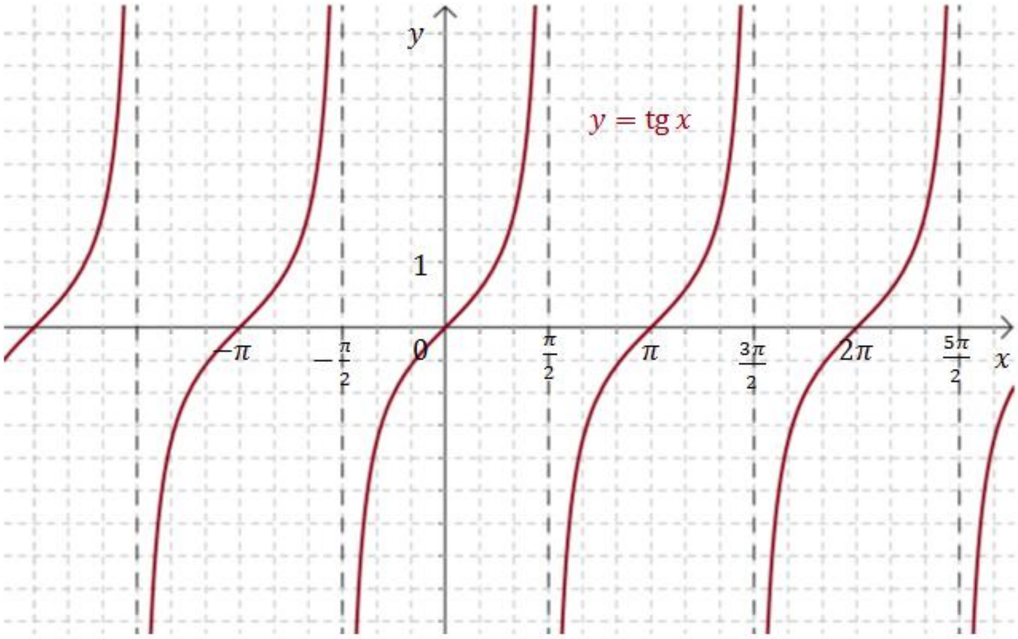
Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

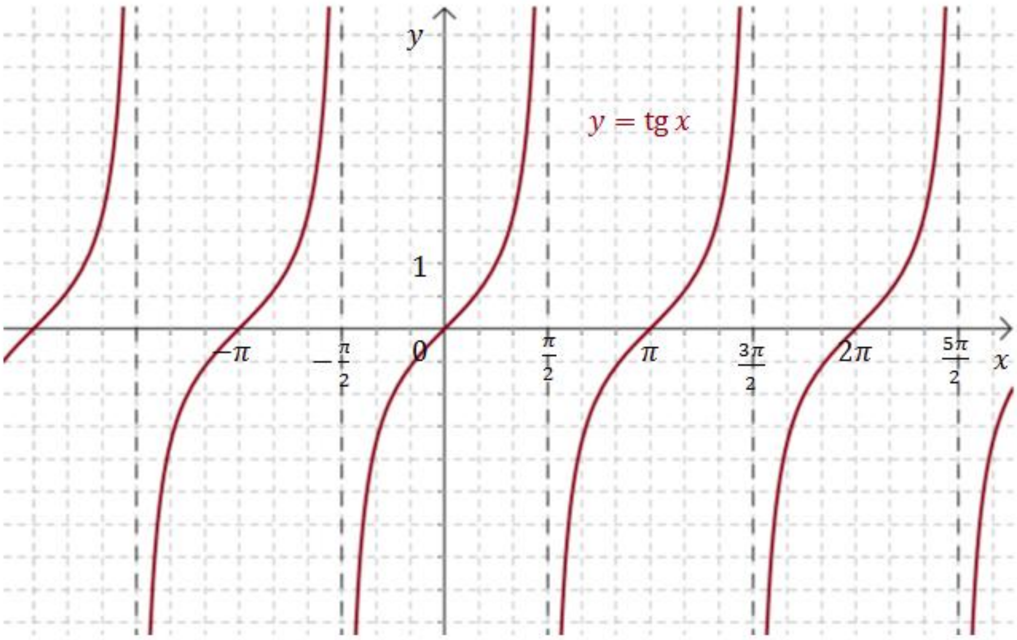
b) $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

Zadanie 5. Naszkicuj wykres funkcji *f*.

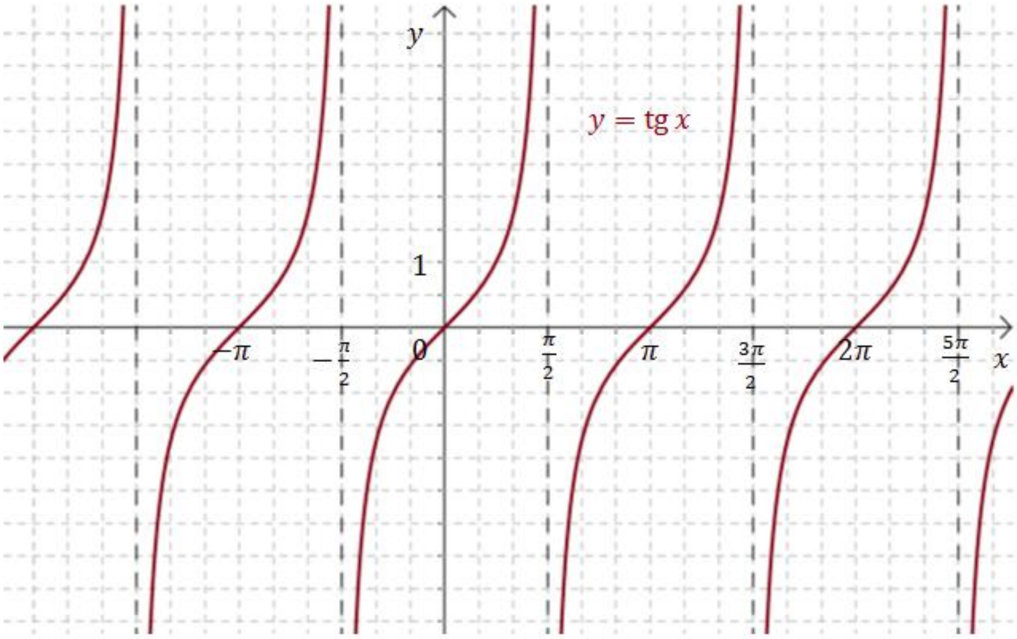
a) $f(x) = -2\operatorname{tg} x$,



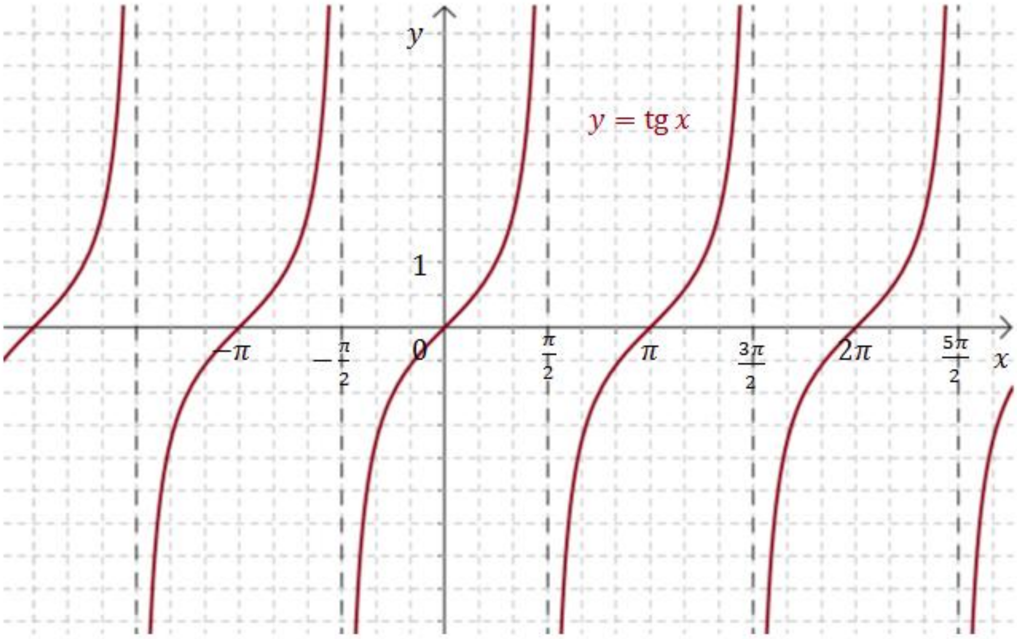
b) $f(x) = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$,



c) $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,



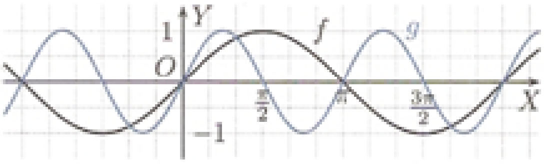
d) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,



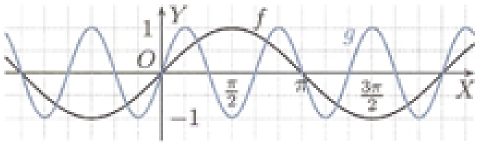
T: <u>Przekształcenia wykresu funkcji trygonometrycznej $y = f(ax)$</u>

Zadanie 1. Podaj okres podstawowy T funkcji g (jej wykres przedstawiono kolorem niebieskim, kolorem czarnym narysowano wykres funkcji $f(x) = sinx$).

e) $f(x) = sin2x$



b) $f(x) = sin3x$



Zadanie 2. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = sin\frac{1}{2}x$ i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji f, podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $f(x) = cos4x$,

b) $f(x) = cos\frac{1}{2}x$,

c) $f(x) = -cos\frac{1}{2}x$,

d) $f(x) = sin3x$,

e) $f(x) = sin\frac{1}{3}x$,

f) $f(x) = -sin\frac{1}{2}x$.

Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji *f* . Podaj jej okres podstawowy i miejsca zerowe.

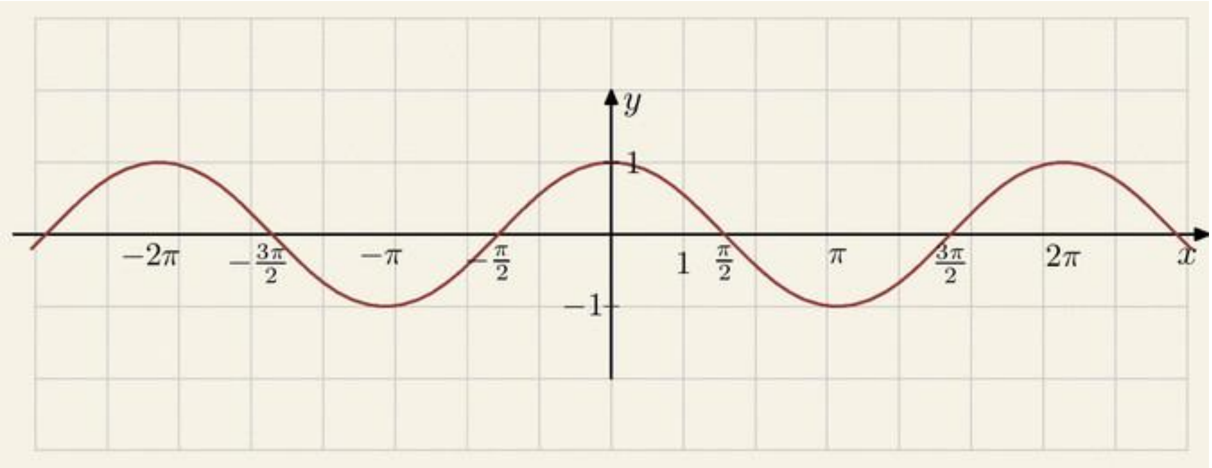
a) $f(x) = tg\frac{x}{2}$,

b) $f(x) = tg3x$,

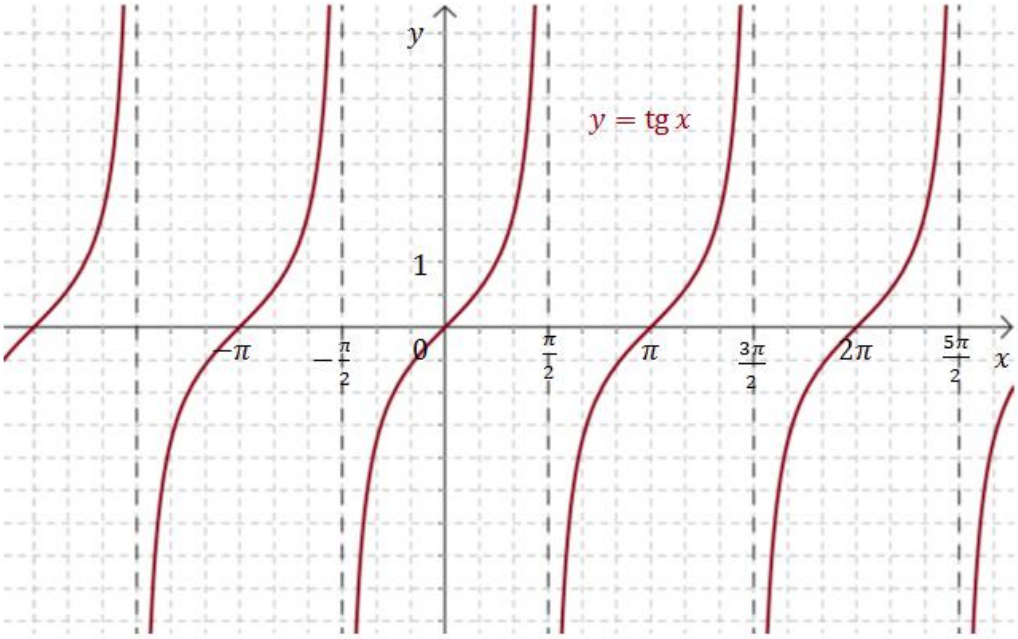
T: Przekształcenia wykresu funkcji trygonometrycznej $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej okres podstawowy.

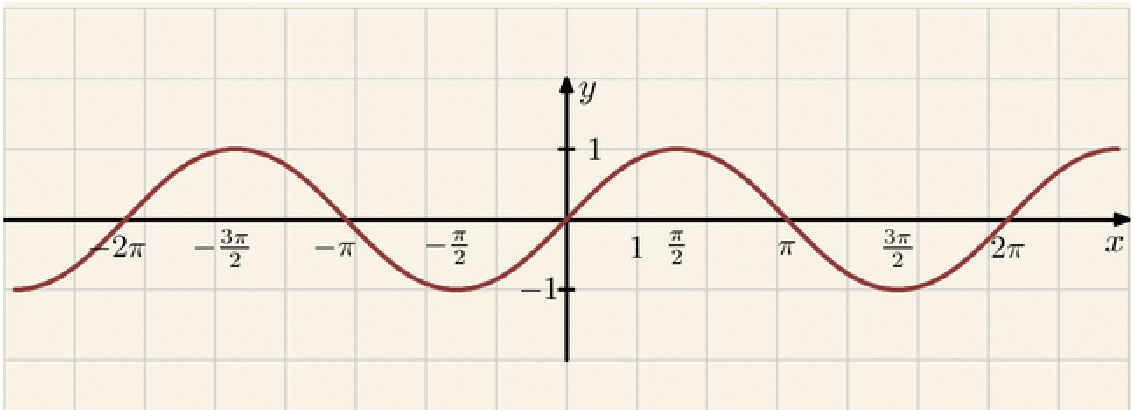
$a)\ f(x) = |cosx|$



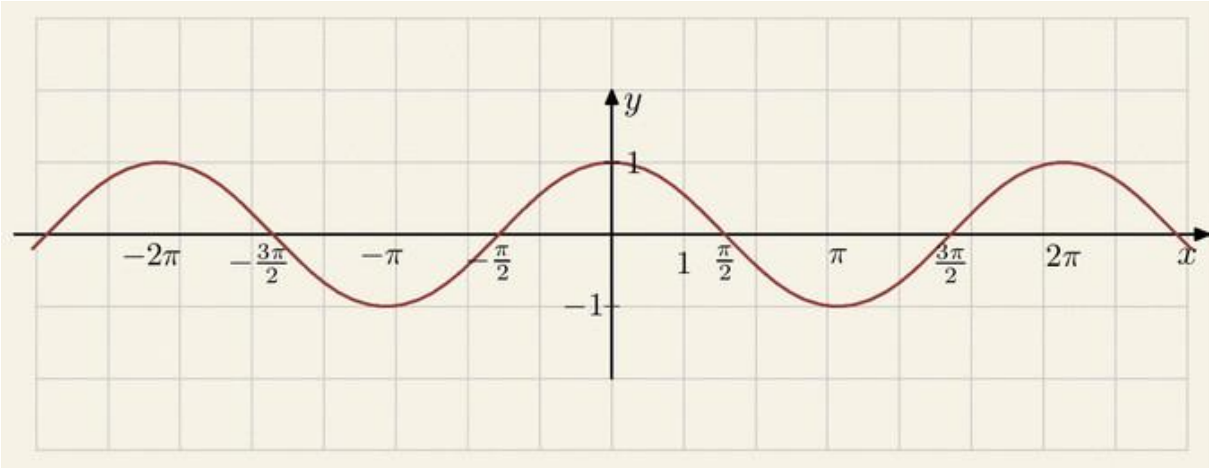
$b)\ f(x) = |tgx|$



$c)\ f(x) = -|sinx|$



Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |2cosx - 1|$ i podaj jej okres podstawowy.



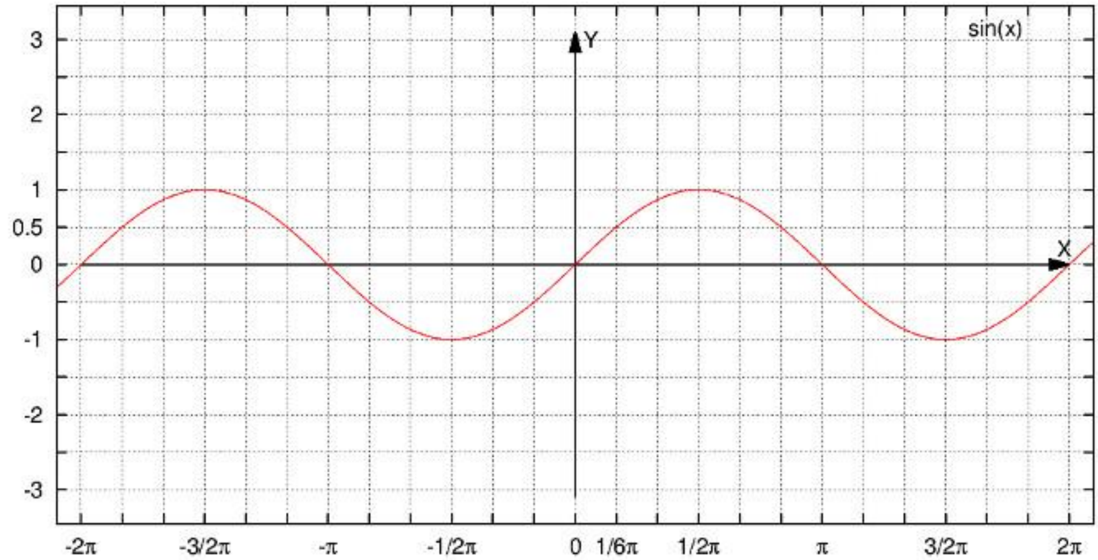
Zadanie 3. Naszkicuj wykres funkcji $y = |\sin x| - 1$. Na podstawie wykresu omów własności.

Zadanie 4. Naszkicuj wykresy funkcji f, podaj dziedzinę, miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji $f(x) = -|sinx|$.

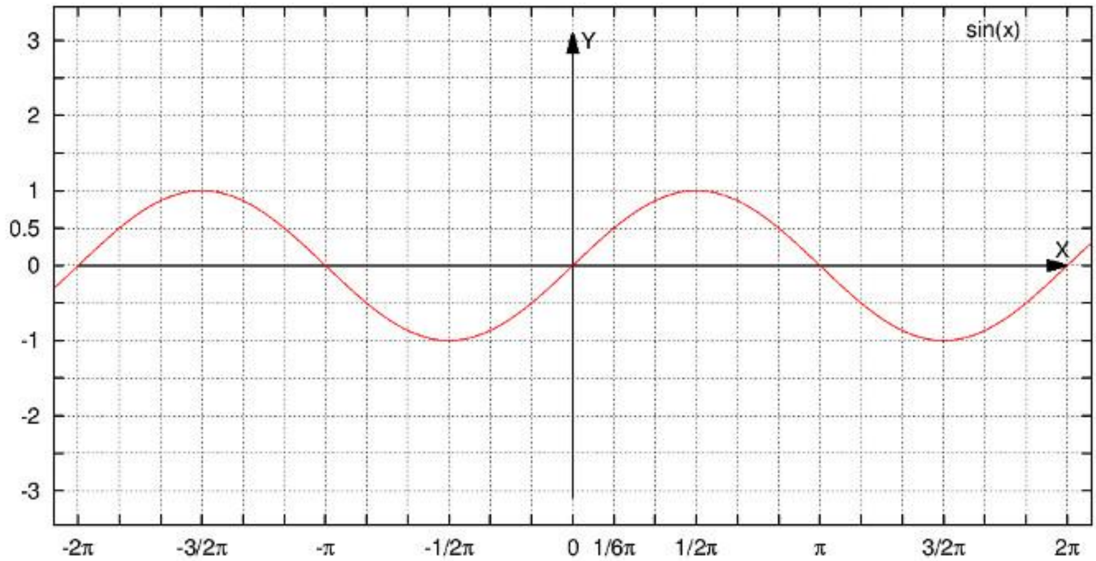
Zadanie 5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = sin|x|$. Czy funkcja ta jest okresowa?

Zadanie 6. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$



b) $f(x) = 2|\sin x| - 1,$



T: Równania i nierówności trygonometryczne

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

$a)$ $sin3x = 1,$ b) $tg4x = -1,$

c)$cos2x = -1,$ d) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$

e) $cos4x = \frac{1}{2},$ f) $sin^2 3x = 1,$

Zadanie 2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $sin^2x = 3sinx$.

$$sin^2x - 3sinx = 0$$
$$sinx(sinx - 3) = 0$$

$sinx = 0$ lub $sinx = 3$

Równanie $sinx = 3$ jest sprzeczne. Równanie $sinx = 0$ jest spełnione dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$ – jest to rozwiązanie równania wyjściowego.

Rozwiąż równanie.

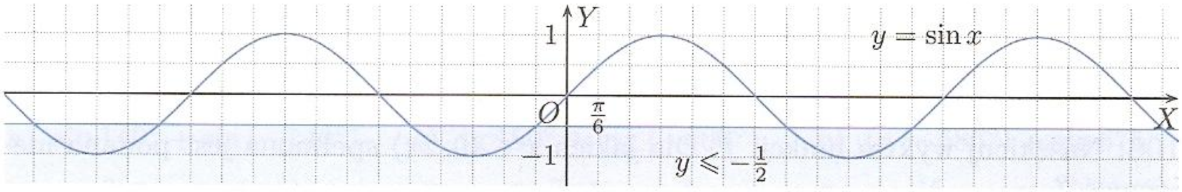
a) $sin^2x = -sinx$,

b) $sin^3x + sinx = 0$,

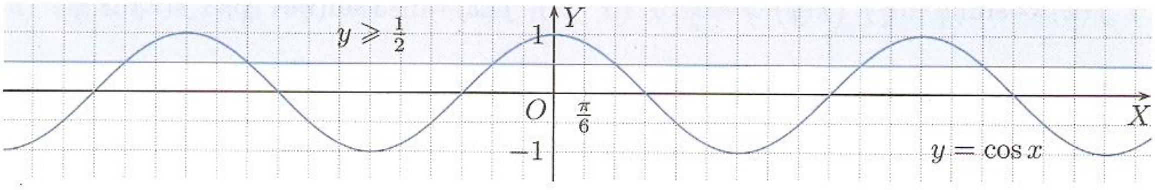
c) $2cos^3x - cosx = 0$,

d) $tg^3x = tgx$.

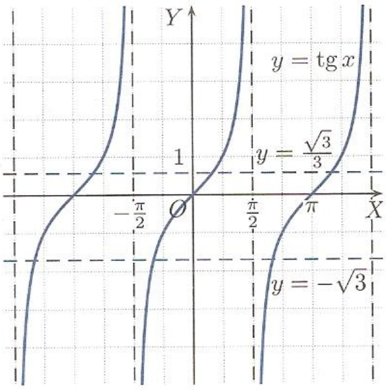
Zadanie 3. a) Odczytaj rozwiązanie nierówności $sinx \leq -\frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -2\pi; 3\pi \rangle$.



b) Odczytaj rozwiązanie nierówności $cosx \geq \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -2\pi; 3\pi \rangle$.



Zadanie 4. Dla $x \in \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ odczytaj rozwiązanie nierówności.



a) $tgx > 0$

b) $tgx > \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $tgx < -\sqrt{3}$.

Zadanie 5. Rozwiąż graficznie nierówność

a) $\sin x > \frac{1}{2},\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$,

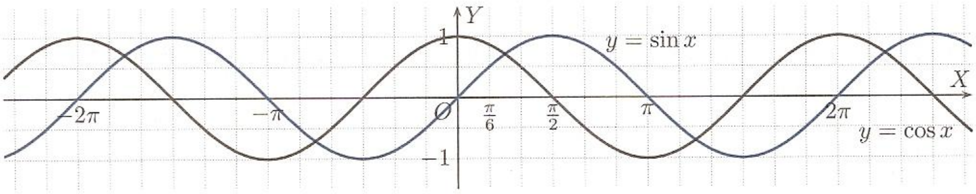
b) $\cos x < 0,\ x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$,

$c)\quad \operatorname{tg} x < 1,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

$d)\ \sin x > \frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$;

$e)\quad tgx \le 1$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$

Zadanie 6. Korzystając z poniższego rysunku, podaj rozwiązania nierówności $sinx \leq cosx$.



a) dla $x \in (-\pi; \pi)$,

b) dla $x \in$ **R**.

T: Powtórzenie wiadomości - funkcje trygonometryczne

Zadanie 1. Uzupełnij tabelę

Miara łukowa		$\frac{2}{3}\pi$		$\frac{5}{12}\pi$		7π
Miara kątowa	300°		120°		9°	

Zadanie 2. Zaznacz w układzie współrzędnych (każdy w osobnym) kąty skierowane

a) 405°

b) -150°

Zadanie 3. Określ miarę kąta głównego dla

a) $\alpha = 900^{\circ}$

b) $\alpha = -100^{\circ}$

Zadanie 4. Określ z tablic korzystając z własności funkcji trygonometrycznych wartość

$\sin 223^{\circ}$

$\cos(-105^{\circ})$

$tg(-325)^{\circ}$

$\sin(-192^{\circ})$

$\cos 840^{\circ}$

$tg(-155^{\circ})$

$\sin 1125^{\circ}$

$\cos(-302^{\circ})$

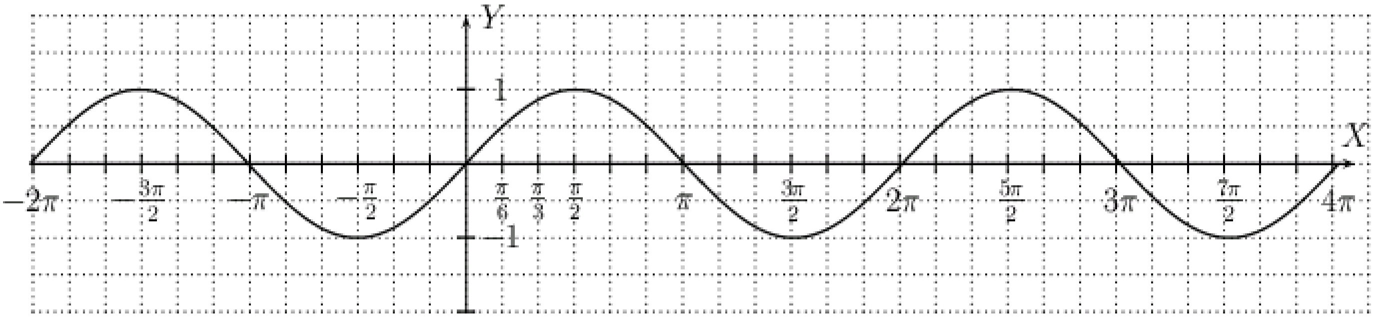
$tg 445^{\circ}$

Zadanie 5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych jeśli

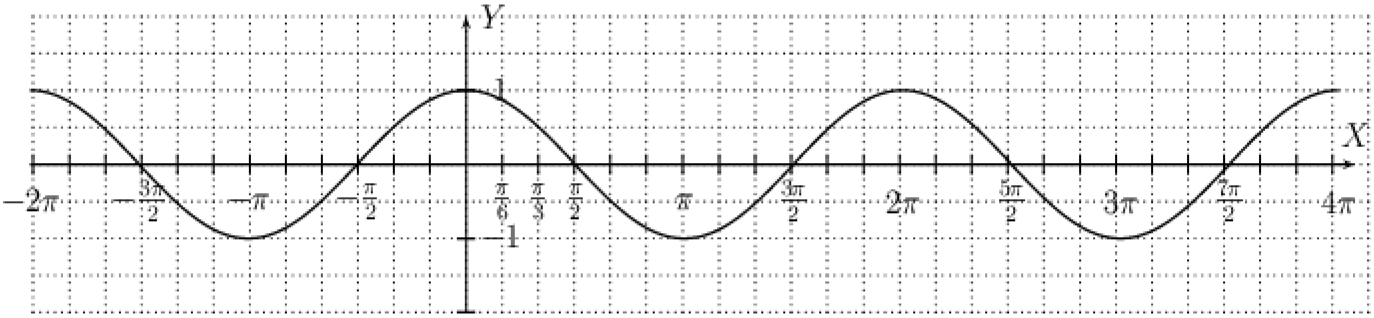
a) $\sin\alpha = \frac{7}{100}$ α należy do II ćwiartki

b) $\cos\alpha = \frac{2}{9}$ α należy do IV ćwiartki

Zadanie 6. Określ przebieg funkcji $y = |\sin x - 1|$



Zadanie 6. Określ przebieg funkcji $y = \frac{3}{2}\cos(x - \frac{\pi}{3})$



Zadanie 7. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią osi x, a na drugim ramieniu leży punkt P.

a)P = (-2,4), b) P = (8,-3), c) P = (-7,-2),

Zadanie 8. Sprawdź tożsamość: $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2$.

Zadanie 9. Naszkicuj wykres funkcji f, podaj dziedzinę, miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$,

Zadanie 10. Określ z tablic wartość funkcji trygonometrycznych

a) $\sin 150^{o}$

d) $tg120^{o}$

c) $\dfrac{\cos 150^{o} + \sin 120^{o}}{6tg120^{o}}$

d) $6tg135^{o} - \sin 135^{o}$

Zadanie 11. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych oblicz przybliżoną wartość wyrażenia. Wynik podaj z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.

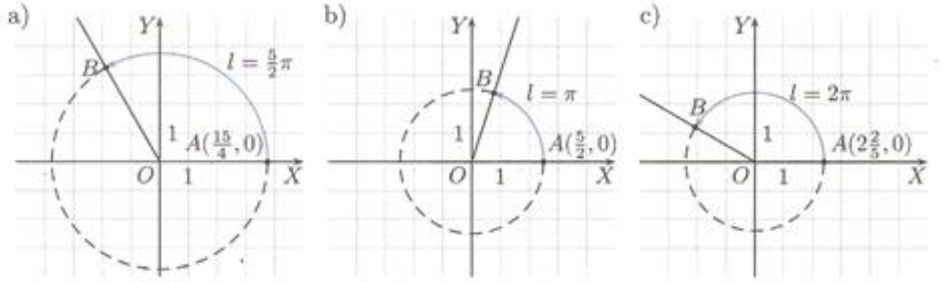
a) $\sin 125^{\circ} + \sin 105^{o}$

b) $\cos 153^{o} + \cos 163^{o}$

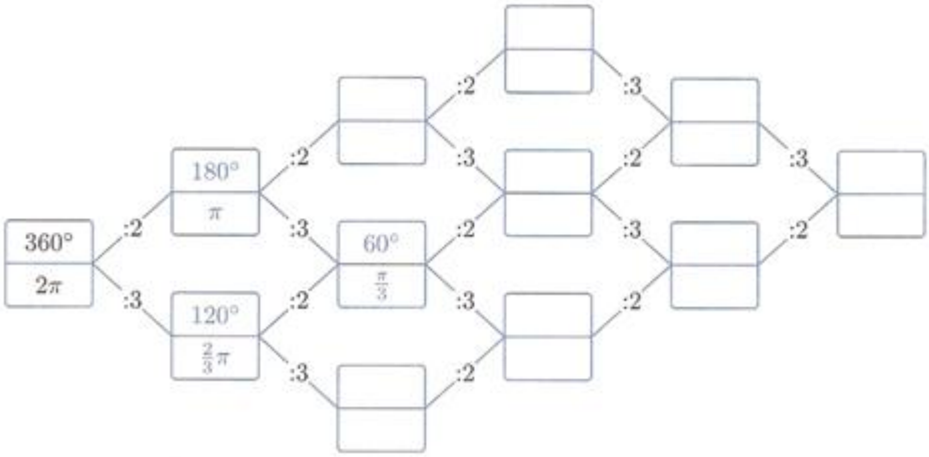
c) $tg145^{o} - tg154^{o}$

TRYGONOMETRIA – BAZA ZADAŃ

Zadanie 1. Podaj miarę łukową kąta *AOB*:



Zadanie 2. Uzupełnij diagram, podając miarę kąta w stopniach i w radianach.



Zadanie 3. Oblicz miarę łukową kątów:

a) $68°$

b) $120°$

c) 765^o,

d) -1100^o

e) $1530°$,

f) $1710°$

Zadanie 4. Jaką miarę stopniową ma kąt

a) 3π rad,

b) $3\frac{3}{4}\pi$,

c) $4\frac{1}{4}\pi$,

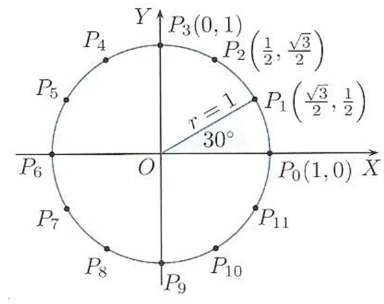
d) $2\frac{1}{3}\pi$

Zadanie 5. Cztery punkty należące do okręgu dzielą ten okrąg na cztery kolejne łuki o stosunku długości 1:1:4:9. Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta, którego wierzchołkami są wymienione punkty.

Zadanie 6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego jedno ramię pokrywa się z dodatnią półosią osi x, a na drugim ramieniu leży punkt P.

a) P = (-4,3), b) P = ($\sqrt{3}$,-1), c) P = (5,-11),

Zadanie 7. Na okręgu jednostkowym, którego środek leży w początku układu współrzędnych, zaznaczono dwanaście punktów wyznaczonych przez ramiona końcowe kątów, których miary są wielokrotnościami kąta 30^o (rysunek obok).



a) Podaj współrzędne punktów $P_4, \ldots, P_{11}$.

- P_4=
- P_5=
- P_6=
- P_7=
- P_8=
- P_9=
- P_{10}=
- P_{11}=

b)Uzupełnij tabelę, korzystając z rysunku.

α	30^o	60^o	120^o	150^o	210^o	240^o	300^o	330^o
sin α				$\frac{1}{2}$				
cos α				$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				
tg α				$-\frac{\sqrt{3}}{3}$				

Zadanie 8. Punkt $P\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ leży na ramieniu końcowym kąta 15^o. Oblicz sinα i cosα, jeżeli :

a) $\alpha = 165^o$, b) $\alpha = 195^o$, c) $\alpha = 345^o$, d) $\alpha = 75^o$.

Zadanie 9. Oblicz

a) $cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$

b) $tg\left(-\frac{10}{3}\pi\right)$

c) $\sin\left(-\frac{21}{4}\pi\right)$

d) $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

e) $cos(-405^o)$

f) $cos(-390^o) - \sin(-750^o)$

g) $tg\left(-\frac{7}{6}\pi\right) - tg\frac{7}{6}\pi$

Zadanie 10. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α mając dane

a) $\sin\alpha = 0{,}4$ i $\alpha \in (90°;180°)$

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

c) $tg\alpha = -\frac{3}{4}$

Zadanie 11. Wykaż, że dla dowolnego kąta α takiego, że $\sin\alpha\cos 3\alpha \neq 0$ zachodzi tożsamość

$$\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3 - 4\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha - 3}.$$

Zadanie 12. Sprawdź, czy równość

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$ jest tożsamością trygonometryczną.

Zadanie 13. Udowodnij wzór $sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = cos\alpha$.

Zadanie 14. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu:

a) $1 + cos\alpha$,
b) $1 + sin\alpha$,
c) $1 - cos\alpha$,
d) $\frac{1}{2} - cos\alpha$,
e) $1 + 2sin\alpha$,
f) $\sqrt{2} + 2cos\alpha$,
g) $sin7\alpha + sin5\alpha + sin3\alpha + sin\alpha$,
h) $1 + cos\alpha + cos\frac{\alpha}{2}$,
i) $1 + sin\alpha + cos\alpha + tg\alpha$,
j) $cos\alpha + sin2\alpha - cos3\alpha$.

Zadanie 15. Zamień sumę na iloczyn: $2sin^2\alpha + \sqrt{3}sin2\alpha - 1$.

Zadanie 16. Udowodnij, że $\frac{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)} = tg\alpha$.

Zadanie 17. Podaj wartość:

a) $tg(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = 3$,
b) $tg(-x)$, jeśli $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$
c) $tg\,x$, jeśli $tg(-x) = \frac{5}{8}$.

Zadanie 18. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,
b) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,
c) $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,
d) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,
e) $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

Zadanie 19. Naszkicuj wykresy funkcji f, podaj dziedzinę, miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.

b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3,$ b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1,$

c) $f(x) = \sin x + 2,$ d) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2.$

Zadanie 20. Podaj zbiór wartości funkcji *f* .

a) $f(x) = \sin x + 4,$ b) $f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$

c) $f(x) = \sin x - 3,$ d) $f(x) = 3 - \cos x,$

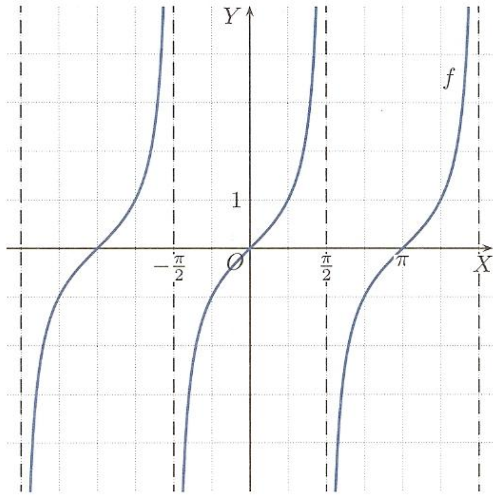
e) $f(x) = \cos x - \frac{1}{3},$ f) $f(x) = -1 - \sin x.$

Zadanie 21. Naszkicuj wykresy funkcji:

$$f(x) = sinx, \quad g(x) = -sinx, \quad h(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Dla jakich $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ zachodzi równość: $h(x) = 1$?

Zadanie 22. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = tgx$ o dziedzinie $D_f = \mathbf{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{C}\right\}$. Asymptotami pionowymi tego wykresu są proste o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.



a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
b) Podaj dziedzinę funkcji g.
c) Podaj równania asymptot pionowych wykresu funkcji g.

Zadanie 23. Naszkicuj wykresy funkcji $y = -f(x)$ i $y = -f(x) + 2$, jeżeli $f(x) = tgx$

Zadanie 24. Narysuj w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ wykres funkcji: $y = -2 + 2\cos x$. Wyznacz: zbiór wartości, miejsca zerowe i przedziały, w których funkcja rośnie.

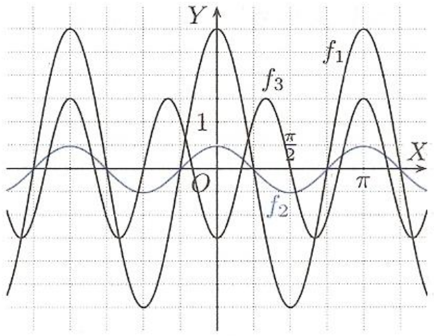
Zadanie25. Naszkicuj wykres funkcji *f* . Podaj jej okres podstawowy i zbiór wartości.

a) $f(x) = 3sin2x,$
b) $f(x) = -2sin3x,$
c) $f(x) = 4cos3x,$
d) $f(x) = \frac{1}{2}cos2x,$
e) $f(x) = 3sin\frac{x}{2},$
f) $f(x) = 2sin\frac{x}{2}$

Zadanie 26. Naszkicuj wykres funkcji *f* . Podaj okres podstawowy i zbiór wartości.

a. $f(x) = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$
b. $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$
c. $f(x) = \sin 2(x - \pi),$
d. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right),$
e. $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$
f. $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right),$
g. $f(x) = |cos2x|,$
h. $f(x) = |2sin3x|,$
i. $f(x) = \left|sin\frac{1}{2}x\right|$

Zadanie 27. Każda z funkcji f_1, f_2, f_3 określona jest wzorem $y = a \cdot cosbx$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{R}$. Podaj wzory tych funkcji.



Zadanie 28. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f, g, h. Podaj okresy podstawowe tych funkcji.

a) $f(x) = sin2x, \quad g(x) = |sin2x|, \quad h(x) = |sin2x| - 1$

b) $f(x) = cos3x, \quad g(x) = |cos3x|, \quad h(x) = |cos3x| + 1.$

Zadanie 29. Naszkicuj wykres funkcji f .

c) $f(x) = 2 - |3 \sin x|.$

d) $f(x) = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|,$

e) $f(x) = -3|\cos x|.$

Zadanie 30. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = sin|x|,$
b) $f(x) = 1 - cos|x|,$
c) $f(x) = |tg2x|$
d) $f(x) = cos\left|\frac{1}{2}x\right|,$
e) $f(x) = 2sin|2x| - 1,$
f) $f(x) = sin|2x|,$
g) $f(x) = 3cos|2x| + 1$

g)$cosx \leq -\frac{1}{2},$
h)$sin\frac{x}{2} \leq \frac{1}{2},$
$\sqrt{3}cos\frac{x}{2} \leq 2$

i)$\frac{1}{2} -$

Zadanie 31. Rozwiąż równanie:

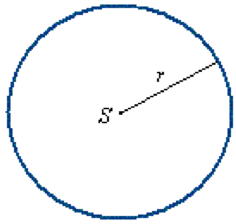
a) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
b) $3\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$
c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
d) $j)\ 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1,$
e) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1,$
f) $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4},$
g) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$
h) $2cos^2 2x = 1$
i) $4sin^3 x = sinx$
j) $2cos^2 x = -cosx$

Zadanie 32. Rozwiąż nierówność.

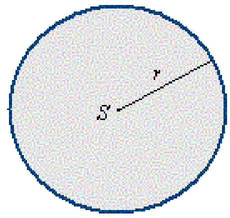
a) $2sinx \leq 1,$
b) $sin3x \leq \frac{1}{2},$
c)$cosx > -\frac{1}{2},$
d)$sin2x < -\frac{1}{2},$
e)$2sin\frac{x}{2} < \sqrt{3},$

c) $\sqrt{3}ctgx \leq -1,$

OKRĄG I KOŁO



Okręgiem nazywamy krzywą, której wszystkie punkty leżą w tej samej odległości od danego punktu zwanego środkiem okręgu.
r - promień okręgu
S - środek okręgu



Koło to część płaszczyzny ograniczona okręgiem wraz z tym okręgiem.
r - promień koła
S - środek koła

Def. ***Okręgiem*** *o środku S i promieniu r (r>0) nazywamy zbiór punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r.*

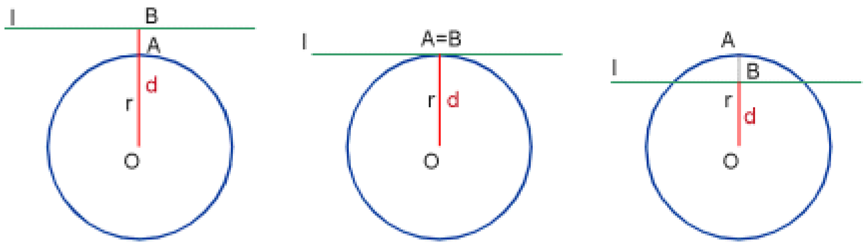
Promień r okręgu jest długością odcinka, którego jednym końcem jest środek okręgu, a drugim końcem dowolny punkt leżący na tym okręgu.
Cięciwą okręgu nazywamy odcinek, którego końcami są dwa różne punkty okręgu.
Średnicą okręgu nazywamy cięciwę, która przechodzi przez środek okręgu.

Pole koła (*P*) i długość okręgu (*L*):
$P = \pi r^2$
$L = 2\pi r$
gdzie π (pi) to stosunek długości okręgu do długości jego średnicy, który jest wielkością stałą i wynosi w przybliżeniu 3,1415..., a r to długość promienia koła.

Równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie S=(a,b) i promieniu r w postaci ogólnej.
Postać kanoniczna równania okręgu o środku S=(a,b) i promieniu r to równanie postaci:
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2$.

WZAJEMNE POŁOŻENIE OKRĘGU I PROSTEJ

Niech d oznacza odległość środka okręgu od prostej l.

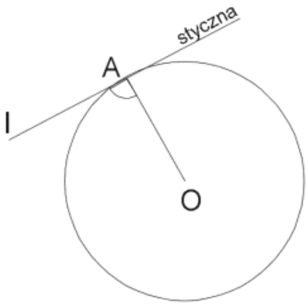


d>r d=r d<r

W zależności od położenia prostej względem okręgu mamy:

- odległość środka okręgu od prostej jest większa od długości promienia.
- odległość środka okręgu od prostej jest równa długości promienia.
- odległość środka okręgu od prostej jest mniejsza od długości promienia.

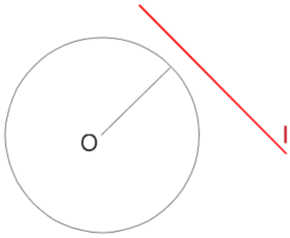
Def. Styczną do okręgu nazywamy prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny.



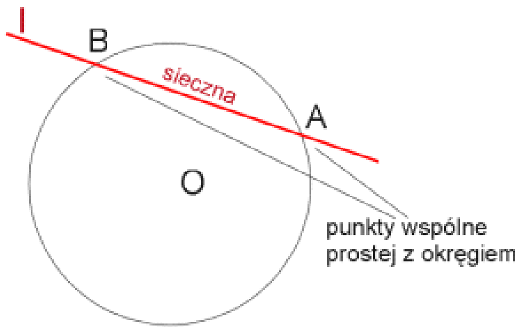
A - punkt styczności

Uwaga. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.

Jeżeli odległość prostej od środka okręgu jest większa od długości promienia, to prosta leży całkowicie poza okręgiem. Taką prostą nazywamy **zewnętrzną** okręgu.



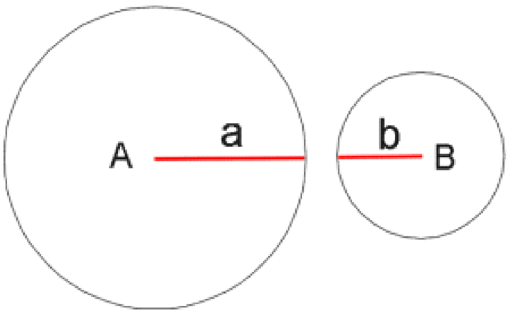
Jeżeli odległość prostej od środka okręgu jest mniejsza od długości promienia to prosta ma dokładnie dwa punkty wspólne.
Taką prostą nazywamy sieczną okręgu.



WZAJEMNE POŁOŻENIE DWÓCH OKRĘGÓW

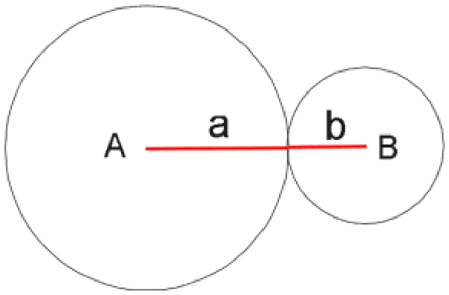
Dane są dwa różne okręgi:
O(A, a) oraz o(B, b), gdzie $a > b > 0$

Okręgi są wzajemnie zewnętrzne, tzn. każdy z nich leży na zewnątrz drugiego



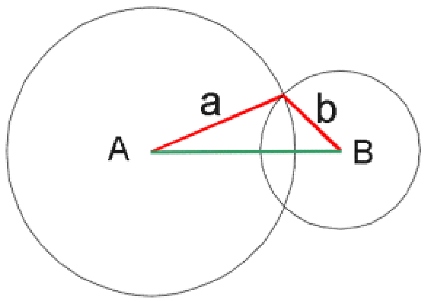
$|AB| > a + b$

Okręgi są zewnętrznie styczne, tzn. mają jeden punkt wspólny, a pozostałe punkty każdego z tych okręgów leżą na zewnątrz drugiego okręgu.



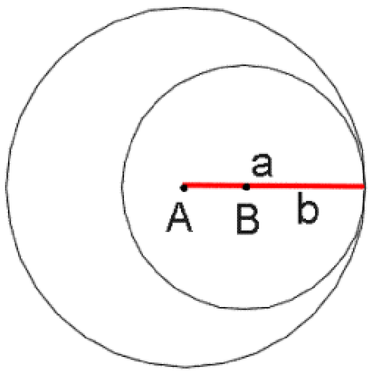
$|AB| = a + b$

Okręgi przecinają się tzn. mają dokładnie dwa punkty wspólne.



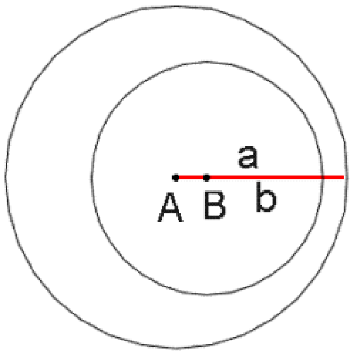
$a - b < |AB| < a + b$

Okręgi są wewnętrznie styczne, tzn. mają jeden punkt wspólny przy czym każdy punkt jednego z tych okręgów należy do koła ograniczonego drugim okręgiem.



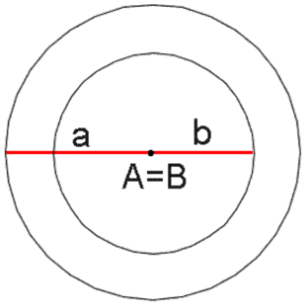
$|AB| = a - b$

Jeden okrąg leży wewnątrz koła ograniczonego drugim okręgiem.



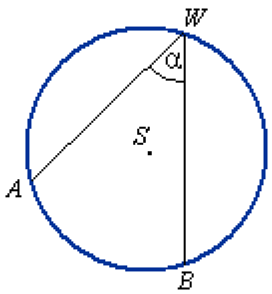
$|AB| < a - b$

Okręgi są współśrodkowe - mają wspólny środek.

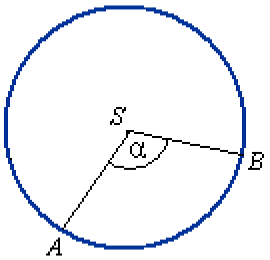


|AB| = 0

Kąt środkowy, kąt wpisany

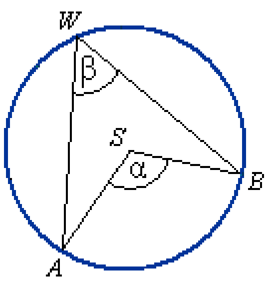


Kąt wpisany - to taki kąt wypukły, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy tego koła.
TW. Miary kątów wpisanych w koło, opartych na tych samych łukach są równe.
TW. Kąt wpisany oparty na półokręgu, jest kątem prostym.



Kąt środkowy - to kąt, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramiona są półprostymi zawierającymi promienie koła.

Kąt środkowy i kąt wpisany oparty na tym samym łuku



TW. Miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku co kąt środkowy.
Wielokątem (n - kątem) nazywamy płaską figurę geometryczną ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą o n bokach, wraz z tą łamaną, gdzie $n \in N \;\; i \; n \geq 3$.

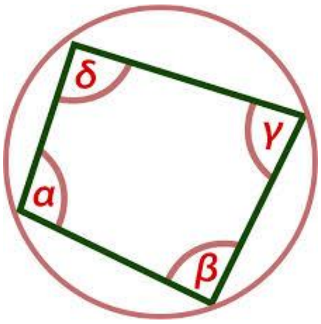
Odcinki łączące wierzchołki wielokąta i nie będące jego bokami nazywamy **przekątnymi wielokąta**.

1. Liczba przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka n – kąta jest równa (n – 3)
2. Liczba przekątnych w n – kącie jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$, gdzie $n \in N$ $i\, n > 3$.
3. Suma miar kątów wewnętrznych w n – kącie jest równa $(n-2) \cdot 180^{\circ}$ dla $n \in N$ $i\, n \geq 3$.
4. Liczba wierzchołków n – kąta jest równa n.

Wielokąt, którego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty wewnętrzne przystające, nazywamy **wielokątem foremnym.** Kąt wewnętrzny n – kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2) \cdot 180^{\circ}}{n}$.

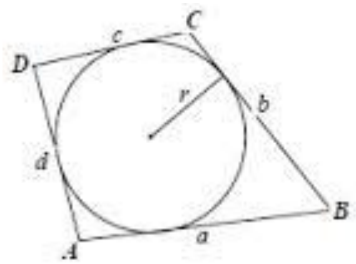
TWIERDZENIE. Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180^0:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0$$



TWIERDZENIE. W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe:

$$a + c = b + d$$



T: Kąt środkowy i pole wycinka koła

Zadanie 1. Oblicz jaką częścią okręgu jest łuk oparty o kąt środkowy o mierze

a) 60^o

b) 20^o

c) 30^o

d) 90^o

e) 270^o

f) 240^o

Zadanie 2. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na łuku, którego długość jest równa

a) $\frac{1}{12}$ długości okręgu

b) $\frac{5}{6}$ długości okręgu

c) $\frac{3}{5}$ długości okręgu

Zadanie 3. Oblicz długość łuku opartego na kącie środkowym o mierze

a) 60^o jeśli promień $r=12$

b) 45^o jeśli promień $r=10$

c) 100^o jeśli promień $r=4$

Zadanie 4. Oblicz pole wycinka koła o promieniu 6 i kącie środkowym o mierze

a) 40^o

b) 135^o

c) 150^o

d) 225^o

e) 330^o

Zadanie 5. Oblicz miarę kąt środkowego jeśli wiadomo, że

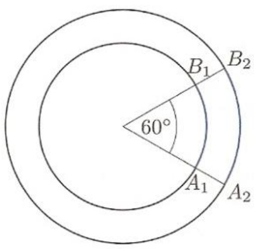
a) promień koła ma długość 10, a pole wycinka wynosi 25π

b) promień koła ma długość 6, a pole wycinka wynosi 27π

c) promień koła ma długość 8, a pole wycinka wynosi 56π

Zadanie 6. Na rysunku przedstawiono okręgi o promieniach $r_1 = 2,5$ i $r_2 = 3,5$.

a) Oblicz długości tych okręgów.



b) Oblicz długości łuków $\widehat{A_1B_1}$ i $\widehat{A_2B_2}$.

Zadanie 7. Uzupełnij tabelę

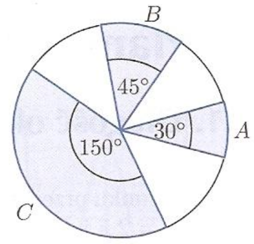
a)

	Okrąg O_1	Okrąg O_2	Okrąg O_3
Promień	3,6 cm		
Długość okręgu			9,6 cm
Długość łuku wyznaczonego przez kąt 30°		7π cm	

b)

	Okrąg O_1	Okrąg O_2	Okrąg O_3
Promień	6 dm		9 cm
Kąt α	75°	20°	
Długość łuku wyznaczonego przez kąt α		2π cm	4π cm

Zadanie 8. Dane jest koło o promieniu 12. Oblicz pola zaznaczonych wycinków tego koła.

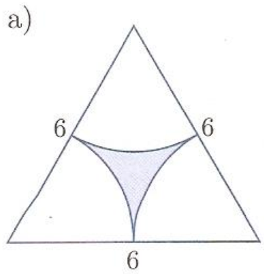


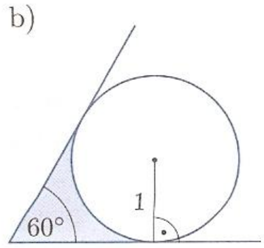
P_A = ……………………………………………………..

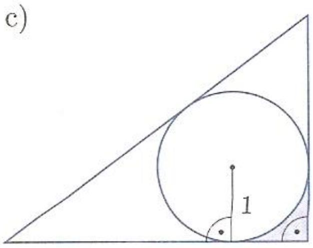
P_B = ……………………………………………………...

P_C = ………………………………………………………

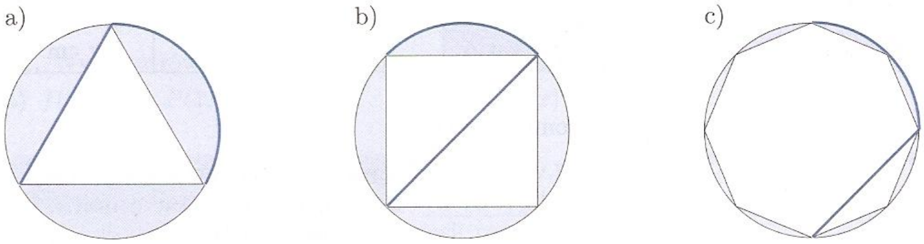
Zadanie 9. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



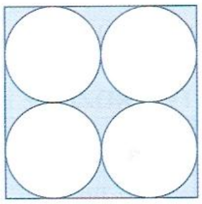




Zadanie 10. Dany jest wielokąt foremny wpisany w koło o promieniu 2. Oblicz długość zaznaczonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.



Zadanie 11. Bok kwadratu ma długosc 6 (rysunek obok). Wykaż, ze pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9.



Zadanie 12. Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miarę kąta wpisanego opartego na łuku tego okręgu, jeśli łuk ten ma długość:

a) 2π

b) 3π

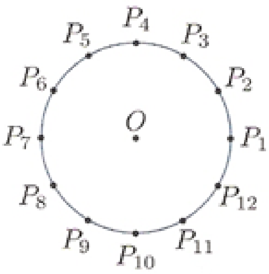
c) $\frac{15}{2}\pi$

d) $\frac{\pi}{4}$.

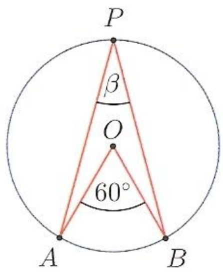
T: Kąt wpisany i jego związek z kątem środkowym

Zadanie 1. Punkty: $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku.

a) $\overparen{P_1P_2P_3}$, b) $\overparen{P_4P_7P_{12}}$, c) $\overparen{P_6P_1P_7}$.



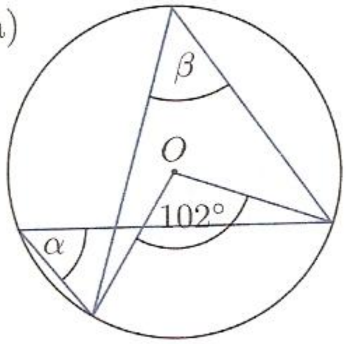
Zadanie 2. a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).



b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy $\alpha = 120^{o}$ i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α. Podaj miarę tych kątów.

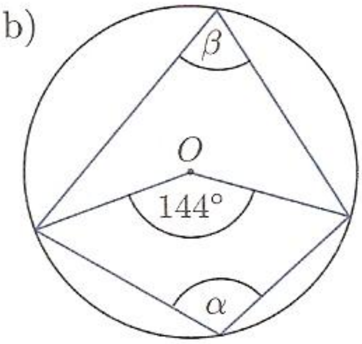
Zadanie 3. Wyznacz miary kątów α i β.

a)



$\alpha =$ ......, $\beta =$ ......

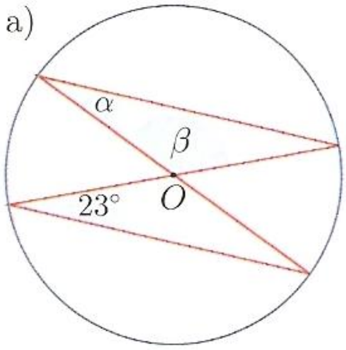
b)



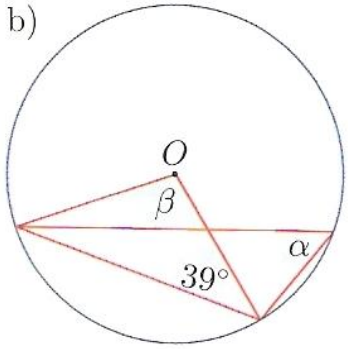
$\alpha =$ ......, $\beta =$ ......

Zadanie 4. Wyznacz miary kątów α i β.

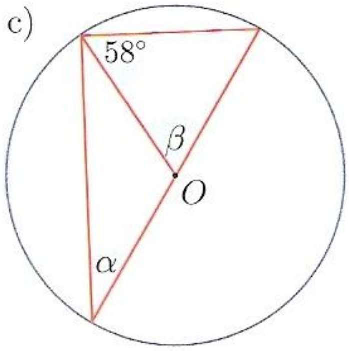
a)



b)

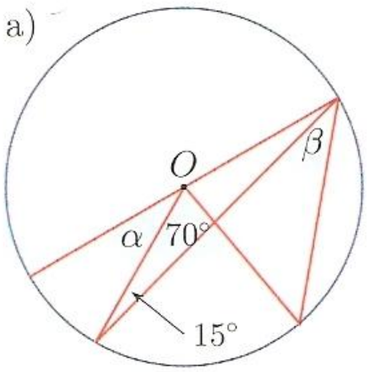


c)

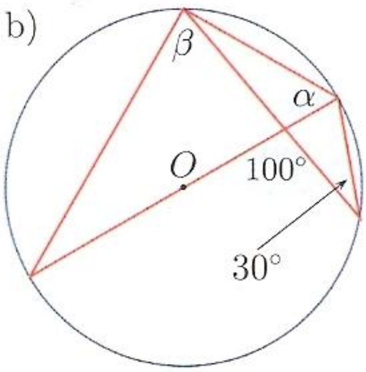


Zadanie 5. Wyznacz miary kątów α i β.

a)

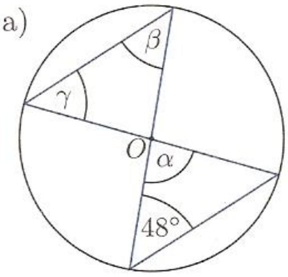


b)

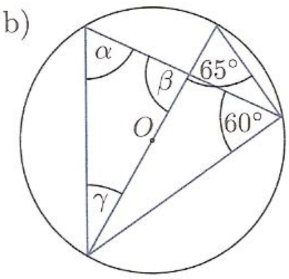


Zadanie 6. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

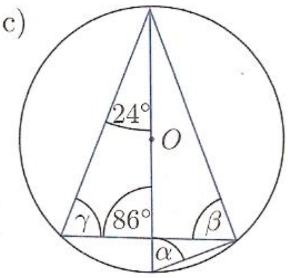
a)



b)

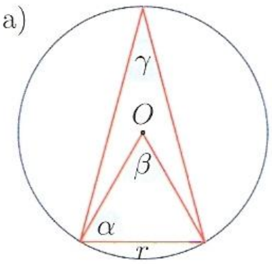


c)

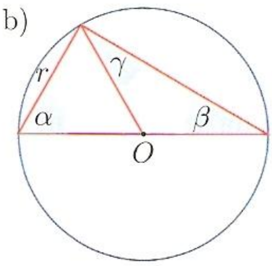


Zadanie 7. Promień okręgu jest równy *r*. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

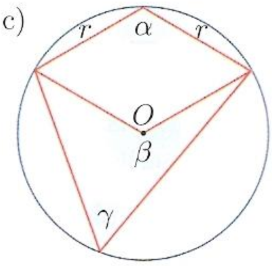
a)



b)

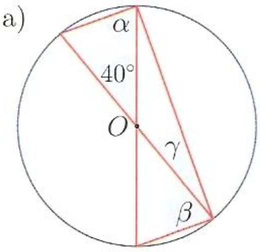


c)

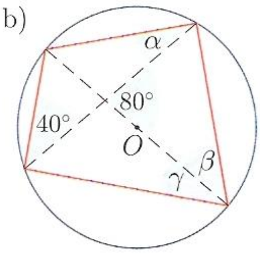


Zadanie 8. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

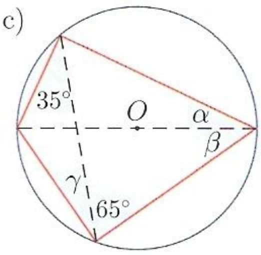
a)



b)

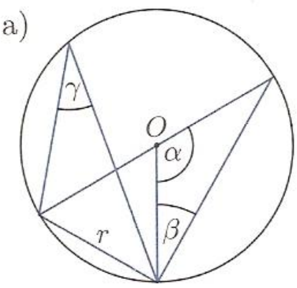


c)



Zadanie 9. Promień okręgu jest równy *r*. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.

a)

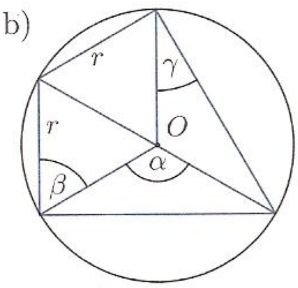


$\alpha =$ ....

$\beta =$ ....

$\gamma =$ ....

b)



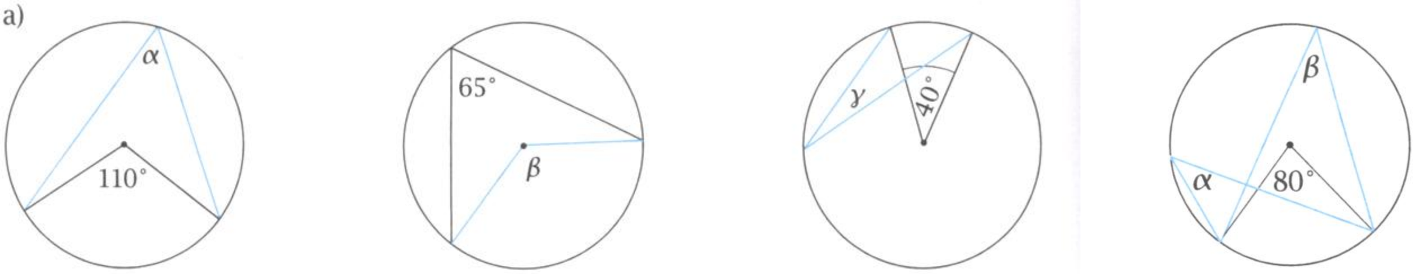
$\alpha =$ ....

$\beta =$ ....

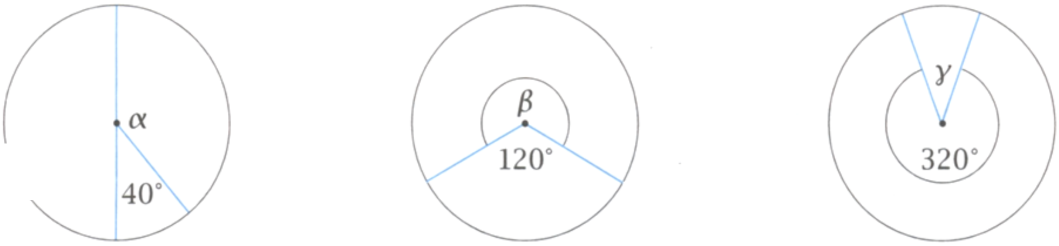
$\gamma =$ ....

Zadanie 11. Oblicz miary kątów: α , β , γ .

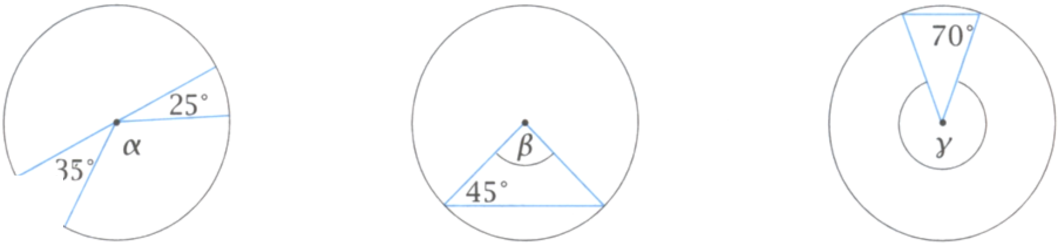
a)

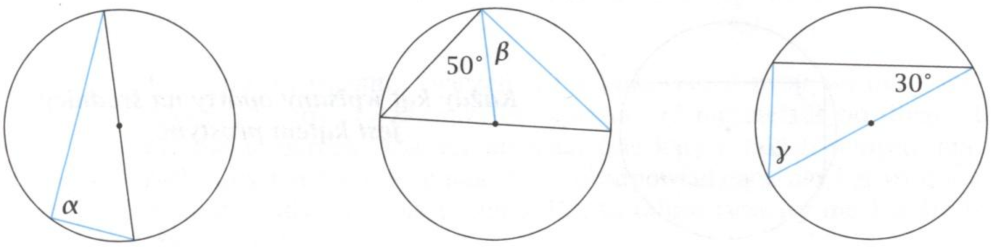


a)

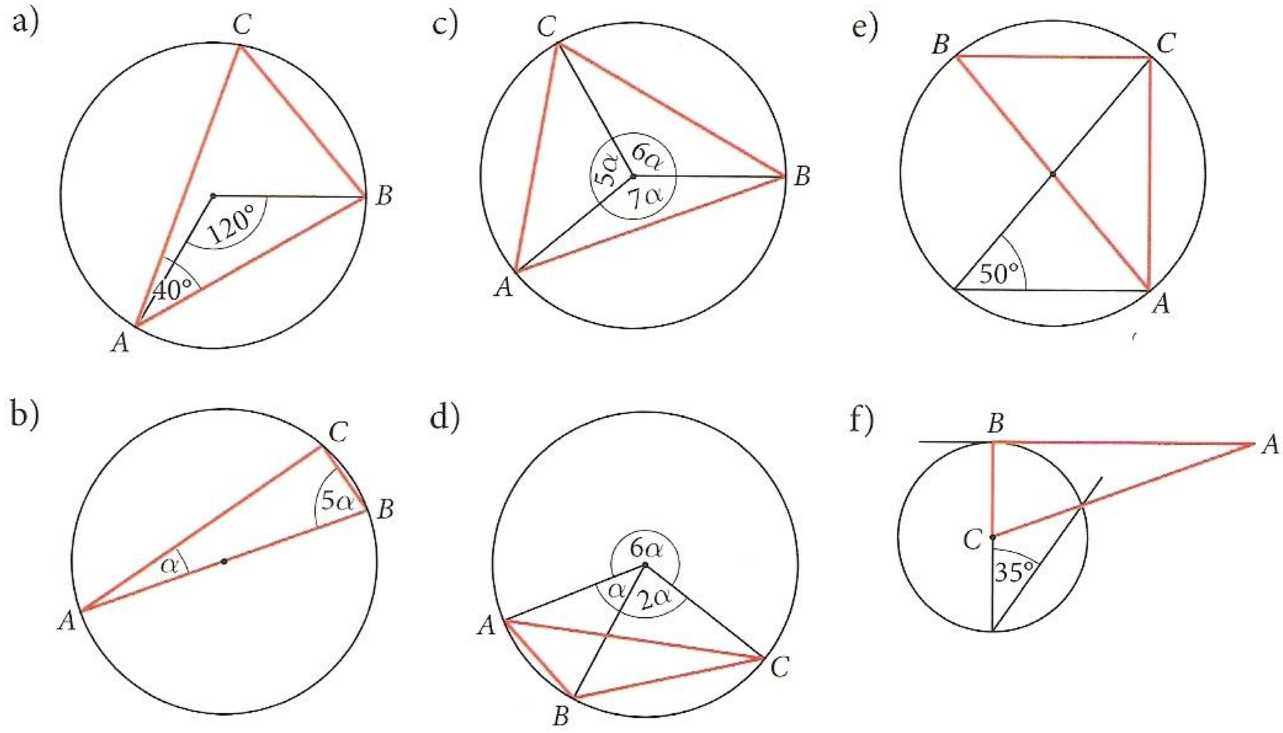


b)

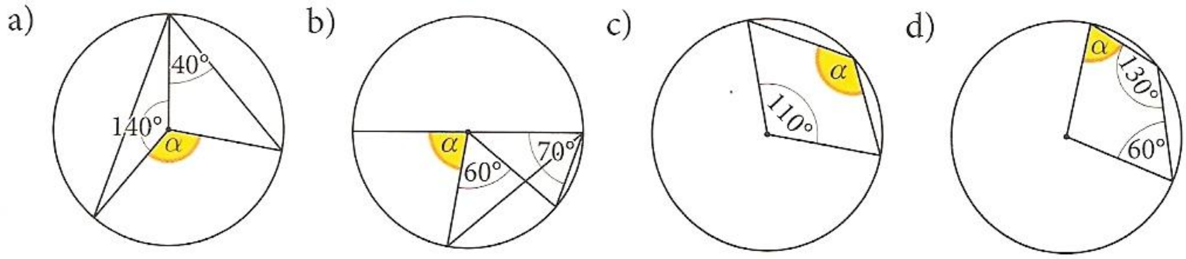




Zadanie 12. Wyznacz kąty trójkąta *ABC*.



Zadanie 11. Wyznacz miarę kąta α.



Zadanie 12. Kąt wpisany jest o 50^{o} mniejszy od kąta środkowego wyznaczonego przez ten sam łuk. Oblicz miary obu kątów.

Zadanie 13. Suma kata wpisanego i dwukrotności kąta środkowego opartych na tym samym łuku wynosi 250^{o} . Oblicz miary obu kątów.

Zadanie 14. Różnica trzykrotności kąta środkowego i dwukrotności wpisanego opartych na tym samym łuku wynosi 84^o. Oblicz miary obu kątów.

T: Wzajemne położenie prostej i okręgu

Przypomnienie: odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ dana jest wzorem

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

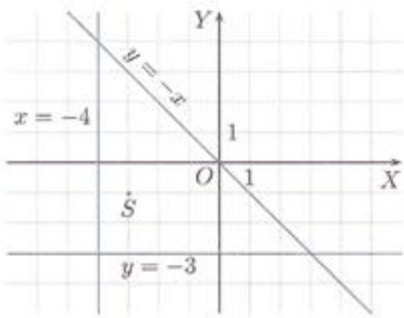
Zadanie 1.

a) Oblicz odległość środka okręgu danego równaniem $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$ od prostej $x + y - 31 = 0$. Uzasadnij, że ta prosta ma dwa punkty wspólne z podanym okręgiem.

b) Oblicz odległość środka okręgu danego równaniem $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$ od prostej $4x - 3y + 12 = 0$. Uzasadnij, że ta prosta jest styczna do danego okręgu.

Zadanie 2. a) Wpisz do tabeli odległości punktu *S* (rysunek obok) od danych prostych.

$y = -3$	$x = -4$	$y = -x$



b) Uzupełnij tabelę podającą liczbę punktów wspólnych każdej z danych prostych z okręgiem w środku *S* i promieniu *r* w zależności od *r*.

Prosta	Brak punktów wspólnych	1 punkt wspólny	2 punkty wspólne
$y = -3$			
$x = -4$			
$y = -x$			

Zadanie 3. Wykaż, że okrąg o środku *S* i promieniu *r* jest styczny do prostej *l*.

a) $S(1,2)$, $r = 2\sqrt{2}$, l: $y = x - 3$

b) $S(5,1)$, $r = 2\sqrt{5}$, l: $2x + y - 1 = 0$

Zadanie 4. Uzasadnij, ze okrąg o środku *S*(-5,5) i promieniu 5 jest wpisany w trójkąt o wierzchołkach: *A*(0,0), *B*(0,15) i *C*(-20,0).

Zadanie 5. Podaj, ile punktów wspólnych ma prosta *k* z okręgiem o środku w punkcie *O* w zależności od promienia *r* tego okręgu.

a) *k*: y = 3, *O*(3,-1)

b) *k*: $x = -1$, $O(-\frac{3}{2}, 4)$

c) *k*: $x = \sqrt{2}$, $O(-1,1)$

Zadanie 6. Dane są okrąg $x^2 + y^2 = 25$ i prosta *l*: $x = 3$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty ich przecięcia.

Zadanie 7.

a) Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej y = -2 i okręgu $(x-2)^2 + y^2 = 16$.

b) Cięciwa o długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej $x = 1$ i okręgu o środku w punkcie (-3,2). Wyznacz równanie tego okręgu.

Zadanie 8. Prosta *l* jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt *A*. Oblicz promień tego okręgu.

a) *l*: $y = \frac{1}{2}x + 4$, A(-3,0)

b) *l*: $3x + 4y - 5 = 0$, A(-4,-2)

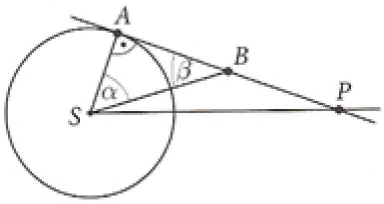
c) $l: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, A(2,1)

d) $l: y = 3x - 1$, A(-5,4)

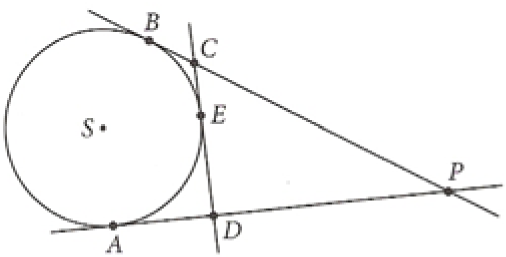
T: Styczna do okręgu w zadaniach

Zadanie 1. W okręgu o środku *S* kąt między promieniami *SA* i *SB* jest równy 140^{o}. Wyznacz kąt między stycznymi do okręgu poprowadzonymi w punktach *A* i *B*.

Zadanie 2. Z punktu *P* poprowadzono styczną do okręgu w punkcie *A* (rysunek obok). Punkt *S* jest środkiem okręgu. Odcinek *SB* jest środkową w trójkącie *SPA*. Oblicz długość odcinka *SP*, wiedząc, ze promień okręgu jest równy 4 oraz α = β.

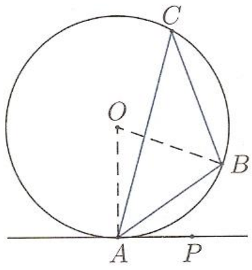


Zadanie 3. Wypisz pary odcinków równych, wiedząc, że punkty *A, B, E* są punktami styczności odpowiednich prostych do okręgu o środku *S* (rysunek obok).

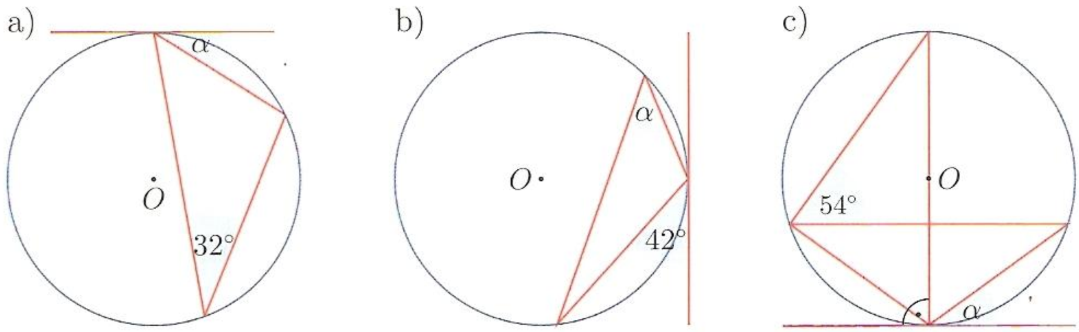


Zadanie 4. Kąt *PAB* ma miarę 36° (rysunek obok). Podaj miary kątów *ACB* i *AOB*.

$\measuredangle ACB =$ .... $\measuredangle AOB =$ ....



Zadanie 5. Wyznacz miarę kąta α.

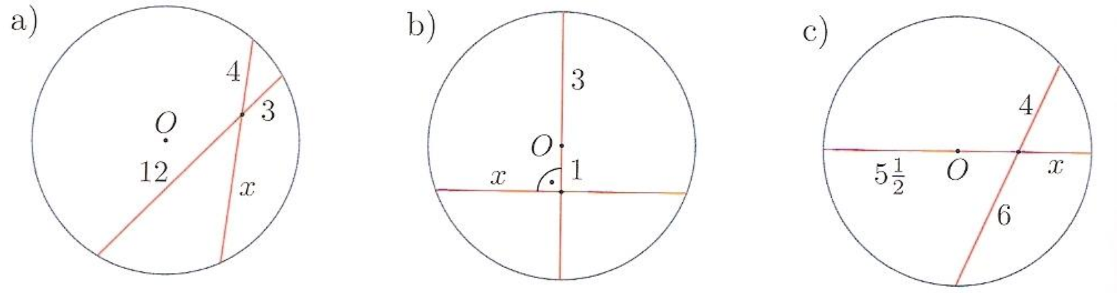


Zadanie 6.

a) W okręgu o środku *O* poprowadzono cięciwę *AB*. Jeden z kątów trójkąta *AOB* ma miarę 96°. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą *AB* a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie *A*.

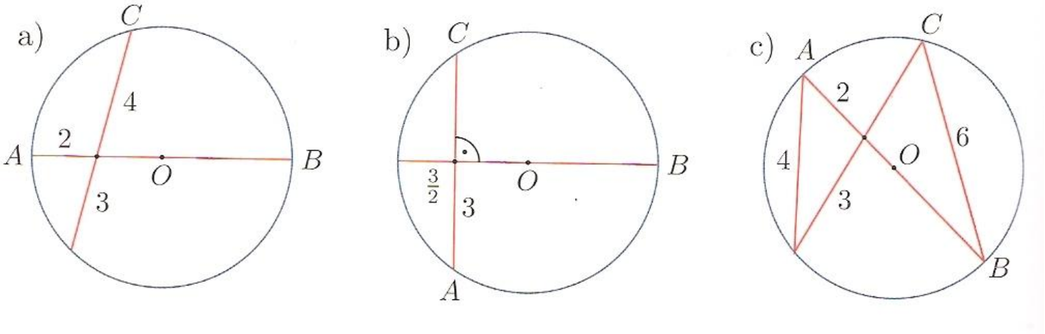
b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę *AB*. Długość łuku $\widehat{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą *AB* a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie *B*.

Zadanie 7. Oblicz x.



Zadanie 8. Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt *P*, odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt *P* dzieli cięciwę.

Zadanie 9. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta *ABC*.



Zadanie 10. Wierzchołki czworokąta *ABCD* leżą na okręgu o promieniu 6,5 (rysunek obok). Oblicz obwód tego czworokąta, jeśli $|PA| = 4$ i $|PB| = |PD|$.

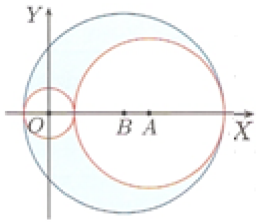
<u>T: Okręgi styczne</u>

Zadanie 1. Określ, jaka powinna być odległość między punktami A i B, aby okręgi o(A,2) i o(B,5) były:

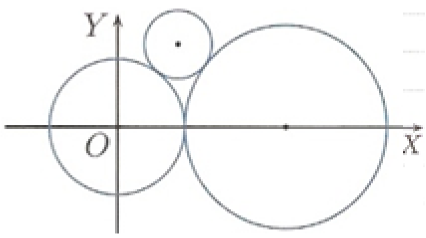
a) Styczne wewnętrznie

b) Styczne zewnętrznie.

Zadanie 2. Dwa okręgi o środkach $O(0,0)$ i $A(11,0)$ są styczne zewnętrznie. Okrąg o środku $B(8,0)$ jest styczny do tych dwóch okręgów wewnętrznie (rysunek obok). Oblicz promienie okręgów i pole zacieniowanego obszaru.



Zadanie 3. Okręgi o promieniach: 1, 2 i 3, parami styczne zewnętrznie, położone są w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wyznacz współrzędne środka najmniejszego okręgu.



Zadanie 4. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie, a odległość ich środków jest równa 19. Gdyby te okręgi były styczne wewnętrznie, to ta odległość wynosiłaby 5. Wyznacz długości promieni tych okręgów.

Zadanie 5. (**Zadanie** z informatora maturalnego)
Okrąg o środku $S = (3, 2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu okręgów.

T: Okrąg wpisany w czworokąt

Zadanie 1. Czy w czworokąt wypukły o podanych kolejnych bokach można opisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

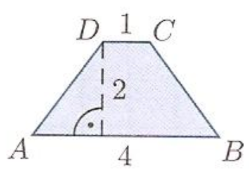
a) 1, 5, 3, 7 b) 14, 9, 8, 13 c) 25, 16, 15, 24

Zadanie 2. Czy w poniższy czworokąt można wpisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

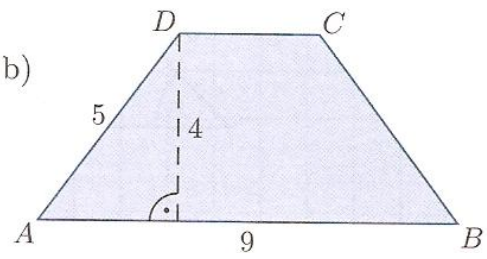
a) kwadrat b) romb c) deltoid

Zadanie 3. Czy w trapez równoramienny przedstawiony na rysunku można wpisać okrąg?

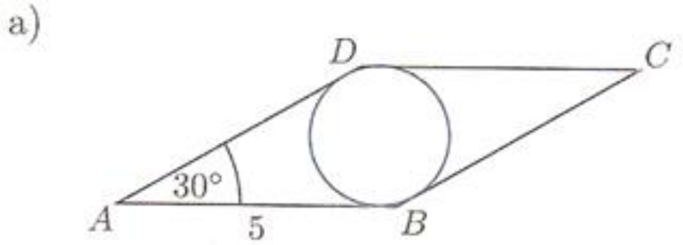
a)

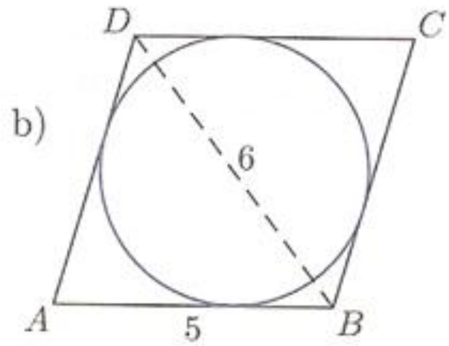


b)

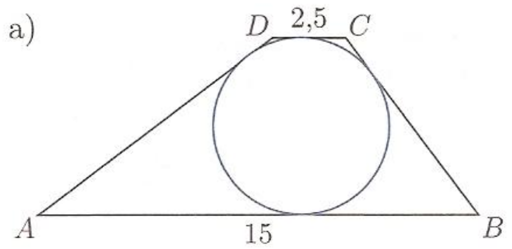


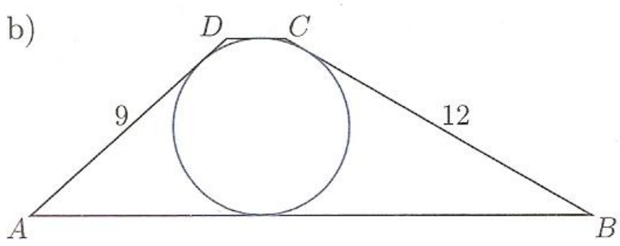
Zadanie 4. Oblicz promień okręgu wpisanego w romb *ABCD*.





Zadanie 5. Trapez *ABCD* jest opisany na okręgu o promieniu 3. Oblicz pole i obwód tego trapezu.





Zadanie 6. Oblicz pole trapezu równoramiennego o ramieniu długości 10 cm opisanego na okręgu o promieniu 4 cm.

Zadanie 7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 5 cm i 9 cm. Oblicz długość ramion i pole tego trapezu, jeżeli można w niego wpisać okrąg.

Zadanie 8. Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 1 cm i 3 cm. Oblicz długości ramion tego trapezu, jeśli można w niego wpisać.

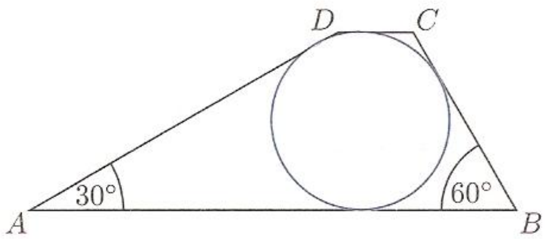
Zadanie 9. W trapez o kątach ostrych przy dłuższej podstawie 30^o i 60^o wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

Zadanie 10. Dłuższa podstaw trapezu prostokątnego ma długość 6 cm, a promień okręgu wpisanego jest równy 1 cm. Oblicz długość krótszej podstawy tego trapezu.

Zadanie 11. W romb o boku długości 2 cm i kącie ostrym 60^o wpisano koło. Oblicz pole tego koła.

Zadanie 12. W romb o kącie ostrym 30^o wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole tego rombu.

Zadanie 13. Trapez *ABCD* o kątach ostrych 30^o i 60^o jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz pole i obwód tego trapezu.



Zadanie 14. Ramię trapezu równoramiennego opisanego na okręgu ma długość 5, a jego dłuższa podstawa jest równa 8. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trapez oraz pole trapezu.

Zadanie 15.

a) W trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm jest wpisany okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

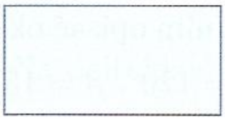
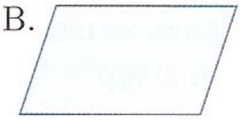
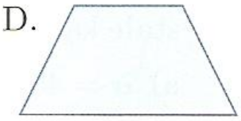
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trapez, którego ramiona mają długości 5 cmi 7 cm. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

c) Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu o promieniu 4 cm, jeśli jedna z podstaw jest o 12 cm dłuższa od drugiej.

d) W trapezie równoramiennym (niebędącym rombem) o kącie 45^{o} wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

T: Okrąg opisany na czworokącie

Zadanie 1. Na którym z poniższych czworokątów można opisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

A.  B.  C.  D. 

Zadanie 2. Czy na czworokącie o podanych kolejnych kątach można opisać okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

a) $30^{o}, 60^{o}, 120^{o}, 150^{o}$

b) $78^{o}30', 86^{o}20', 101^{o}30', 93^{o}40'$

c) $25^{o}, 105^{o}, 155^{o}, 75^{o}$

d) $54^{o}36', 70^{o}5', 125^{o}24', 109^{o}55'$

Zadanie 3. Kąty α i β są sąsiednimi kątami wewnętrznymi czworokąta. Oblicz pozostałe kąty tego czworokąta, jeżeli wiadomo, że można na nim opisać okrąg.

a) $\alpha = 45^{o}, \beta = 60^{o}$

b) $\alpha = 100^{o}, \beta = 50^{o}$

c) $\alpha = 120^o, \beta = 150^o$

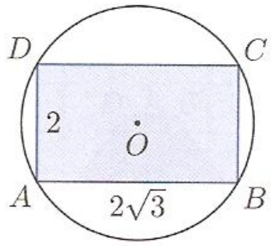
Zadanie 4. Czy na czworokącie o podanych kolejnych kątach, gdzie $\alpha > 0$, można opisać okrąg?

a) α,2α, 3α, 4α b) 2α, α, 4α, 5α c) 3α,4α, 3α, 2α

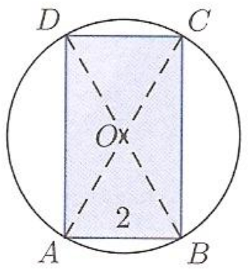
Zadanie 5. Oblicz promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach długości 3 i 4.

Zadanie 6. Oblicz długość okręgu opisanego na prostokącie *ABCD*.

a)



b)



$P_{\triangle ABO} = 3$

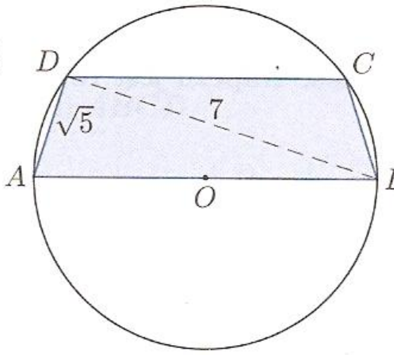
Zadanie 7. Na trapezie o kolejnych katach: α, β, γ i δ można opisać okrąg. Oblicz miary kątów tego trapezu, wiedząc, że γ = 4α.

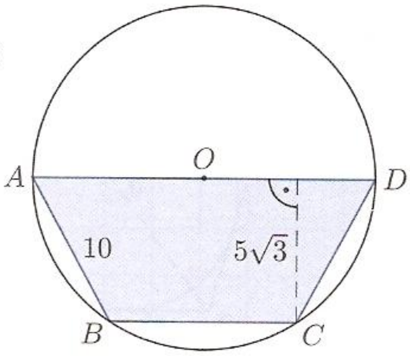
Zadanie 8.

a) Oblicz pole koła opisanego na prostokącie o bokach długości 6 cm i 10 cm.

b) W okrąg o promieniu 20 cm wpisano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 3:4. Oblicz pole tego prostokąta.

Zadanie 9. Oblicz pole koła opisanego na trapezie *ABCD*.

a) 

b) 

Zadanie 10. Jedna z podstaw trapezu jest średnicą opisanego na nim okręgu. Kąt między przekątną tego trapezu a tą podstawą ma miarę 30^o, a wysokość trapezu jest równa 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

Zadanie 11. Jedna z podstaw trapezu, wpisanego w okrąg o promieniu 2, jest średnicą tego okręgu, a jeden z jego kątów ma miarę 60^o. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

Zadanie 12. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 60^o. Oblicz pole koła opisanego na tym prostokącie, jeśli:

a) jego krótszy bok ma długość 6 cm,

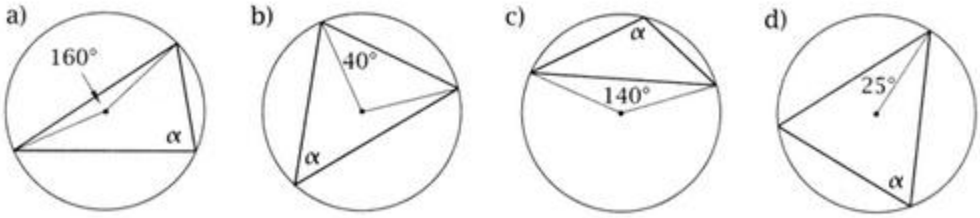
b) jego dłuższy bok ma długość 6 cm.

Zadanie 13. Na trapezie, którego wysokość jest równa 4 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu, jeśli jedna z jego podstaw jest średnicą tego okręgu.

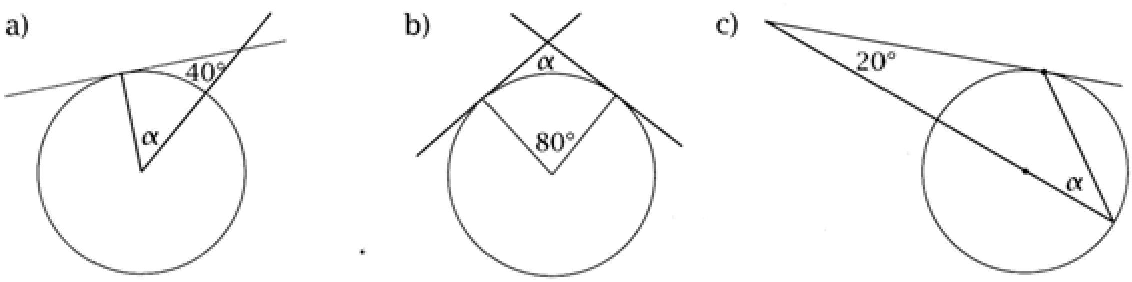
T: Powtórzenie wiadomości – okrąg i koło

I - kąty w okręgu, styczna do okręgu, długość łuku i pole wycinka

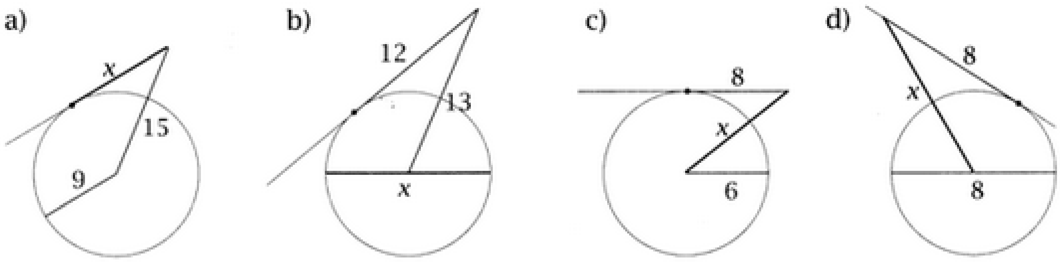
1. Oblicz miarę kąta α.



2. Narysowane proste są styczne do okręgów. Oblicz miarę kąta α.



3. Narysowane proste są styczne do okręgów. Oblicz długość odcinka x.



4.Oblicz miarę kąta wpisanego i miarę kąta środkowego opartych na tym samym łuku, jeżeli suma miar ich kątów jest równa 255^0.

5.Wyznacz miarę kąta wpisanego opartego na łuku stanowiącym 20% okręgu.

6. Oblicz pole wycinka i długość łuku koła o promieniu 8cm wyznaczonego przez kąt α, jeśli:

a) $\alpha = 40^{\circ}$

b)$\alpha = 120^{\circ}$

II - wzajemne położenie prostej o okręgu

7. Sprawdź wzajemne położenie prostej $3x - y - 2 = 0$ i okręgu o równaniu $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

8. Sprawdź wzajemne położenie prostej $y = -2x + 2$ i okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$

III - okrąg wpisany w czworokąt i okrąg opisany na czworokącie

9. Sprawdź, czy w czworokąt wypukły można wpisać okrąg, jeżeli jego kolejne boki mają długości:

a) 7, 12, 17, 12

b) 30, 31, 35, 33

c) 6, 16, 36, 26

10. Czy na czworokącie można opisać okrąg, jeżeli jego kolejne kąty mają miary:

a) $30^0, 60^0, 150^0, 120^0$

b) $24^0, 126^0, 56^0, 114^0$

c) $91^0, 92^0, 89^0, 88^0$

11. W trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm jest wpisany okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

12. Znajdź promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach długości 5cm i 12cm.

13. Jaką długość ma bok kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu długości 5?